
MARIO LIVIO
¿ES DIOS UN MATEMÁ-TICO?

¿Son las matemáticas una creacion humana? ¿O lo que aparece a través de ellas es el intrincado diseño del universo, que poco a poco vamos descubriendo?

Desde la Antigüedad hasta el presente, científicos y filósofos se han maravillado de que una disciplina tan abstracta pudiera explicar de manera tan perfecta el mundo natural.

Mario Livio explora brillantemente las ideas matemáticas desde Pitágoras hasta el siglo XXI y nos muestra cómo las más enigmáticas preguntas y las más ingeniosas respuestas nos han llevado a entender mejor el mundo que nos rodea. Este fascinante libro interesará a cualquier persona que sienta curiosidad por la mente humanda y la ciencia.

Lectulandia

Mario Livio

¿Es Dios un Matemático?

ePUB v2.1

hugoross & iBrain 09.09.12

Título original: *Is God a Mathematician?*
Mario Livio, 2009.
Traducción: Francesc Pedrosa
Diseño/retoque portada: Biblia de Reims, s. XIII, Erich Lessing/Album

Editor original: hugoross (v1.0)
Segundo editor: iBrain (v2.0)
ePub base v2.0

A Sofie

PREFACIO

Cuando uno trabaja en cosmología (el estudio del cosmos en su conjunto), el pan nuestro de cada día es recibir semanalmente alguna carta, correo electrónico o fax de una persona (que suele ser invariablemente hombre) que pretende describirte su visión del universo. El mayor error que se puede cometer es responder educadamente que te gustaría saber algo más acerca de ello. El resultado inmediato es un aluvión de mensajes. ¿Hay alguna forma de impedir este asalto? Según mi experiencia, una táctica que funciona de forma bastante eficaz (aparte de la descortesía de no responder en absoluto) es señalar la siguiente realidad: que, mientras la teoría no esté formulada con precisión en el lenguaje de la matemática, no es posible evaluar su relevancia. Esta respuesta basta para disuadir a casi todos los cosmólogos aficionados. El hecho es que, sin la matemática, los cosmólogos modernos no podrían haber dado siquiera el primer paso en su intento de comprensión de las leyes de la naturaleza. La matemática proporciona unos sólidos cimientos que sostienen cualquier teoría del universo. Esto puede parecer trivial hasta que uno toma conciencia de que la propia naturaleza de la matemática no está del todo clara. En palabras del filósofo británico Michael Dummett (1925-): «Las dos disciplinas intelectuales más abstractas, la filosofía y la matemática, provocan la misma perplejidad: ¿cuál es su objeto? Esta perplejidad no surge únicamente de la ignorancia: los mismos profesionales de estas materias tienen dificultades para dar respuesta a esa pregunta».

Mi humilde propósito en este libro es aclarar algunos de los aspectos de la esencia de la matemática y, sobre todo, la naturaleza de la relación entre la matemática y el mundo tal como lo observamos. No es mi intención elaborar una historia exhaustiva de la matemática, sino más bien seguir cronológicamente la evolución de algunos conceptos que influyen directamente en la comprensión del rol de la matemática en nuestra noción del cosmos.

Muchas son las personas que han contribuido, directa o indirectamente y a lo largo de mucho tiempo, a dar forma a las ideas que se presentan en este libro. Querría dar las gracias a Michael Atiyah, Gia Dvali, Freeman Dyson, Hillel Gauchman, David Gross, Roger Penrose, Martin Rees, Raman Sundrum, Max Tegmark, Steven Weinberg y Stephen Wolfram por sus amables comentarios. Estoy en deuda con Dorothy Morgenstern-Thomas por permitirme utilizar el texto completo del relato de Oscar Morgenstern sobre las experiencias de Kurt Gödel con el Servicio de Inmigración y Naturalización (INS). Agradezco también a William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton y en particular a Will Noel su gentileza al explicarme sus esfuerzos en la operación de descifrar el palimpsesto de Arquímedes. Un agradecimiento especial para Laura Garbolino por proporcionarme materiales esenciales y archivos singulares acerca de la historia de la matemática. También quiero dar las gracias a los departamentos de Colecciones Especiales de la Universidad fohns Hopkins, la Universidad de Chicago y de la Bibliothèque Nationale de Francia en París, por ayudarme a localizar algunos manuscritos excepcionales.

Estoy en deuda con Stefano Casertano por su ayuda con ciertas complicadas traducciones del latín, y con Elizabeth Fraser y Jill Lagerstrom por su inapreciable asistencia bibliográfica y lingüística (siempre con una sonrisa).

Un agradecimiento especial va también para Sharon Toolan por su apoyo profesional en la preparación para la imprenta, y para Ann Feild y Krista Wildt por dibujar algunas de las figuras.

Todo autor debería considerarse afortunado por recibir de su pareja un apoyo y paciencia continuos, como el que yo he recibido de mi mujer, Sofie, durante el largo período de elaboración de este libro.

Por último, quisiera dar las gracias a mi agente, Susan Rabiner, sin cuyos ánimos esta obra no hubiese visto jamás la luz. Estoy también en deuda con mi editor, Bob Bender, por su cuidadosa lectura del manuscrito y sus perspicaces comentarios, con Johanna Li por su inestimable ayuda en la producción del libro, con Loretta Denner por sus correcciones, con Victoria Meyer por su labor de promoción y con todo el equipo de producción y marketing de Simon & Schuster por su esfuerzo.

1
Un misterio

Hace unos años, durante una charla que daba en la Universidad de Cornell, una de mis diapositivas de PowerPoint, decía: «¿Es Dios un matemático?». Nada más aparecer, uno de los estudiantes de las primeras filas exclamó: «¡Por Dios, espero que no!».

Mi pregunta retórica no era un intento filosófico de definir «Dios» a mi público, ni una confabulación para intimidar a los matemafóbicos. En realidad sólo estaba presentando un misterio que ha tenido en vilo a las mentes más originales durante siglos: la aparente omnipresencia y omnipotencia de la matemática. Este tipo de características suelen asociarse con los entes divinos. Como decía el físico británico James Jeans[1] (1877-1946): «El universo parece haber sido diseñado por un matemático puro». La matemática parece ser excepcionalmente eficaz para describir y explicar, no sólo el Cosmos en su conjunto, sino incluso algunas de las iniciativas más caóticas del hombre.

Ya se trate de físicos que intentan formular teorías sobre el universo, analistas de bolsa que se devanan los sesos para predecir cuándo volverá a caer el mercado, neurobiólogos que construyen modelos de las funciones cerebrales o estadísticos militares que optimizan la asignación de recursos, todos ellos utilizan la matemática. Es más, incluso cuando aplican formalismos desarrollados en ramas distintas de la matemática, todos hacen referencia a la misma matemática, global y coherente. ¿Qué es lo que otorga a la matemática tan extraordinario poder? O, como Einstein se preguntaba:[2] «¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano *independiente de la experiencia* se ajuste de modo tan perfecto a los objetos de la realidad física?». (La cursiva es mía.)

Esta sensación de extrema perplejidad no es nueva. Algunos filósofos de la antigua Grecia, especialmente Pitágoras y Platón, quedaron sobrecogidos por la aparente capacidad de la matemática para dar forma y guía al universo y al mismo tiempo existir, al parecer, más allá de la capacidad humana de alterarlo, dirigirlo e influir sobre él. El filósofo político inglés Thomas Hobbes (1588-1679) no pudo tampoco ocultar la admiración que sentía. En *Leviatán*, la impresionante exposición de Hobbes sobre los fundamentos de la sociedad y del gobierno, señaló a la geometría como paradigma[3] de la argumentación racional:

> Si advertimos, pues, que la verdad consiste en la correcta ordenación de los nombres en nuestras afirmaciones, un hombre que busca la verdad precisa tiene necesidad de recordar lo que significa cada uno de los nombres usados por él, y colocarlos adecuadamente; de lo contrario, se encontrará él mismo envuelto en palabras, como un pájaro en el lazo; y cuanto más se debata tanto más apurado se verá. Por esto en la Geometría (única ciencia que Dios se complació en comunicar al género humano) comienzan los hombres por establecer el significado de sus palabras; esta fijación de significados se denomina definición, y se coloca en el comienzo de todas sus investigaciones.

Milenios de admirables investigaciones matemáticas y eruditas especulaciones filosóficas apenas han servido para desentrañar el enigma del poder de la matemática. De hecho, la magnitud del misterio incluso ha crecido. El célebre físico matemático de Oxford Roger Penrose, por ejemplo, percibe en la actualidad no un simple misterio, sino tres. Penrose identifica tres «mundos» distintos:[4] el *mundo de nuestra percepción consciente*, el *mundo físico* y el *mundo platónico de las formas matemáticas*. El primero de los mundos alberga nuestras imágenes mentales: cómo percibimos los rostros de nuestros hijos, cómo disfrutamos de una espléndida puesta de sol o cómo reaccionamos a las terroríficas imágenes de la guerra. Es también el mundo que contiene el amor, los celos y los prejuicios, así como nuestra percepción de la música, de los olores de la comida o del miedo. El segundo mundo es aquel al que solemos llamar realidad física. En él residen las flores, los dinosaurios, las nubes blancas y los aviones de reacción, y también las galaxias, los planetas, los átomos, los corazones de los babuinos y los cerebros humanos. El mundo platónico de las formas matemáticas, que para Penrose posee una calidad real comparable a los mundos físico y mental, es la patria de la matemática. En él podrá encontrar los números naturales 1, 2, 3, 4… las formas y teoremas de la geometría de Euclides, las leyes del movimiento de Newton, la teoría de cuerdas, la teoría de catástrofes y los modelos matemáticos del comportamiento del mercado de valores. Y ahora vienen, según Penrose, los tres misterios. En primer lugar, el mundo de la realidad física parece obedecer leyes que en realidad residen en el mundo de las formas matemáticas. Este era el enigma que dejaba perplejo a Einstein e igualmente atónito al premio Nobel Eugene Wigner[5] (1902-1995):

> El milagro de la articulación entre el lenguaje, la matemática y la formulación de las leyes de la física es un obsequio maravilloso que no comprendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello y esperar que siga siendo válido en ulteriores investigaciones y que se extienda, para bien o para mal, para nuestro placer o incluso para nuestro desconcierto, a otras ramas del conocimiento.

En segundo lugar, las propias mentes que perciben —el reino de nuestra percepción consciente— se las han arreglado para surgir del mundo físico. Literalmente, ¿cómo ha podido la *mente* nacer de la *materia*? ¿Seremos algún día capaces de formular una teoría del funcionamiento de la conciencia que sea tan coherente y convincente como, por ejemplo, la actual teoría del electromagnetismo? Finalmente, el círculo se cierra misteriosamente. Por medio de algún milagro, esas mismas mentes han sido capaces de acceder al mundo matemático al descubrir, o crear, y dar articulación a un capital de formas y conceptos matemáticos.

Penrose no ofrece explicación alguna a ninguno de los tres «misterios», sino que concluye, de forma lacónica: «No cabe duda de que en realidad no hay tres mundos sino *uno solo*, cuya verdadera naturaleza actualmente somos incapaces siquiera de entrever». Es un reconocimiento mucho más humilde que la respuesta del profesor de la obra *Forty Years On*, del autor inglés Alan Bennett, a una pregunta similar:

> Foster: La trinidad sigue pareciéndome confusa, señor.
>
> Profesor: Tres en uno, uno en tres; está meridianamente claro. Si tienes alguna duda, consulta con tu profesor de matemáticas.

El enigma es aún más intrincado de lo que he sugerido hasta ahora. En realidad, el éxito de la matemática en dar explicación al mundo que nos rodea (un éxito al que Wigner denominaba «la irrazonable eficacia de la matemática») tiene dos caras, cada una más asombrosa que la otra. En primer lugar tenemos el aspecto, digamos, «activo». Cuando los físicos deambulan por el laberinto de la naturaleza, utilizan la matemática para iluminar su camino: las herramientas que emplean y desarrollan, los modelos que construyen y las explicaciones que conjuran son de naturaleza matemática. Aparentemente, esto es un milagro por sí mismo. Newton observó la caída de una manzana, la luna y las mareas en las playas (aunque de esto último no estoy muy seguro), y no ecuaciones matemáticas. Sin embargo, de algún modo fue capaz de extraer de estos fenómenos naturales una serie de leyes matemáticas de la naturaleza claras, concisas y de increíble precisión. De igual modo, James Clerk Maxwell (1831-1879) amplió el campo de la física clásica para incluir *la totalidad* de los fenómenos eléctricos y magnéticos conocidos en la década de 1860, y lo hizo con tan sólo *cuatro ecuaciones matemáticas*. Reflexionen un momento sobre ello. La explicación de una serie de resultados experimentales sobre luz y electromagnetismo, cuya descripción había ocupado volúmenes enteros, se redujo a cuatro sucintas ecuaciones. La *relatividad general* de Einstein es aún más extraordinaria: se trata de un ejemplo perfecto de teoría matemática coherente y de fantástica precisión que describe algo tan fundamental como la estructura del espacio y del tiempo.

Pero también hay un aspecto «pasivo» de la misteriosa eficacia de la matemática, tan sorprendente que, a su lado, el aspecto «activo» palidece en comparación. ¡Los conceptos y las relaciones que los matemáticos exploran únicamente por razones «puras» (*sin pensar en absoluto en su aplicación*) décadas (e incluso siglos) después acaban siendo las inesperadas soluciones de problemas firmemente enraizados en la realidad física! ¿Cómo es posible? Tomemos, por ejemplo, el divertido caso del excéntrico matemático británico Godfrey Harold Hardy (1877-1947). Hardy estaba tan orgulloso de que su trabajo consistiese exclusivamente en matemática pura que solía declarar con energía:[6] «Ninguno de mis descubrimientos ha supuesto, o es probable que suponga, de forma directa o indirecta, para bien o para mal, diferencia alguna en el funcionamiento del mundo». Lo han adivinado: se equivocaba. Uno de sus trabajos, redivivo[7] en forma de ley de Hardy-Weinberg (así llamada por Hardy y el médico alemán Wilhelm Weinberg [1862-1937]), es un principio fundamental que los genetistas utilizan en el estudio de la evolución de las poblaciones. En términos sencillos, la ley de Hardy-Weinberg afirma que, si una gran población se aparea de forma totalmente aleatoria (y no sufre los efectos de mutaciones, migraciones o selecciones), la constitución genética permanece constante de una generación a la siguiente. Incluso el aparentemente abstracto trabajo de Hardy en *teoría de números* —el estudio de las propiedades de los números naturales— ha hallado aplicaciones inesperadas. En 1973, el matemático británico Clifford Cocks[8] empeló la teoría de números para crear un avance decisivo en criptografía: el desarrollo de los códigos. El descubrimiento de Cocks convirtió en obsoleta otra de las afirmaciones de Hardy. En su famoso libro *A Mathematician's Apology*, editado en 1940, Hardy declaraba: «Nadie ha descubierto aún ninguna finalidad bélica para la teoría de números». Está claro que Hardy se equivocaba de nuevo. Los códigos se han convertido en algo absolutamente esencial para las comunicaciones militares. Así, incluso Hardy, uno de los más feroces críticos de la matemática aplicada, acabó desarrollando sin querer (y probablemente protestando a gritos, si hubiese estado vivo) teorías matemáticas útiles.

Pero esto no es más que la punta del iceberg. Kepler y Newton descubrieron que los planetas de nuestro sistema solar siguen órbitas en forma de elipse, las mismas curvas que, dos mil años antes, estudió el matemático griego Menechmo (fl. ca. 350 a.C). Las nuevas geometrías sugeridas por Georg Friedrich Riemann (1826-1866) en una conferencia clásica en 1854 resultaron ser exactamente las herramientas que Einstein necesitaba para explicar el tejido del cosmos. Un «lenguaje» matemático (la llamada *teoría de grupos*) que desarrolló el joven genio Evariste Galois (1811-1832) con el único objetivo de determinar la solubilidad de las ecuaciones algebraicas se ha convertido en nuestros días en el idioma que los físicos, ingenieros, lingüistas e incluso antropólogos utilizan para describir las simetrías del mundo.[9] Es más, en cierto modo, el concepto de patrón de simetría matemático ha revolucionado el mismo proceso de la ciencia. Durante siglos, el camino para comprender el funcionamiento del cosmos empezaba por un conjunto de hechos experimentales u observables a partir de los cuales, por ensayo y error, los científicos intentaban formular leyes generales de la naturaleza. Se trataba de empezar por observaciones locales y, a partir de ellas, armar el rompecabezas pieza a pieza. En el siglo XX, al descubrir que en la estructura del mundo subatómico subyacen esquemas matemáticos bien definidos, los físicos modernos empezaron a actuar justamente *al revés*. Empiezan por los principios matemáticos de simetría, exigen que las leyes de la naturaleza y, por supuesto, los bloques básicos que constituyen la materia sigan determinados patrones y, a partir de estos requisitos, deducen las leyes generales. ¿Cómo sabe la naturaleza que debe obedecer a estas simetrías matemáticas abstractas?

En 1975 Mitch Feigenbaum, un joven físico matemático del Laboratorio Nacional de Los Alamos, jugaba con su calculadora de bolsillo HP-65 examinando el comportamiento de una ecuación sencilla. Se dio cuenta de que una serie de números[10] que aparecía en los cálculos se acercaba cada vez más a un número determinado: 4,669… Al examinar otras ecuaciones, para su asombro, vio que el mismo curioso número volvía a aparecer. Feigenbaum llegó a la conclusión de que su descubrimiento representaba al *universal*, que en cierto modo marcaba la transición entre orden y caos, a pesar de que no sabía explicar por qué. Como es lógico, al principio los físicos se lo tomaron con escepticismo. Después de todo, ¿por qué iba un mismo número a caracterizar el comportamiento de sistemas que, en principio, parecían completamente distintos? Tras seis meses de evaluación profesional, el primer artículo de Feigenbaum sobre el particular fue rechazado. Sin embargo, poco después, los resultados experimentales mostraron que, al calentar helio líquido desde debajo, su comportamiento era exactamente el predicho por la solución universal de Feigenbaum. Yno se trataba del único sistema en comportarse así. El sorprendente número de Feigenbaum aparecía en la transición del flujo ordenado de un fluido al flujo turbulento, e incluso en el comportamiento del agua que gotea en un grifo.

La lista de «previsiones» similares hechas por matemáticos de las necesidades de diversas disciplinas en generaciones posteriores es inagotable. Uno de los ejemplos más insólitos de la misteriosa e inesperada interacción entre la matemática y el mundo real (físico) lo ofrece la historia de la *teoría de nudos*, el estudio matemático de los nudos. Un nudo matemático se parece a un nudo normal en una cuerda, pero con los extremos de la cuerda empalmados. Es decir, un nudo matemático es una curva cerrada sin cabos sueltos. Curiosamente, el impulso inicial de la teoría de nudos matemáticos procede de un modelo incorrecto del átomo que se desarrolló en el siglo XIX. Cuando se abandonó ese modelo —tan solo dos décadas después de su creación —, la teoría de nudos siguió evolucionando como una recóndita rama de la matemática pura. Increíblemente, esta abstracta empresa encontró de pronto numerosas aplicaciones modernas en cuestiones que van desde la estructura molecular del ADN a la *teoría de cuerdas* (el intento de unificar el mundo subatómico con la gravedad). Volveré a hablar de esta notable historia en el capítulo 8, ya que su circularidad es quizá la mejor prueba del modo en que una rama de la matemática puede surgir del intento de explicar la realidad física, y cómo esta rama deambula en el reino abstracto de la matemática para, finalmente, volver de forma inesperada a sus orígenes.

¿Descubierta o inventada?

Basta la somera descripción que he presentado hasta ahora para ofrecer pruebas concluyentes de que el universo está gobernado por la matemática o, como mínimo, es susceptible de ser analizado a través de ella. Como se mostrará en este libro, la práctica totalidad de las iniciativas humanas, si no todas, parecen emerger también de una subestructura matemática, incluso en las situaciones más inesperadas. Vamos a examinar, por ejemplo, un caso del mundo de las finanzas, la fórmula Black-Scholes (1973) para el precio de las opciones.[11] El modelo Black-Scholes supuso para sus creadores (Myron Scholes y Robert Carhart Merton; Fischer Black falleció antes de la concesión del premio) el premio Nobel de Economía. La ecuación principal del modelo permite comprender la asignación de precios de las opciones (las opciones son instrumentos financieros que permiten a los inversores comprar o vender acciones en un momento del futuro, a precios previamente acordados). Pero he aquí un hecho sorprendente: en el núcleo de este modelo reside un fenómeno que los físicos habían estudiado durante décadas: el movimiento browniano, el estado de agitación que muestran las partículas muy pequeñas, como el polen suspendido en el agua o las partículas de humo en el aire. Por si esto fuera poco, esa misma ecuación se aplica también a los movimientos de centenares de miles de estrellas en cúmulos estelares, e incluso a las partículas subatómicas observadas en un detector. ¿No es, como diría la protagonista de *Alicia en el país de las maravillas*, «curiorífico y curiorífico»? Después de todo, haga lo que haga el cosmos, es innegable que los negocios y las finanzas son mundos creados por la mente humana.

Vamos a fijarnos en un problema habitual de los fabricantes de circuitos electrónicos y de los diseñadores de ordenadores. Estos profesionales utilizan taladros láser para practicar decenas de miles de pequeños orificios en sus placas. Para minimizar costes, los diseñadores no quieren que su taladro se comporte como si fuese un «turista accidental»; el problema consiste en hallar el «tour» más corto entre orificios que pase una sola vez por cada uno de ellos. Pues bien, resulta que los matemáticos llevan investigando este mismo problema, denominado *problema del* *viajante*, desde los años veinte del pasado siglo. En esencia, si un viajante comercial o un político en campaña tiene que pasar por un número determinado de ciudades y se conoce el coste del viaje entre cada par de ciudades, el viajante debe averiguar de algún modo cuál es la forma más barata de visitar todas las ciudades y regresar al punto de partida. El problema del viajante se resolvió[12] para 49 ciudades de Estados Unidos en 1954. En 2004 se resolvió para 24.978 ciudades en Suecia. En otras palabras, la industria de la electrónica, las empresas de paquetería que calculan las rutas de sus camiones o incluso los fabricantes japoneses de máquinas de *pachinko* (que tienen que clavar millares de clavos en los tableros de este juego similar al *pinball*) deben apoyarse en la matemática para tareas simples como taladrar, planificar trayectos y crear el diseño físico de los ordenadores.

La matemática ha hecho acto de presencia incluso en campos que tradicionalmente no se han relacionado con las ciencias exactas. Por ejemplo, la revista *Journal of Mathematical Sociology*, que llegó en 2006 a su volumen número 30, está dedicada a la comprensión matemática de estructuras sociales complejas, organizaciones y grupos informales. Los temas de los artículos de la revista van desde modelos matemáticos para la predicción de la opinión pública hasta las interacciones dentro de grupos sociales.

En la dirección contraria —de las matemáticas a las humanidades—, el campo de la lingüística computacional, que al principio sólo incumbía a científicos relacionados con la informática, se ha convertido ahora en una tarea de investigación interdisciplinaria que reúne a lingüistas, psicólogos cognitivos, lógicos y expertos en inteligencia artificial para el estudio de la complejidad de los lenguajes evolucionados de forma natural.

Parece como si, cada uno de los esfuerzos de las personas por comprender acabase por sacar a la luz los aspectos cada vez más sutiles de la matemática sobre los que se ha creado el universo y nosotros mismos, como entes complejos. ¿Qué broma es ésta? ¿Es realmente la matemática, como les gusta decir a los educadores, el libro de texto oculto que el profesor utiliza para parecer más listo que nadie mientras ofrece a sus alumnos una versión simplificada? O, utilizando una metáfora bíblica, ¿se trata, en cierto sentido, del fruto definitivo del «árbol de la ciencia»?

Como apunté al principio de este capítulo, la eficacia de la matemática más allá de lo razonable hace surgir numerosos y fascinantes enigmas: ¿existe la matemática de forma independiente de la mente humana? Dicho de otro modo, ¿estamos simplemente *descubriendo* las verdades matemáticas, igual que los astrónomos descubren galaxias desconocidas hasta el momento? ¿O quizá la matemática es sólo una *invención humana*? Si realmente la matemática existe en algún abstracto país de nunca jamás, ¿cuál es la relación entre este mundo místico y la realidad física? ¿Cómo es capaz el cerebro humano, con sus limitaciones, de acceder a este mundo inmutable, más allá del espacio y del tiempo? Por otro lado, si la matemática no es más que una invención del hombre que no existe fuera de nuestras mentes, ¿cómo podemos explicar el hecho de que la invención de tantas verdades matemáticas se adelantó de forma milagrosa a cuestiones acerca del cosmos y de la vida humana que ni siquiera se plantearon hasta siglos más tarde? Estas preguntas no son fáciles de responder. Como se mostrará ampliamente en este libro, ni siquiera los matemáticos, científicos del conocimiento y filósofos modernos se han puesto de acuerdo en las respuestas. En 1989, el matemático francés Alain Connes, ganador de dos de los premios con más prestigio de la matemática, la medalla Fields (1982) y el premio Crafoord (2001) expresó su punto de vista con claridad:[13]

> Tomemos, por ejemplo, los números primos [aquellos que sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad] que, por lo que a mí respecta, constituyen una realidad más estable que la realidad material que nos rodea. El matemático de profesión se puede comparar con un explorador que se pone en marcha para descubrir el mundo. A partir de la experiencia se pueden descubrir hechos básicos. Por ejemplo, basta con unos sencillos cálculos para darse cuenta de que la serie de números primos parece no tener fin. El trabajo del matemático es entonces demostrar que, efectivamente, hay una infinidad de números primos. Este es un resultado antiguo, como sabemos, y se lo debemos a Euclides. Una de las consecuencias más interesantes de esta demostración es que, si alguien afirma un día que ha descubierto el mayor número primo que existe, será fácil demostrar que se equivoca. Esto mismo es válido para cualquier demostración. Nos enfrentamos pues a *una realidad estrictamente igual de incontestable que la realidad física*. (Las cursivas son mías.)

El famoso autor de libros de matemática recreativa Martin Gardner se alinea también con la idea de la matemática como *descubrimiento*. Para él, no cabe duda de que los números y la matemática tienen una existencia propia, independientemente de que los hombres sepan de ella. Según su propia e ingeniosa afirmación:[14] «Si dos dinosaurios se uniesen a otros dos dinosaurios en un claro, habría cuatro dinosaurios, aunque no hubiese ningún humano allí para observarlo y las bestias fuesen demasiado estúpidas para saberlo». Tal como resaltaba Connes, los partidarios de la perspectiva de «matemática como descubrimiento» (que, como veremos, se ajusta al punto de vista platónico) señalan que, una vez que se comprende determinado concepto matemático, como los números naturales 1, 2, 3, 4…, nos enfrentamos a una serie de *hechos* innegables, como $3^2 + 4^2 = 5^2$ independientemente de lo que *opinemos* al respecto. La impresión es que estamos en contacto con una realidad preexistente.

Otras personas no están de acuerdo. En la crítica de un libro[15] en el que Connes presentaba sus ideas, el matemático británico Michael Atiyah (ganador de la medalla Fields en 1966 y del premio Abel en 2004) señalaba:

> Cualquier matemático no puede menos que simpatizar con Connes. Todos tenemos la sensación de que los números enteros, o los círculos, existen realmente en algún sentido abstracto, y el punto de vista platónico* (*El punto de vista platónico se describirá en detalle en el capítulo 2.) es terriblemente seductor. Pero ¿podemos realmente defenderlo? Si el universo fuese unidimensional, o incluso discreto, parece difícil concebir cómo podría haber evolucionado la geometría. Parece que con los números enteros el

> terreno en el que pisamos es más sólido, que contar es un concepto realmente primordial. Pero imaginemos que la inteligencia no se hubiese desarrollado en el hombre, sino en una especie de medusa colosal, solitaria y aislada en los abismos del océano Pacífico. Este ente no tendría experiencia alguna de los objetos individuales, ya que sólo estaría rodeado de agua. Sus datos sensoriales se reducirían a movimiento, temperatura y presión. En este continuo puro, el concepto de discreto no podría surgir ni, por consiguiente, habría nada que contar.

Atiyah, por lo tanto, cree que «el Hombre ha *creado* la matemática mediante la idealización y abstracción de elementos del mundo físico. El lingüista George Lakoff y el psicólogo Rafael Núñez piensan lo mismo. En su libro *Where Mathematics Comes From*, su conclusión es que «la matemática es una parte natural de la condición humana. Surge de nuestros cuerpos, nuestros cerebros y nuestra experiencia cotidiana del mundo». (La cursiva es mía.)

El punto de vista de Atiyah, Lakoff y Núñez suscita otra interesante pregunta. Si la matemática es por completo una invención del hombre, ¿es realmente *universal*? En otras palabras, si existen civilizaciones extraterrestres, ¿inventarían la misma matemática? Carl Sagan (1934-1996) pensaba que la respuesta a esta pregunta era afirmativa. En su libro *Cosmos*, al comentar qué tipo de señales transmitiría al espacio una civilización inteligente, decía: «Es muy improbable que cualquier proceso físico natural pueda transmitir mensajes de radio que sólo contengan números primos. Si recibiéramos un mensaje de este tipo deduciríamos que allí fuera hay una civilización que por lo menos se entusiasma con los números primos». Pero ¿cuál es la certeza de esta afirmación? En su reciente libro *A New Kind of Science*, el físico matemático Stephen Wolfram sostiene que lo que llamamos «nuestra matemática» puede representar una única posibilidad dentro de una amplia variedad de posibles «sabores» de la matemática. Por ejemplo, en lugar de utilizar reglas basadas en ecuaciones matemáticas para describir la naturaleza, podríamos utilizar tipos distintos de reglas en forma de programas de ordenador simples. Es más, algunos cosmólogos han comentado recientemente la posibilidad de que nuestro universo no sea más que uno de los miembros de un *multiverso*, un inmenso conjunto de universos. Si ese multiverso existe realmente, ¿acaso esperamos que la matemática sea la misma en los otros universos?

Los biólogos moleculares y los científicos cognitivos traen su propia perspectiva a la palestra a partir de los estudios de las facultades del cerebro. Para algunos de estos investigadores, la matemática no difiere en realidad demasiado del *lenguaje*. En otras palabras, en este escenario «cognitivo», después de eones de observar dos manos, dos ojos y dos pechos, ha surgido una definición abstracta del número 2, de un modo similar a como la palabra «ave» ha llegado a representar a numerosos animales de dos alas que vuelan. Como dice el neurocientífico francés Jean-Pierre Changeux:[16] «Para mí, el método axiomático [que se utiliza, por ejemplo, en geometría euclidiana] es la expresión de la conexión de las facultades cerebrales con el uso del cerebro humano, ya que aquello que caracteriza al lenguaje es precisamente su carácter generativo». Pero, si la matemática no es más que otro lenguaje, ¿cómo se explica el hecho de que numerosos niños encuentren dificultades en su estudio, a pesar de la facilidad de los niños para el estudio de idiomas? La niña prodigio escocesa Marjory Fleming (1803-1811) describió de una forma muy graciosa el tipo de dificultades que los estudiantes sufren con las matemáticas. Fleming, que no llegó a ver su noveno cumpleaños, dejó escritos diarios con más de 9.000 palabras en prosa y 500 líneas en verso. En cierto momento se queja: «Ahora les voy a hablar de los horribles y condenados apuros que me dan las tablas de multiplicar; ni se lo imaginan. Lo más infernal del mundo es siete por siete y ocho por ocho; ni la misma naturaleza es capaz de soportar eso».[17]

Algunos de los elementos de las complejas cuestiones que he planteado se pueden reformular: ¿hay alguna diferencia fundamental entre la matemática y otras formas de expresión de la mente humana, como las artes visuales o la música? Si no es así, ¿por qué la matemática está dotada de una impresionante coherencia y regularidad que no parece existir en ninguna otra creación humana? Por ejemplo, la geometría de Euclides es igual de correcta en nuestros días (dentro de su campo de aplicación) como lo era en el año 300 a.C; representa «verdades» que son *obligatorias*. En cambio, no sentimos obligación alguna de escuchar la misma música que escuchaban los antiguos griegos, ni de estar de acuerdo con el ingenuo modelo cósmico de Aristóteles.

Muy pocas disciplinas de la actualidad emplean ideas que tienen tres mil años de antigüedad. Por otra parte, las últimas investigaciones en matemática pueden hacer referencia a teoremas publicados el año pasado, pero también utilizar la fórmula de la superficie de una esfera que Arquímedes demostró alrededor del año 250 a.C. El modelo de nudos del átomo del siglo XIX apenas sobrevivió dos décadas, porque los nuevos descubrimientos demostraron que determinados elementos de la teoría eran erróneos. Así es como avanza la ciencia. Newton compartió la fama (¡o no!, véase el capítulo 4) de su colosal visión con los gigantes sobre cuyos hombros se alzó. También podría haberse disculpado con los gigantes cuya obra convirtió en obsoleta.

Pero la matemática no funciona así. Aunque el formalismo necesario para demostrar determinados resultados haya cambiado, los *resultados* matemáticos en sí no cambian. De hecho, como dice el matemático y escritor Ian Stewart, «en matemáticas hay una palabra para referirse a los resultados antiguos que han cambiado: se llaman simplemente *errores*».[18] Y los errores no se reconocen como tales a causa de nuevos descubrimientos, como sucede en las demás ciencias, sino por un examen más riguroso de las mismas viejas verdades matemáticas. ¿Convierte esto a la matemática en la lengua propia de Dios?

Si opina que no es tan importante averiguar si la matemática es inventada o descubierta, tenga en cuenta lo tendencioso de la diferencia entre «inventado» y «descubierto» en esta pregunta: ¿Dios ha sido inventado o descubierto? O, para más provocación: ¿creó Dios a los hombres a Su imagen y semejanza, o los hombres inventaron a Dios a imagen y semejanza de ellos?

En este libro intentaremos dar respuesta a estas fascinantes preguntas (y algunas otras más). En el proceso, repasaremos algunas de las conclusiones obtenidas a partir de la obra de algunos de los grandes matemáticos, físicos, filósofos, científicos del conocimiento y lingüistas de la actualidad y de tiempos pasados. Buscaré también las opiniones, advertencias y reservas de numerosos pensadores de la actualidad. Vamos a iniciar este sugestivo periplo con la revolucionaria, aunque algo vaga, perspectiva de algunos de los filósofos de la Antigüedad.

2
Místicos: el numerólogo y el filósofo

El deseo de entender el cosmos ha sido siempre un impulso humano. Los esfuerzos del hombre por llegar al fondo de la pregunta «¿qué significa todo esto?» han superado con creces los dedicados a la mera supervivencia, a la mejora de la situación económica o de la calidad de vida. Eso no significa que todos hayan participado de forma activa en la búsqueda de algún tipo de orden natural o metafísico. Las personas que tienen que luchar por llegar a fin de mes apenas pueden permitirse el lujo de ponerse a reflexionar acerca del sentido de la vida. En la galería de cazadores de patrones subyacentes a la complejidad que se percibe en el universo, varios de ellos destacan sobre los demás.

Para muchos, el nombre del matemático, científico y filósofo francés René Descartes (1596-1650) es sinónimo del nacimiento de la «era moderna» de la filosofía de la ciencia. Descartes fue uno de los principales arquitectos[19] del cambio de una descripción del mundo natural en términos de las propiedades percibidas directamente a través de los sentidos a una explicación expresada mediante cantidades matemáticamente definidas. En lugar de sentimientos, olores, colores y sensaciones vagas, Descartes quería que las explicaciones científicas descendiesen hasta el nivel fundamental y utilizasen el lenguaje de la matemática:

> No reconozco sustancia alguna en las entidades corpóreas salvo lo que los geómetras llaman *cantidad* y convierten en el objeto de sus demostraciones… Y, siendo que todos los fenómenos naturales pueden explicarse de este modo, sostengo que ningún otro principio es admisible o siquiera deseable en física.[20]

Es interesante ver cómo Descartes excluía de su elevada visión científica los reinos del «pensamiento y la mente», que consideraba independientes del mundo de la materia, susceptible de ser explicado mediante la matemática. Aunque no cabe duda alguna de que Descartes fue uno de los pensadores más influyentes de los últimos siglos (y volveré a referirme a él en el capítulo 4), no fue el primero en elevar la matemática a una posición central. Aunque parezca increíble, ideas radicales de un cosmos impregnado y gobernado por la matemática —ideas que, en cierto modo, iban más allá del propio Descartes— vieron la luz por vez primera, aunque teñidas de un cierto tono místico, hacía más de dos milenios. La persona a la que, según la leyenda, se le atribuye la percepción de que el alma humana es «como la música» si se la mira desde el punto de vista de la matemática pura, es el enigmático Pitágoras.

Pitágoras

Pitágoras (ca. 572-497 a.C.) fue quizá la primera persona que fue a la vez un influyente filósofo natural y un carismático filósofo espiritual, es decir, un científico y un pensador religioso. De hecho, se le atribuye la introducción de las palabras[21] *filosofía*, que significa amor o avidez por el saber, y *matemáticas*, aquellas disciplinas que se pueden aprender. Aunque no ha sobrevivido ninguno de los escritos del propio Pitágoras (si es que existieron, ya que en la época la mayor parte de las comunicaciones eran orales), sí poseemos tres detalladas, aunque sólo parcialmente fiables, biografías de Pitágoras que datan del siglo III.[22] Una cuarta biografía anónima se conservó en los escritos del patriarca y filósofo bizantino Fotio (ca. 820-891 d.C). El principal problema al intentar evaluar la contribución personal de Pitágoras es que sus seguidores y discípulos (los pitagóricos) atribuían invariablemente sus propias ideas a él. Así, incluso Aristóteles (384-322 a.C.) tiene problemas para identificar[23] qué partes de la filosofía pitagórica se pueden arrogar al propio Pitágoras, de modo que suele hablar de «los pitagóricos» o a «los así llamados pitagóricos». Sin embargo, a juzgar por la fama de Pitágoras en la tradición posterior, generalmente se supone que fue el inspirador de, como mínimo, algunas de las teorías pitagóricas con las que tan en deuda se sintieron Platón o incluso Copérnico.

No parece haber dudas de que Pitágoras nació a principios del siglo VI a.C. en el isla de Samos, junto a la costa de la actual Turquía. Es posible que en su juventud viajase mucho, en especial a Egipto y puede que a Babilonia, en donde habría recibido una parte de su educación matemática. Finalmente emigró a la colonia griega de Crotona, cerca del extremo sur de Italia, en donde rápidamente se rodeó de un entusiasta grupo de jóvenes estudiantes y seguidores.

El historiador griego Herodoto[24] (ca. 485-425 a.C.) hablaba de Pitágoras como «el más capaz de los filósofos griegos», a lo que el filósofo y poeta presocrático Empédocles (ca. 492-432 a.C.) agregaba con admiración: «Pero entre ellos había un hombre de prodigiosos conocimientos, dotado de la más profunda capacidad de comprensión y maestro en todo tipo de artes; pues, cuando era su firme voluntad, podía fácilmente discernir cualquier verdad de las vidas de sus diez, no, veinte hombres».[25] Pero no causaba esta impresión a todos. En comentarios que parecen producto de alguna rivalidad personal, el filósofo Heráclito de Éfeso (ca. 535-475 a.C), aunque reconoce los amplios conocimientos de Pitágoras, agrega con desdén: «La erudición no enseña la sabiduría; si así fuera, sabios serían Hesíodo [un poeta griego que vivió alrededor del año 700 a.C] y Pitágoras».

Pitágoras y los primeros pitagóricos no eran matemáticos ni científicos en el sentido estricto. Más bien, el núcleo de su doctrina contenía una filosofía metafísica del concepto de *número*. Para los pitagóricos, los números eran entidades vivas y principios universales imbuidos en todo, desde los cielos a la ética de los hombres. En otras palabras, los números poseían dos aspectos diferentes y complementarios. Por un lado, tenían una existencia física perfectamente tangible; por otro, se trataba de fórmulas abstractas situadas en la base de todo. Por ejemplo, la *mónada*[26] (el número 1) era tanto un generador de todos los demás números —una entidad tan real como el agua, el aire y el fuego, que formaba parte de la estructura del mundo físico —, como una idea, la unidad metafísica como origen de toda la creación. El historiador de la filosofía inglés Thomas Stanley (1625-1678) describió con gran belleza (y en inglés del siglo XVII) los dos significados que los pitagóricos asociaban a los números:

> El número es de dos clases: la Intelectual (o inmaterial) y la Ciencial. La Intelectual es esa sustancia eterna de Número, que Pitágoras, en su *Discurso acerca de los Dioses*, afirmaba que era el *principio más providencial de los Cielos y de la Tierra, y la naturaleza que los hace uno…* Esto es lo que se denomina *el principio, la fuente, la raíz de todas las cosas* … El Número Ciencial es el que Pitágoras define como *la extensión y producción en acto de las razones seminales que se encuentran en la Mónada o en un grupo de Mónadas.*[27]

Así, los números no eran simples herramientas para denotar cantidades: los números debían ser descubiertos, y eran los agentes formativos que actuaban en la naturaleza. Todo el universo, desde los objetos materiales como la Tierra a los conceptos abstractos como la justicia, era número de extremo a extremo.

Que alguien quedase fascinado por los números[28] no es quizá sorprendente de por sí. Después de todo, incluso los números más simples, los que aparecen en la vida cotidiana, tienen propiedades interesantes. Por ejemplo, los días del año: 365. Es fácil comprobar que 365 es la suma de tres cuadrados consecutivos: $365 = 10^2 + ll^2 + 12^2$. Pero no acaba ahí: 365 es también igual a la suma de los dos cuadrados siguientes ($365 = 13^2 + 14^2$). O fijémonos en los días del mes lunar: 28. Este número es la suma de *todos* sus divisores (los números que pueden dividirlo sin dejar resto): $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Los números que cumplen esta propiedad en especial se denominan *números perfectos* (los cuatro primeros números perfectos son 6, 28, 496, 8.218). Observe que 28 es también la suma de los cubos de los dos primeros números impares: $28 = l^3 + 3^3$. Incluso un número tan vulgar como 100 posee sus propias peculiaridades: $100 = l^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

Muy bien, así que los números pueden ser fascinantes. De todos modos, uno se pregunta cuál puede ser el origen de la doctrina pitagórica de los números. ¿Cómo surgió la idea, no sólo de que los números estaban presentes en todas las cosas, sino de que todas las cosas *eran* números? Pitágoras no dejó nada escrito, o sus escritos fueron destruidos, así que no se trata de una pregunta de fácil respuesta. La impresión que ha sobrevivido sobre los razonamientos de Pitágoras se basa en unos pocos fragmentos preplató-nicos y en comentarios muy posteriores y de menor fiabilidad efectuados por filósofos platónicos y aristotélicos. La imagen que se obtiene al unir este mosaico de pistas sugiere que la obsesión de los pitagóricos por los números puede deberse a su preocupación por dos actividades aparentemente aisladas: los experimentos con música y la observación de los cielos.

Para comprender cómo se materializó esta misteriosa conexión entre los números, los cielos y la música, debemos empezar por la interesante observación de que los pitagóricos poseíanuna forma de *representarlos* números mediante guijarros o puntos, Por ejemplo, los números naturales 1, 2, 3, 4… los representaban con guijarros ordenados en forma triangular (como se muestra en la figura 1).

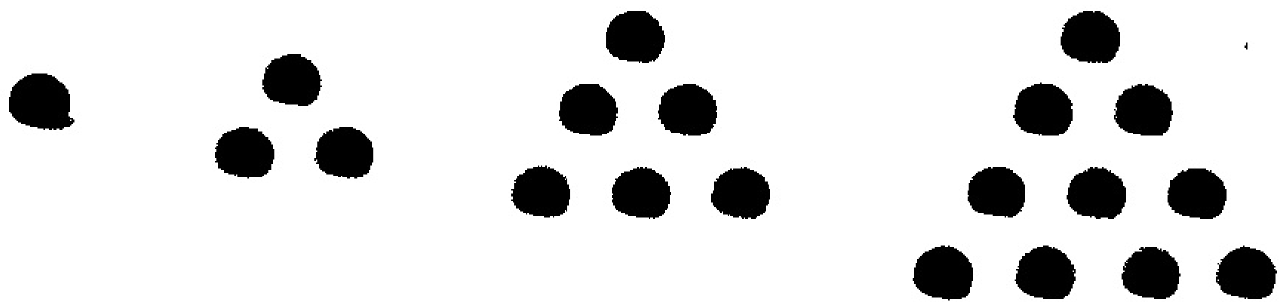


FIGURA 1

Concretamente, al triángulo que se forma con los cuatro primeros números enteros (un triángulo de diez guijarros) lo denominaron *tetraktys* (que significa «Cuaternario» o «con la cualidad de cuatro»), y para los pitagóricos simbolizaba la perfección y los elementos que la componen, según está documentado en una historia de Pitágoras escrita por el autor satírico griego Luciano (120-180 d.C.) Pitágoras pide a una persona que cuente.[29] Mientras lo hace, «1, 2, 3, 4», Pitágoras lo interrumpe: «¿Lo ves? Lo que para ti es 4 es en realidad 10, y nuestro juramento». El filósofo neoplató-nico Jámblico (ca. 250-325 d.C.) revela que el juramento pitagórico era, efectivamente:

> Juro por aquel que transmitió a nuestra alma la Tetraktys en la cual se encuentran la fuente y la raíz de la eterna Naturaleza.[30]

¿Por qué esa veneración por la Tetraktys? Porque, a los ojos de los pitagóricos del siglo VI a.C, parecía esbozar la naturaleza del universo entero. En geometría, la disciplina que impulsó la revolución del pensamiento en Grecia, el número uno representaba un punto [• punto], dos representaba una línea [•—• línea], tres representaba una superficie [^A^triángulo], y cuatro representaba una figura tetraédrica tridimensional [^/^tetraedro]. Así, el Tetraktys parecía englobar todas las dimensiones percibidas del espacio.

Pero eso no fue más que el principio. El Tetraktys aparecía de forma inesperada incluso en el enfoque científico de la música. Se suele atribuir a Pitágoras y los pitagóricos el descubrimiento de que, al dividir una cuerda según los enteros consecutivos se producen intervalos armónicos y consonantes, lo cual se puede ver en la interpretación de cualquier cuarteto de cuerda. Cuando se pulsan dos cuerdas similares al mismo tiempo,[31] el sonido resultante es agradable si la proporción entre las cuerdas es simple. Por ejemplo, las cuerdas de igual longitud (relación 1:1) producen el unísono; una relación 1:2 produce la octava; 2:3 genera la quinta perfecta; y 3:4, la cuarta perfecta. Así vemos que, además de los atributos espaciales que lo abarcan todo, el Tetraktys podía representar también las proporciones matemáticas subyacentes a la armonía de la escala musical. Para los pitagóricos, esta unión aparentemente mágica de espacio y música suponía un poderoso símbolo, y les ofrecía una sensación de *harmonía* («correspondencia exacta») del *Kosmos* («el bello orden de las cosas»).

¿Y cuál es el papel de los cielos en todo esto? Pitágoras y los pitagóricos desempeñaron en la historia de la astronomía un papel que, aún sin ser esencial, no era nada desdeñable. Fueron de los primeros en sostener que la forma de la Tierra era una esfera (probablemente a causa de su percepción de la esfera como superior desde un punto de vista estético y matemático). Probablemente fueron también los primeros en afirmar que los planetas, el Sol y la Luna se mueven por sí solos de forma independiente de oeste a este, en dirección opuesta a la rotación (aparente) diaria de la esfera de estrellas fijas. Estos entusiastas observadores del cielo nocturno no podían ignorar las propiedades más evidentes de las constelaciones: la forma y el número. Cada constelación se caracteriza por el *número de estrellas* que la componen y por la *figura geométrica* que estas estrellas forman. Pero estas dos características eran, precisamente, los ingredientes esenciales de la doctrina pitagórica de los números, como se manifiesta en la Tetraktys. Los pitagóricos quedaron tan cautivados por estas relaciones entre figuras geométricas, constelaciones y armonías musicales con los números, que éstos se convirtieron para ellos tanto en los ladrillos con los que estaba construido el universo como en los principios en los que se basaba su propia existencia. No es sorprendente que la categórica máxima de Pitágoras fuese: «El número es la esencia de *todas* las cosas». (La cursiva es mía.)

En dos de las observaciones de Aristóteles podemos hallar hasta qué punto los pitagóricos se tomaban en serio esta máxima. En su tratado *Metafísica* hallamos: «… los llamados Pitagóricos se dedicaron por de pronto a las matemáticas, e hicieron progresaresta ciencia. Embebidos en este estudio, creyeron que los principios de las matemáticas eran los principios de todos los seres». En otro pasaje, Aristóteles describe de forma muy gráfica la veneración a los números y el papel preponderante de la Tetraktys: «…conforme al orden inventado por Eurito [un discípulo del pitagórico Filolao], cada número es la causa de alguna cosa, éste, por ejemplo, del hombre, aquél del caballo, porque se puede, *siguiendo el mismo procedimiento que los que reducen los números a figuras, al triángulo, al cuadrilátero,* representar las formas de las plantas por las operaciones del cálculo». La frase «los que reducen los números a figuras, al triángulo, al cuadrilátero» alude tanto a la Tetraktys como a otro fascinante constructo pitagórico: el *gnomon.*

La palabra *gnomon* («indicador»)[32] surge del nombre de un dispositivo astronómico similar a un reloj de sol, utilizado en Babilonia para medir el tiempo. Este aparato lo introdujo en Grecia el maestro de Pitágoras, el filósofo natural Anaximandro (ca. 611-547 a.C.). No hay duda de que el tutor había transmitido al discípulo sus ideas acerca de la geometría y su aplicación a la cosmología, el estudio del universo en su conjunto. Más adelante, el término *gnomon* se utilizó para denominar un instrumento para dibujar ángulos rectos, similar a una escuadra de carpintero, o para la figura en ángulo recto que, sumada a un cuadrado, forma un cuadrado mayor (figura 2).

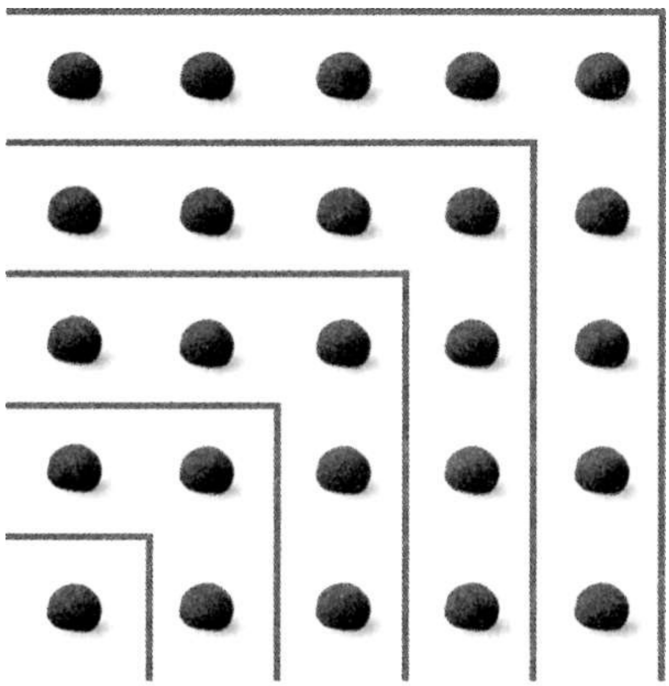


FIGURA 2

Obsérvese que, al añadir siete guijarros dispuestos en forma de ángulo recto (un *gnomon)* a un triángulo de 3 x 3 se obtiene un cuadrado compuesto por dieciséis (4 x 4) guijarros. Se trata de la representación figurativa de la propiedad siguiente: en la secuencia de números enteros impares 1, 3, 5, 7, 9…, la suma de cualquier cantidad de números sucesivos (empezando por el 1) da siempre como resultado un número cuadrado. Por ejemplo: $1 = l^2$; $1 + 3 = 4 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$, etc. Para los pitagóricos, esta relación íntima entre el *gnomon* y el cuadrado al que «abraza» constituía un símbolo del saber, en donde el *cognosciente* «abraza» lo *conocido.* Los números no se limitaban, pues, a ser una descripción del mundo físico, sino que se suponía que eran asimismo la raíz de los procesos mentales y emocionales.

El número cuadrado asociado con los *gnomons* podría haber sido también el precursor del famoso *Teorema de Pitágoras.* Esta célebre afirmación matemática establece que, en cualquier triángulo rectángulo (figura 3).

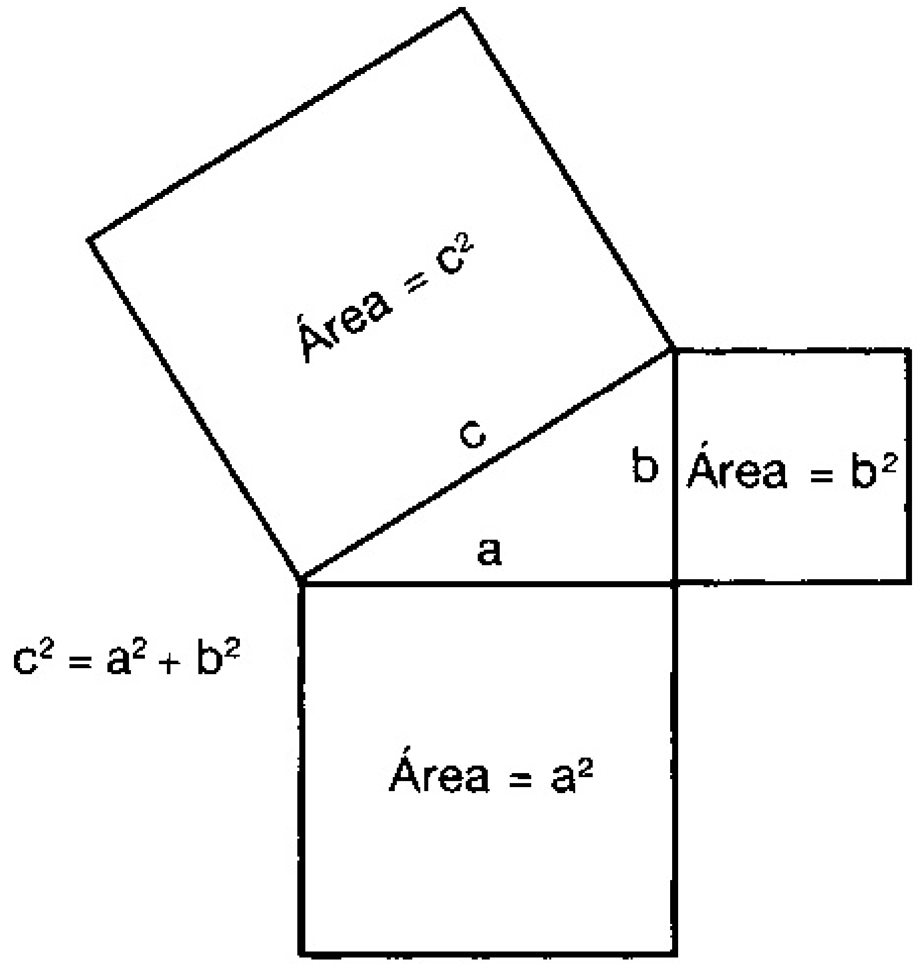


FIGURA 3

El área de un cuadrado formado a partir de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados formados a partir de los otros dos lados. El descubrimiento de este teorema está «documentado» de forma humorística en una conocida tira cómica de «Frank y Ernest» (figura 4).

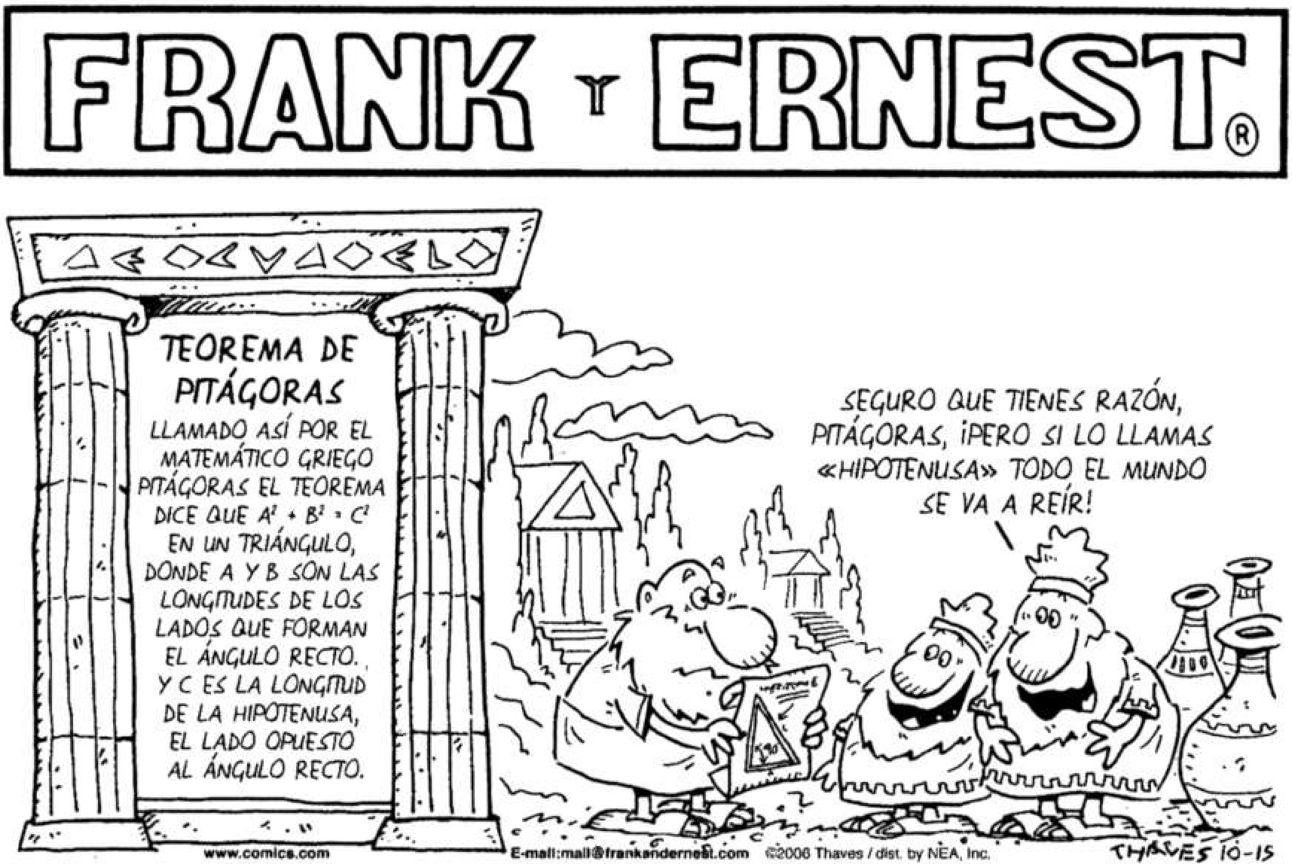


FIGURA 4

Como se muestra en el *gnomon* de la figura 2, al agregar un número de *gnomon* cuadrado ($9 = 3^2$) a un cuadrado de 4 x 4 se forma, efectivamente, un nuevo cuadrado de 5 x 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Los números 3, 4, 5 pueden entonces representar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Los números enteros que tienen esta propiedad (por ejemplo, 5, 12 y 13, ya que $5^2 + 12^2 = 13^2$)se denominan «tripletes pitagóricos».

Son muy escasos los teoremas matemáticos que disfrutan de un «reconocimiento por nombre» similar al del teorema de Pitágoras. En 1971, cuando la República de Nicaragua seleccionó las «diez ecuaciones matemáticas que alteraron la faz de la tierra» como tema para una serie de sellos, el teorema de Pitágoras aparecía en el segundo sello (figura 5; en el primer sello se mostraba «1+1 = 2»).

FIGURA 5

¿Fue realmente Pitágoras la primera persona en formular el conocido teorema que se le atribuye? Algunos de los primeros historiadores de Grecia así lo pensaban sin duda. En un comentario a los *Elementos,* el voluminoso tratado de geometría y teoría de números que escribió Euclides (ca. 325-265 a.C), el filósofo griego Proclo (411-485 d.C.) escribió: «Si escuchamos a los que relatan la historia antigua, hallaremos algunos que atribuyen este teorema a Pitágoras, y dicen que sacrificó un buey en honor a su descubrimiento».[33] Sin embargo, los tripletes pitagóricos pueden hallarse ya ni la tableta cuneiforme babilónica denominada «Plimton 322», que se remonta aproximadamente a los tiempos de la dinastía de Hammurabi (ca. 1900-1600 a.C.) Es más, en India se hallaron construcciones geométricas basadas en el teorema de Pitágoras relacionadas con la elaboración de altares. No hay duda de que estas construcciones eran conocidas[34] para el autor del *Satapatha Brah-mana* (el comentario sobre las antiguas escrituras hindúes), que fue probablemente escrito varios siglos antes de Pitágoras. Sin embargo, sea o no Pitágoras el creador del teorema, no hay duda de que las repetidas conexiones halladas que tejían entre sí los números, las formas y el propio universo acercaron a los pitagóricos un paso más a una detallada metafísica del orden.

Otra de las ideas capitales en el mundo pitagórico era la de los *opuestos cósmicos.*

Los opuestos constituían el principio en el que se basaba la antigua tradición jónica, de modo que fue algo natural su adopción por parte de los pitagóricos y su obsesión por el orden. De hecho, Aristóteles habla de un médico llamado Alc-meon, que vivió en Crotona en la misma época en que los pitagóricos tenían allí su famosa «escuela», que suscribía la idea de que todo está equilibrado «por parejas». La principal pareja de opuestos consistía en el *límite*, representado por los números impares, y lo *ilimitado*, representado por los pares. El límite era la fuerza que introducía orden y armonía en el desenfreno de lo «ilimitado». La noción era que tanto la complejidad del universo en su conjunto como la intrincada vida humana, en el nivel microcósmico, estaban formadas y reguladas por una serie de opuestos que, en cierto modo, «se correspondían» entre sí. Esta visión bastante bicolor del mundo se resumía en una «Tabla de opuestos», que se conservó en la *Metafísica* de Aristóteles:

Límite	Ilimitado
Par	Impar
Unidad	Pluralidad
Derecha	Izquierda
Masculino	Femenino
Reposo	Movimiento
Recto	Curvo
Luz	Oscuridad
Bueno	Malo
Cuadrado	Oblongo

La filosofía básica que expresa esta tabla de opuestos[35] no se limitaba a la antigua Grecia. El *yin* y el *yang* chinos, en donde el *yin* representa negatividad y oscuridad y el *yang* representa el principio de la luz, ofrecen la misma imagen. Sentimientos parecidos a éstos pasaron a la cristiandad, mediante los conceptos de cielo e infierno (e incluso a declaraciones del presidente de Estados Unidos: «Estás con nosotros o con los terroristas»). De un modo más general, el sentido de la vida siempre ha estado iluminado por la muerte, y la sabiduría sólo es sabiduría en comparación con la ignorancia.

No todas las enseñanzas de los pitagóricos tenían una relación directa con los números. El modo de vida de la cohesionada sociedad pitagórica se basaba en el vegetarianismo, una sólida creencia en la metempsicosis (la inmortalidad y la transmigración de las almas) y una misteriosa prohibición de comer alubias, para la que se han sugerido diversas explicaciones, desde la similitud entre las alubias y los genitales a la comparación entre comer alubias y comerse un alma humana. Esta última interpretación considera que la expulsión de una ventosidad (que suele ser una consecuencia de la ingestión de alubias) es la prueba de la extinción de un hálito. Por eso, en el libro *Philosophy forDummies*[36] se resume la doctrina pitagórica con la frase «Todo está hecho de números, y no comas judías o serás el protagonista de un "número"».

La historia más antigua que se conoce acerca de Pitágoras tiene que ver con la reencarnación del alma en otros seres.[37] Este relato cuasipoético se debe al poeta del siglo VI a.C. Jenófanes de Colofón: «Cuéntase que [Pitágoras] pasaba junto a un perro al que estaban golpeando y, apiadándose del animal, habló de este modo: "Deteneos, no lo golpeéis más, pues su alma es la de un amigo; lo sé porque lo he oído hablar"».

Las inconfundibles huellas de Pitágoras se hacen patentes no sólo en las enseñanzas de los filósofos griegos que le sucedieron, sino que se extienden a los programas de las universidades medievales. Las siete asignaturas que se enseñaban en estas universidades se dividían en el *trivium*, que incluía dialéctica, gramática y retórica, y el *quadrivium*, con los temas favoritos de los pitagóricos: geometría, aritmética, astronomía y música. La celestial «armonía de las esferas» —la música supuestamente interpretada por los planetas en sus órbitas que, según sus discípulos, sólo Pitágoras era capaz de oír— ha servido de inspiración tanto a poetas como a científicos. El famoso astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), que descubrió las leyes del movimiento planetario, eligió para una de sus obras esenciales el título *Harmonice Mundi* En el espíritu pitagórico, Kepler creó incluso pequeñas composiciones musicales para los distintos planetas.

Desde la perspectiva de las cuestiones en las que se centra este libro,[38] después de despojar a la filosofía pitagórica de sus ropajes místicos, el esqueleto que queda sigue siendo un potente testimonio acerca de la matemática, su naturaleza y su relación tanto con el mundo físico como con la mente humana. Pitágoras y los pitagóricos fueron los precursores de la búsqueda del orden cósmico. Se les puede considerar los padres de la matemática pura ya que, a diferencia de sus predecesores, los babilonios y los egipcios, se dedicaron a la matemática en abstracto, fuera de cualquier finalidad práctica. La cuestión de si los pitagóricos dejaron también establecida la función de la matemática como herramienta de la ciencia es más peliaguda. Aunque es cierto que los pitagóricos asociaron todos los fenómenos con números, su objeto de estudio eran los números en sí, no los fenómenos ni sus causas. Este no era un enfoque especialmente fructífero desde el punto de vista de la investigación científica. Sin embargo, en la doctrina pitagórica era fundamental la creencia implícita de la existencia de leyes generales en la naturaleza. Esta creencia, que se ha convertido en la columna vertebral de la ciencia moderna, podría tener sus orígenes en el concepto de *Destino* de la tragedia griega. Hasta el Renacimiento, esta osada fe en la realidad de un conjunto de leyes capaces de explicar todos los fenómenos iba mucho más allá de las pruebas concretas, y únicamente Galileo, Descartes y Newton la convirtieron en una afirmación defendible desde una perspectiva inductiva.

Otra de las contribuciones esenciales que se atribuye a los pitagóricos fue el descubrimiento aleccionador de que su propia «religión numérica» era, lamentablemente, del todo inviable. Los números enteros 1, 2, 3…, no bastan ni siquiera para construir la matemática, y mucho menos para una descripción del universo. Examinemos el cuadrado de la figura 6, en el que la longitud del lado es una unidad, y llamemos *d* a la longitud de la diagonal.

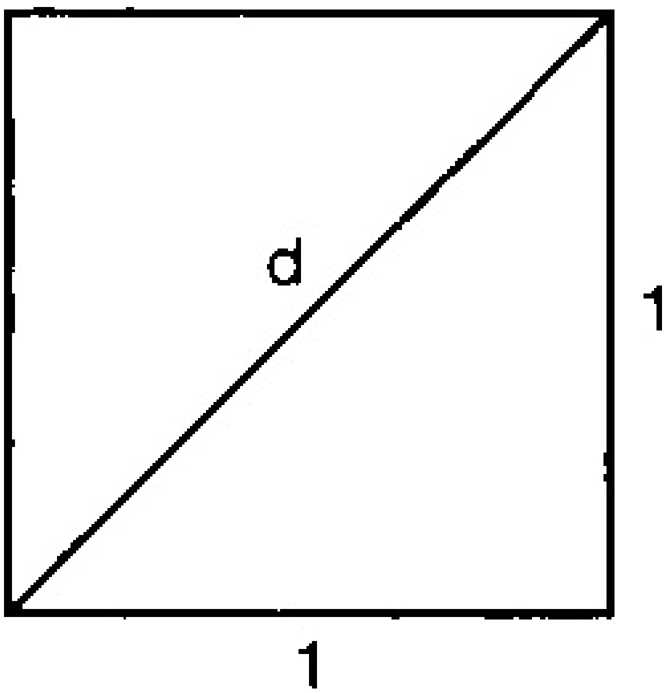


FIGURA 6

Es fácil hallar esta longitud si utilizamos el teorema de Pitágoras en cualquiera de los dos triángulos en los que está dividido el cuadrado. Según el teorema, el cuadrado de la diagonal (la hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos (los catetos): $d22^2 = l^2 + l^2$, es decir, $d^2 = 2$. Si se conoce el cuadrado de un número positivo, se puede hallar el número extrayendo la raíz cuadrada (es decir, si $x^2 = 9$, entonces $x. = \sqrt{9} = 3$). Por tanto, $d^2 = 2$ implica $d = \sqrt{2}$ unidades. De modo que la relación entre la longitud de la diagonal y la del lado del cuadrado es el número $\sqrt{2}$. Pero ahora viene la verdadera sorpresa, el descubrimiento que derrumbó la meticulosa construcción filosófica de números enteros de los pitagóricos. Uno de ellos (posiblemente Hipaso de Metaponto, que vivió en la primera mitad del siglo v a.C.) fue capaz de *demostrar* que la raíz cuadrada de dos no se puede expresar como relación de *ninguna pareja* de números enteros.[39] En otras palabras, aunque existe una infinidad de números enteros entre los que elegir, la búsqueda de dos de ellos cuya relación mutua sea √2 está condenada al fracaso. Los números que *sí pueden* expresarse como razón de dos números enteros (por ejemplo, 3/17, 2/5, 1/10, 6/1) se denominan *números racionales.* Los pitagóricos probaron que √2 no es un número racional. De hecho, poco después del descubrimiento original, se descubrió que tampoco lo eran √3, √17 o la raíz cuadrada de ningún número que no fuese un cuadrado perfecto (como 16 o 25). Las consecuencias fueron espectaculares: los pitagóricos mostraron que era necesario agregar a la infinidad de los números racionales una infinidad de números de un nuevo tipo, que hoy denominamos *números irracionales.* La importancia de este descubrimiento para el desarrollo subsiguiente del análisis matemático es fundamental. Entre otras cosas, fue el primer paso hacia el reconocimiento de la existencia de infinitos «contables» e «incontables» en el siglo XIX.[40] No obstante, los pitagóricos quedaron abrumados por esta crisis filosófica, hasta el punto de que el filósofo Jámblico declaró[41] que el hombre que descubrió los números irracionales y reveló su naturaleza a «aquellos indignos de compartir la teoría» fue «tan odiado que no sólo fue expulsado de la comunidad y modo de vida [de los pitagóricos], sino que incluso se construyó una tumba para él, como si su antiguo compañero hubiese abandonado la vida de los hombres».

Quizá aún más importante que el descubrimiento de los números irracionales fuese la pionera insistencia de los pitagóricos en la *demostración matemática,* un procedimiento basado por completo en el razonamiento lógico mediante el cual, a partir de algunos postulados iniciales, se podía establecer sin ambigüedad la validez de cualquier proposición matemática. Antes de los griegos, ni siquiera los matemáticos esperaban que nadie tuviese interés alguno en los conflictos mentales que les habían llevado a tal o cual descubrimiento. Era prueba suficiente que una receta matemática funcionase en la práctica (por ejemplo, en la división de parcelas de tierra). Por el contrario, los griegos querían explicar por qué funcionaba. Aunque puede que el concepto de demostración fuese introducido por el filósofo Tales de Mileto (ca. 625-547 a.C), fueron los pitagóricos los que convirtieron esta práctica en una refinada herramienta para la determinación de verdades matemáticas. La trascendencia de este avance en lógica fue capital. Las demostraciones de los postulados colocaron a la matemática sobre unos cimientos mucho más sólidos que los de cualquier otra de las disciplinas que ocupaban a los filósofos de la época. Una vez presentada una prueba rigurosa, basada en razonamientos paso a paso que no permiten dejar lagunas, la validez de la declaración matemática asociada era, básicamente, incuestionable. Incluso Arthur Conan Doyle, el creador del detective más famoso del mundo, reconoció la categoría especial de la demostración matemática. En *Estudio en escarlata,* Sherlock Holmes declara que sus conclusiones son «tan ciertas como las proposiciones de Euclides».

Sobre la cuestión de si la matemática era descubierta o inventada, Pitágoras y los pitagóricos no tenían ninguna duda: la matemática era real, inmutable, omnipresente y más sublime que cualquier noción que fuese el posible producto de la frágil mente humana. Para los pitagóricos, el universo estaba literalmente incrustado en la matemática. De hecho, desde su punto de vista, Dios no era un matemático:[42] *¡la matemática era Dios!*

La importancia de la filosofía pitagórica no reside en su valor intrínseco. Al establecer el escenario (y, en cierto modo, el orden de prioridades) de la próxima generación de filósofos, especialmente Platón, los pitagóricos establecieron una posición dominante en el pensamiento occidental.

En la caverna de Platón

El famoso matemático y filósofo británico Alfred North Whitehead (1861-1947) declaró en cierta ocasión: «La generalización menos arriesgada que puede hacerse acerca de la historia de la filosofía occidental es que no se trata más que de una serie de notas a pie de página a Platón».[43]

No cabe duda que Platón (ca. 423-347 a.C.) fue el primero en unir temas como la matemática, la ciencia, el lenguaje, la religión, la ética o el arte, y en tratarlos de un modo unificado, definiendo así la filosofía como disciplina. Para Platón, la filosofía no era un asunto abstracto, separado de las actividades cotidianas, sino la principal pauta que las personas debían seguir para vivir sus vidas, reconocer la verdad e incluso hacer política. En concreto, Platón sostenía que la filosofía puede permitirnos acceder a un reino de verdades que van más allá de lo que nuestros sentidos pueden percibir directamente o incluso de lo que podemos deducir mediante el simple sentido común. ¿Quién era este incansable buscador del conocimiento puro, del bien absoluto y de las verdades eternas?[44]

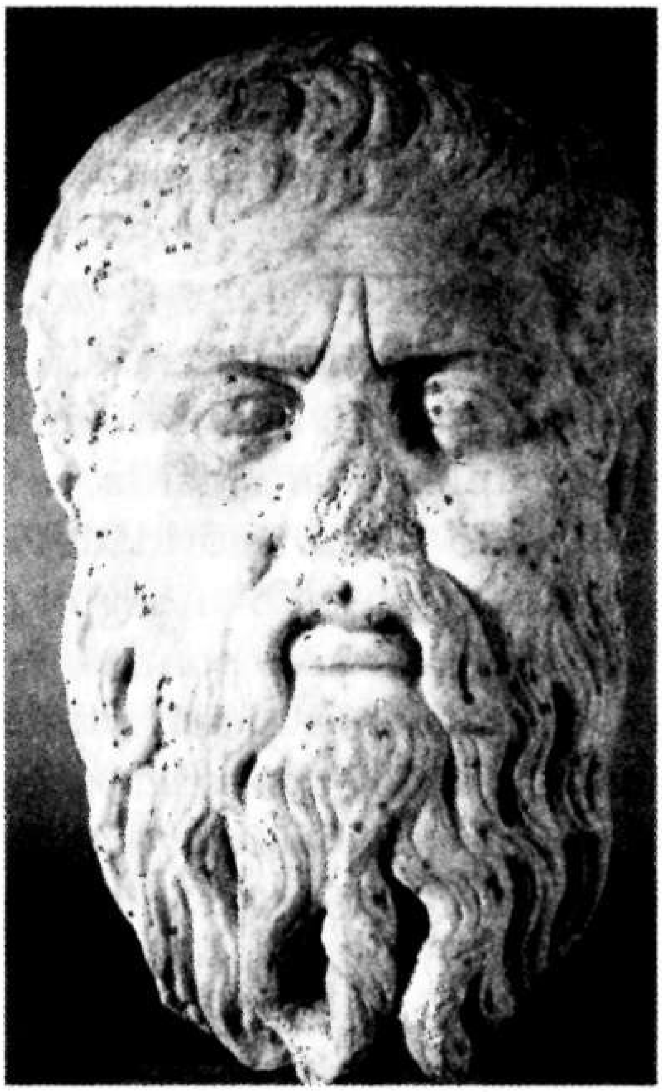


FIGURA 7

Platón, hijo de Aristón y Perictione, nació en Atenas o en Egina. La figura 7 muestra un busto romano de Platón, probablemente copiado de un original griego más antiguo, del siglo IV a.C. Su familia, tanto paterna como materna, estaba cuajada de figuras distinguidas, como Solón, el célebre legislador, y Codro, el último rey de Atenas. El tío de Platón, Cármides, y el primo de su madre, Critias, eran viejos amigos del famoso filósofo Sócrates (ca. 470-399 a.C), una relación que definiría en gran medida las influencias formativas sobre la mente del joven Platón. Al principio, Platón intentó meterse en política, pero diversas acciones violentas protagonizadas por la facción que pretendía reclutarlo le convencieron de lo contrario. Más adelante, esta repulsión inicial por la política podría haber animado a Platón a definir lo que consideraba como la educación esencial de los futuros guardianes del estado. Incluso intentó (infructuosamente) ser tutor del gobernador de Siracusa, Dionisio II.

Tras la ejecución de Sócrates en 399 a.C, Platón emprendió un largo período de viajes, que concluyó con la fundación de su célebre «escuela» de filosofía y ciencia

—la *Academia*— alrededor de 387 a.C. Platón fue director (o *escolarca)* de la Academia hasta su muerte, y su sucesor fue su sobrino Espeusipo. A diferencia de las actuales instituciones académicas, la Academia era una reunión bastante informal de intelectuales que, con Platón como guía, se dedicaban a intereses muy diversos. No había tarifas de matrícula, ni planes de estudios programados, ni siquiera verdaderos profesores. En cambio, había un «requisito de entrada» bastante peculiar. Según un discurso de Juliano el Apóstata —emperador del siglo IV d.C.—, una onerosa inscripción pendía en la puerta de la Academia de Platón. Aunque el texto de la inscripción no aparece en la alocución, sí puede hallarse en una nota al margen del mismo siglo IV.[45] La inscripción decía: «Nadie entre aquí sin saber geometría». Puesto que habían pasado casi ocho siglos entre el establecimiento de la Academia y la primera descripción de la inscripción, no podemos saber con total seguridad si existió realmente. Sin embargo, no hay duda de que el sentimiento expresado en este exigente requisito reflejaba la opinión personal de Platón. En uno de sus famosos diálogos *(Gorgias)* escribe: «La igualdad geométrica tiene mucho poder entre los dioses y los hombres».

Los «estudiantes» de la Academia solían ser económicamente independientes, y algunos de ellos (el gran Aristóteles, sin ir más lejos) permanecieron en ella hasta veinte años. Platón consideraba que el contacto prolongado entre mentes creativas era el mejor vehículo para la producción de ideas nuevas en todos los temas, desde metafísica abstracta y matemática hasta ética y política. La pureza y los atributos cuasidivinos de los discípulos de Platón fueron captados con gran belleza en una pintura titulada *La Academia de Platón* del pintor simbolista belga Jean Delville (1867-1953). Para hacer hincapié en las cualidades espirituales de los estudiantes, Delville los pintó desnudos y con aspecto andrógino, como se suponía que era el estado de los humanos primigenios.

Me llevé una gran decepción cuando supe que los arqueólogos no han podido hallar nunca los restos de la Academia de Platón.[46] En un viaje a Grecia en el verano de 2007, busqué lo que más se le acercaba. Platón menciona la Estoa de Zeus (una pasarela cubierta construida en el siglo v a.C.) como su lugar favorito para conversar con sus amigos. Encontré las ruinas de esta estoa en la parte noroeste de la antigua Agora (el centro cívico en tiempos de Platón; véase figura 8), en Atenas.

FIGURA 8

Aunque la temperatura llegó ese día a los 46 °C, debo decir que noté una especie de escalofrío al recorrer el mismo camino que aquel gran hombre había recorrido cientos, si no miles, de veces.

La legendaria inscripción de la puerta de la Academia habla por sí sola de la actitud de Platón hacia la matemática. De hecho, la práctica totalidad de la investigación matemática de relieve efectuada en el siglo IV a.C. la llevaron a cabo personas relacionadas de algún modo con la Academia. Sin embargo, el propio Platón no era un matemático especialmente diestro técnicamente, y sus contribuciones directas a los conocimientos en este campo probablemente fueron mínimas. El era más bien un espectador entusiasta, una fuente de desafío y motivación, un crítico inteligente y un guía ejemplar. El filósofo e historiador del siglo I a.C. Filodemo lo expresa con claridad:[47] «En aquel tiempo se produjo un gran progreso en la matemática, con Platón como arquitecto general planteando problemas, y los matemáticos investigándolos con ahínco». El filósofo y matemático neoplatónico Proclo (411-485 d.C) agrega:[48] «Platón … hizo avanzar grandemente la matemática y la geometría en particular a causa de su fervor por estos estudios. Es bien sabido que sus escritos están generosamente salpicados de términos matemáticos y que en todo lugar trata de despertar la admiración por la matemática entre los estudiantes de filosofía». En otras palabras, Platón, cuyos conocimientos matemáticos estaban al día en un sentido amplio, podía conversar con los matemáticos de igual a igual y plantearles problemas, a pesar de que sus propios logros en ese terreno no fueran significativos.

Otra llamativa demostración del reconocimiento de Platón hacia la matemática la podemos encontrar en la que quizá sea su obra más lograda, *La República*, una alucinante combinación de estética, ética, metafísica y política. En el Libro VII de *La República*, Platón (a través de Sócrates como protagonista principal) esboza un ambicioso plan de educación pensado para formar gobernantes de un estado utópico. Este riguroso, aunque idealizado, programa preveía una formación temprana durante la infancia impartida mediante juegos, viajes y gimnasia. Después de seleccionar a los más prometedores, el programa proseguía con nada menos que diez años de matemáticas, cinco de dialéctica y quince de experiencia práctica, que incluía ejercer mandos en guerra y otros cargos «adecuados a la juventud». Platón explicaba con diáfana claridad por qué creía que ésta era la formación necesaria para los futuros políticos:

> Es preciso, pues, que los amantes del poder no se dirijan a éste, ya que si lo hacen les combatirán otros rivales en amores. —¿A qué otros obligarías, pues, a ocuparse de la guarda de la polis si no es a quienes, además de ser los más conocedores de aquello por lo que la polis se rige mejor, tienen otros valores y una vida mejor que la del político?[49]

Reconfortante, ¿verdad? De hecho, un programa tan exigente posiblemente fuese impracticable, incluso en los tiempos de Platón. George Washington estaba de acuerdo en que una educación en matemática y filosofía posiblemente fuese positiva para los futuros políticos:

> La ciencia de las cifras es, hasta cierto punto, no sólo un requisito indispensable en todos los aspectos de la vida civilizada, sino que la investigación de las verdades matemáticas habitúa la mente al razonamiento correcto y metódico, y es un uso particularmente digno del ser racional. En un estado turbio de la existencia, en donde tantas cosas parecen precarias al desconcertado investigador, las facultades de la razón hallan aquí un cimiento sobre el que apoyarse. Desde el terreno elevado de la demostración matemática y filosófica podemos cruzar de forma inconsciente a especulaciones más nobles y meditaciones más sublimes.[50]

En cuanto a la cuestión de la *naturaleza* de la matemática, más importante que el Platón matemático o el inspirador de la matemática lo fue el Platón filósofo de la matemática. En ese campo, sus ideas pioneras no sólo lo colocaban por encima de todos los matemáticos y filósofos de su generación, sino que lo identificaban como una figura de gran influencia durante todo el milenio siguiente.

La visión platónica de la verdadera naturaleza de la matemática está estrechamente relacionada con su famoso *Mito de la caverna.* En él, Platón hace hincapié en la dudosa validez de la información captada a través de los sentidos humanos. Lo que percibimos como mundo real no es, según él, más real que las sombras proyectadas en las paredes de una caverna.[51] Este es el notable pasaje de *La República:*

> Represéntate hombres en una morada subterránea en forma de caverna, que tiene la entrada abierta, en toda su extensión, a la luz. En ella están desde niños con las piernas y el cuello encadenados, de modo que deben permanecer allí y mirar sólo delante de ellos, porque las cadenas les impiden girar en derredor la cabeza. Más arriba y más lejos se halla la luz de un fuego que brilla detrás de ellos; y entre el fuego y los prisioneros hay un camino más alto, junto al cual imagínate un tabique construido de lado a lado, como el biombo que los titiriteros levantan delante del público para mostrar, por encima del biombo, los muñecos … Imagínate ahora que, del otro lado del tabique, pasan sombras que llevan toda clase de utensilios y figurillas de hombres y otros animales, hechos en piedra y madera y de diversas clases … ¿Crees que han visto de sí mismos, o unos de los otros, otra cosa que las sombras proyectadas por el fuego en la parte de la caverna que tienen frente a sí?

Según Platón, nosotros, los humanos en general, no somos distintos de esos prisioneros de la caverna, que confunden las sombras con la realidad (en la figura 9 se muestra un grabado de 1604 de Jan Saenredam en el que se ilustra la alegoría).

FIGURA 9

En concreto, Platón destaca que las verdades matemáticas no hacen referencia a los círculos, triángulos o cuadrados que uno puede dibujar en un trozo de papiro o trazar con un palo en la arena, sino a objetos abstractos ubicados en un mundo ideal en el que residen las formas verdaderas y la perfección. Este *mundo platónico de las formas matemáticas* es distinto del mundo físico, y en él es donde las proposiciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, son verdaderas. El triángulo rectángulo que podemos dibujar en un papel no es más que una copia imperfecta —una aproximación— del verdadero, y abstracto, triángulo.

Otra de las cuestiones fundamentales examinadas por Platón con cierto detalle tiene relación con la naturaleza de la demostración matemática, como proceso basado en *postulados* y *axiomas.* Los axiomas son aserciones básicas cuya validez se supone evidente por sí misma. Por ejemplo, el primer axioma de la geometría de Euclides es: «Entre dos puntos cualesquiera se puede trazar una línea recta». En *La República,* Platón combina de forma maravillosa el concepto de postulado con su idea del mundo de las formas matemáticas:

> Creo que sabes que quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares dan por supuestos los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que les llevan finalmente a aquello cuya investigación se proponían.
>
> ¿Y no sabes también que se sirven de figuras visibles acerca de las cuales discurren, pero no pensando en ellas mismas, sino en aquello a que ellas se parecen, discurriendo, por ejemplo, acerca del cuadrado en sí y de su diagonal, pero no acerca del que ellos dibujan, e igualmente en los demás casos; y que así, las cosas modeladas y trazadas por ellos, de que son imágenes las sombras y reflejos producidos en el agua, las emplean, de modo que sean a su vez imágenes, en su deseo de ver aquellas cosas en sí *que no pueden ser vistas de otra manera sino por medio del pensamiento ?* (La cursiva es mía.)

La visión de Platón constituye la base de lo que se ha dado en denominar, en filosofía en general, y en los debates sobre la naturaleza de la matemática en particular, *platonismo.*[52] En su sentido más amplio, el platonismo defiende una creencia en una especie de realidades eternas e inmutables totalmente independientes del efímero mundo que perciben nuestros sentidos. Según esta doctrina, la existencia real de los objetos matemáticos es un hecho objetivo, del mismo modo que la existencia del universo en sí. No sólo existen los números naturales, los círculos y los cuadrados, sino también los números imaginarios, las funciones, los fractales, las geometrías no euclidianas y los conjuntos infinitos, así como una amplia variedad de teoremas acerca de tales entidades. En resumen, todos los conceptos matemáticos o afirmación «objetivamente cierta» (esto se definirá más adelante) nunca formulada o imaginada, y una infinidad de conceptos y afirmaciones aún no descubiertas, son entidades absolutas o *universales* que no se pueden crear ni destruir, sino que existen independientemente de que sepamos de dicha existencia. Ni que decir tiene que tales objetos no son físicos, sino que viven en un mundo autónomo de esencias fuera del tiempo. Para el platonismo, los matemáticos son exploradores de tierras extrañas, que sólo pueden *descubrir* las verdades matemáticas, nunca inventarlas. De igual modo que América ya estaba allí mucho antes de que Colón (o Leif Erickson) la descubriese, los teoremas matemáticos existían en el mundo platónico mucho antes de que los babilonios iniciasen sus estudios en matemática. Para Platón, las únicas cosas que existían de un modo real y completo eran las formas y las ideas de la matemática, porque, según sostenía, sólo en la matemática se puede obtener un conocimiento absolutamente cierto y objetivo. Así, en la mente de Platón, la matemática estaba íntimamente asociada con lo *divino.*[53]En el diálogo *Timeo,* el dios creador utiliza la matemática para modelar el mundo, y en *La República,* los conocimientos matemáticos se consideran una etapa crucial en el camino del conocimiento de las formas divinas. Platón no utiliza la matemática en la formulación de leyes de la naturaleza comprobable mediante experimentos. Para él, el carácter matemático del mundo es simplemente la consecuencia de que «Dios siempre hace geometría».

Platón hizo extensivas sus ideas sobre las «formas verdaderas» a otras disciplinas, en particular a la astronomía. Su razonamiento era que la verdadera astronomía «debe dejar los cielos en paz» y no intentar dar explicaciones sobre la disposición y los movimientos aparentes de las estrellas visibles. Platón opinaba más bien que la verdadera astronomía era la ciencia que trataba de las leyes del movimiento en un mundo matemático ideal, del que el cielo observable no era más que una simple ilustración (del mismo modo que las figuras geométricas dibujadas en un papiro no son más que ilustraciones de las verdaderas figuras).[54]

Las sugerencias de Platón acerca de la investigación en astronomía causaron controversia incluso entre algunos de los más acérrimos platónicos. Los defensores de sus ideas aducen que lo que Platón quería decir realmente no era que la verdadera astronomía debía preocuparse de un cielo ideal sin ninguna relación con el observable, sino que debía ocuparse de los movimientos *reales* de los cuerpos celestes, a diferencia de los *aparentes* tal como se veían desde la Tierra. Otros señalan, en cambio, que una interpretación demasiado literal de las afirmaciones de Platón habría supuesto un obstáculo grave para el desarrollo de la astronomía observacio-nal como ciencia. Sea cual sea la interpretación de la actitud de Platón hacia la astronomía, el platonismo se ha convertido en uno de los dogmas más destacados al hablar de los fundamentos de la matemática.

Pero ¿existe realmente este mundo de la matemática platónico? Y, caso de existir, ¿exactamente dónde se encuentra? ¿Y qué son esas afirmaciones «objetivamente ciertas» que lo habitan? ¿O acaso los matemáticos adeptos al platonismo están simplemente expresando el mismo tipo de creencia romántica atribuida al gran artista del Renacimiento Miguel Ángel? Según cuenta la leyenda, Miguel Ángel creía que sus magníficas esculturas ya existían dentro de los bloques de mármol, y que su papel consistía únicamente en revelarlas.

Los platónicos modernos (no hay duda de que existen, y hablaré de sus puntos de vista con más detalle en capítulos posteriores) sostienen con insistencia que el mundo platónico de las formas matemáticas es real, y ofrecen lo que para ellos son ejemplos concretos de afirmaciones objetivamente ciertas que residen en ese mundo.

Tomemos la siguiente proposición sencilla: todos los enteros mayores que dos se pueden escribir en forma de suma de dos primos (números divisibles únicamente por sí mismos o por la unidad). Esta afirmación de aspecto simple se conoce como *conjetura de Goldbach,* debido a que una conjetura equivalente a ésta aparecía en una carta del matemático aficionado prusiano Christian Goldbach (1698-1764) el 7 de junio de 1742. Es fácil verificar la validez de la conjetura para los primeros números pares: 4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7 (o 5 + 5); 12 = 5 + 7; 14 = 3 + 11 (o 7 + 7);16 = 5 + 11 (o 3 + 13); etc. La afirmación es tan simple que el matemático británico G. H. Hardy declaró que «cualquier bobo podría haberlo adivinado». De hecho, el gran matemático y filósofo francés René Descartes se había adelantado a Goldbach en esta conjetura. Sin embargo, *demostrarla* conjetura se reveló como algo completamente distinto. En 1906, el matemático chino Chen Jing-run dio un paso significativo hacia una demostración, ya que logró demostrar que cualquier número entero par lo suficientemente grande es la suma de dos números; uno de ellos es primo y el otro tiene un máximo de dos factores primos. A finales de 2005, el investigador portugués Tomás Oliveira e Silva probó que la conjetura era cierta para los números hasta 3 x 10^{17} (trescientos mil billones). Y sin embargo, a pesar de los colosales esfuerzos de muchos matemáticos de talento, en el momento de escribir estas líneas la demostración *general* sigue eludiéndonos. Ni siquiera la tentación adicional del premio de 1.000.000 de dólares que se ofreció entre el 20 de marzo de 2000 y el 20 de marzo de 2002 (para dar publicidad a la novela titulada *El tío Petros y la conjetura de Goldbach)* produjo el resultado deseado.[55] Pero aquí entra el *quid* de la cuestión: el significado de «verdad objetiva» en matemática. Supongamos que en 2016 se formula una demostración rigurosa. ¿Podríamos decir entonces que la afirmación ya era cierta la primera vez que Descartes pensó en ella? La mayoría de las personas estarían de acuerdo en calificar de tontería una pregunta así. Por supuesto que, si se ha demostrado que la proposición es cierta, es que *siempre* lo ha sido, incluso antes de que lo supiésemos. Podemos también echar una vistazo a otro ejemplo de aspecto inocente llamado la *conjetura de Catalán.*[56] Los números 8 y 9 son enteros consecutivos, y cada uno de ellos es igual a una potencia pura, esto es, 8 = 2^3 y 9 = 3^2. En 1844, el matemático belga Eugene Charles Catalán (1814-1894) conjeturó que, entre *todas* las posibles potencias de números enteros, la *única* pareja de números consecutivos (excluidos el 0 y el 1) era 8 y 9. En otras palabras, aunque uno se pase la vida entera escribiendo todas las potencias puras que existen, no encontrará otra pareja de números que difieran en 1, salvo 8 y 9. En 1342, el filósofo y matemático judeo-francés Levi Ben Gerson (1288-1344) demostró una pequeña parte de la conjetura: que 8 y 9 son las dos únicas potencias de 2 y 3 que difieren en 1. El matemático Robert Tijdeman efectuó un gran avance en 1976. Aun así, la demostración general de la conjetura de Catalan frustró las mejores mentes matemáticas durante más de ciento cincuenta años. Finalmente, el 18 de abril de 2002, el matemático rumano Preda Mihailescu presentó una demostración completa de la conjetura. Su demostración se publicó en 2004 y en la actualidad está totalmente aceptada. De nuevo, uno podría preguntar: ¿cuándo se convirtió en cierta la conjetura de Catalan? ¿En 1342? ¿En 1844? ¿En 1976? ¿En 2002? ¿En 2004? ¿O no es acaso obvio que la afirmación fue siempre cierta, sólo que no sabíamos que lo era? Este es el tipo de verdades a las que los platónicos denominarían verdades objetivas.

Algunos matemáticos, filósofos, científicos cognitivos y otros «consumidores» de matemática (como científicos de la computación) juzgan el mundo platónico como producto de la imaginación de mentes demasiado soñadoras (esta perspectiva y otros dogmas los describiré con mayor detalle más adelante).[57] De hecho, en 1940, el famoso historiador de la matemática Eric Temple Bell (1883-1960) efectuó la predicción siguiente:

> Según los profetas, el último partidario del ideal platónico en matemática se unirá a los dinosaurios alrededor del año 2000. Despojada de estas místicas vestiduras de eternalismo, la matemática será reconocida por lo que siempre ha sido, un lenguaje construido por los humanos y desarrollado por éstos con finalidades definidas establecidas por ellos mismos. El último templo de la verdad absoluta se habrá desvanecido junto con la nada a la que estaba consagrado.[58]

La profecía de Bell demostró ser falsa. Aunque han aparecido dogmas diametralmente opuestos (pero en distintas direcciones) al platonismo, no han logrado ganarse las mentes (¡ni los corazones!) de todos los matemáticos y filósofos, que siguen estando tan divididos como siempre.

Supongamos, no obstante, que el platonismo hubiese salido vencedor y que todos nos hubiésemos convertido al fervor platónico. ¿Explica el platonismo la «poco razonable eficacia» con la que la matemática describe nuestro mundo? En realidad, no. ¿Por qué iba la realidad física a comportarse según leyes que residen en el abstracto mundo platónico? Este era, después de todo, uno de los misterios de Penrose, un «devoto» platonista. Así que de momento tendremos que aceptar el hecho de que, aunque adoptásemos el platonismo, el rompecabezas del poder de la matemática seguiría sin resolver. En palabras de Wigner: «Es difícil evitar la impresión de que nos enfrentamos a un milagro, comparable en capacidad de sorpresa al milagro de que la mente humana pueda hilvanar un millar de argumentos sin contradecirse».

Para apreciar en todo su esplendor la magnitud de este milagro deberemos ahondar en las vidas y los legados de los propios «milagreros», las mentes ocultas tras el descubrimiento de algunas de estas increíblemente precisas leyes de la naturaleza.

3
Magos: el maestro y el hereje

A diferencia de los Diez Mandamientos, la ciencia no se entregó a la humanidad en unas imponentes tablas de piedra. La historia de la ciencia es la historia del auge y caída de numerosas especulaciones, hipótesis y modelos. Muchas ideas aparentemente ingeniosas resultaron ser disparos de fogueo o conducir a callejones sin salida. Algunas teorías que en su momento se consideraban blindadas acabaron por disolverse en la nada tras pasar por la cruel prueba de los sucesivos experimentos y observaciones y quedar totalmente obsoletas. Ni siquiera la mente formidable de los creadores de algunas de estas ideas erróneas les proporcionó inmunidad para impedir que fueran sustituidas por otras. El gran Aristóteles (384-322 a.C), por ejemplo, pensaba que las piedras, las manzanas u otros objetos pesados caían porque buscaban su lugar *natural*, que se encontraba en el centro de la Tierra. Al acercarse al suelo, sostenía Aristóteles, estos cuerpos aumentaban su velocidad porque estaban felices de regresar a casa. Por el contrario, el aire (y el fuego) se movían hacia arriba porque el lugar natural del aire eran las esferas celestiales. A todos los objetos se les podía asignar una «naturaleza» en función de la relación percibida con los constituyentes más básicos: tierra, fuego, aire y agua. En palabras de Aristóteles:

> Algunas cosas son por naturaleza, otras por otras causas. Por naturaleza son … los cuerpos simples como la tierra, el fuego, el aire y el agua… Todas estas cosas parecen diferenciarse de las que no están constituidas por naturaleza, porque cada una de ellas tiene en sí misma un principio de movimiento y de reposo … Porque la naturaleza es un principio y causa del movimiento o del reposo en la cosa a la que pertenece primariamente … Se dice que son «conforme a naturaleza» todas esas cosas y cuanto les pertenece por sí mismas, como al fuego el desplazarse hacia arriba.[59]

Aristóteles intentó incluso formular una ley del movimiento *cuantitativa.* Afirmó que los objetos más pesados caen más deprisa, y su velocidad es directamente proporcional al peso (es decir, se suponía que un objeto dos veces más pesado que otro debía caer al doble de velocidad). Aunque nuestra experiencia cotidiana puede hacernos creer que esta «ley» parece razonable (se ha observado que un ladrillo llega al suelo antes que una pluma al dejar caer ambos desde la misma altura), Aristóteles no se preocupó de examinar con precisión su afirmación cuantitativa. De algún modo, nunca se le ocurrió (o quizá no consideró que fuese necesario) comprobar si dos ladrillos atados entre sí caían realmente el doble de rápido que un solo ladrillo. Galileo Galilei (1564-1642), con un espíritu matemático y experimental mucho más acentuado y con no demasiado respeto por el nivel de «felicidad» de los ladrillos y las manzanas que caen, fue el primero en señalar el craso error de Aristóteles. Mediante un astuto «experimento mental», Galileo mostró que la ley de Aristóteles no tenía ningún sentido, porque era incoherente desde el punto de vista lógico.[60] Su argumentación era la siguiente: supongamos que atamos entre sí dos objetos, uno más pesado que el otro. ¿Con qué velocidad caerá el objeto combinado en comparación con la de cada uno de sus componentes? Por un lado, según la ley de Aristóteles, se puede llegar a la conclusión de que caería a una velocidad intermedia, ya que el objeto ligero reduciría la velocidad del más pesado. Por otro lado, sin embargo, el objeto combinado es más pesado que sus dos componentes, por lo que debería caer aún más rápido que el más pesado de los dos, lo cual lleva a una clara contradicción. El único motivo por el que una pluma cae con más suavidad que una tonelada de ladrillos es que la pluma experimenta una resistencia mayor del aire; si se dejan caer desde la misma altura en el vacío, ambos llegarán simultáneamente al suelo. Este hecho ha quedado demostrado en numerosos experimentos, y el más espectacular de ellos lo llevó a cabo el astronauta del Apolo 15 David Randolph Scott, la séptima persona en caminar por la superficie de la Luna. Scott dejó caer simultáneamente un martillo desde una mano y una pluma desde la otra. Puesto que la Luna carece de una atmósfera sustancial, el martillo y la pluma golpearon la superficie lunar al mismo tiempo.

Lo más sorprendente de la falaz ley de movimiento de Aristóteles no es que fuese falsa, sino que ¡había sido aceptada durante más de dos mil años! ¿Cómo pudo disfrutar de tan notable longevidad una idea errónea? Se trataba de un caso de «tormenta perfecta»: tres fuerzas distintas combinadas para crear una doctrina incuestionable. En primer lugar tenemos el hecho de que, en ausencia de medidas precisas, la ley de Aristóteles parecía estar de acuerdo con el sentido común y la experiencia: las hojas de papiro tienden a flotar en el aire mientras que no lo hacen los pedruscos de plomo. En segundo lugar tenemos el colosal peso de la inigualable reputación de Aristóteles y su autoridad como erudito. Después de todo, estamos hablando de la persona que estableció los cimientos de una gran parte de la cultura intelectual de Occidente. Ya fuese en la investigación de los fenómenos naturales o los fundamentos de la ética, la metafísica, la política o el arte, Aristóteles escribió, literalmente, el primer libro. Y la cosa no acababa ahí. En cierto sentido, Aristóteles también nos enseñó *cómo* pensar, al iniciar los primeros estudios formales de la lógica. En nuestros días, casi todos los niños en las escuelas reconocen el cuasi-completo sistema de inferencia lógica de Aristóteles, denominado *silogismo:*[61]

1. Todos los griegos son personas.
2. Todas las personas son mortales.
3. Todos los griegos son mortales.

El tercer motivo de la increíble capacidad de permanencia de la teoría incorrecta de Aristóteles era que la iglesia cristiana adoptó su teoría como parte de la ortodoxia oficial, lo que actuó como agente disuasorio contra cualquier intento de cuestionar las afirmaciones de Aristóteles.

A pesar de sus impresionantes contribuciones a la sistematización de la lógica deductiva, definitivamente las matemáticas no eran el fuerte de Aristóteles. Es sorprendente que el hombre que, en esencia, estableció la ciencia como disciplina organizada, no le diera demasiada importancia a la matemática (desde luego, mucha menos que Platón), y la física no se le diera muy bien. Aunque Aristóteles reconocía la importancia de las relaciones numéricas y geométricas en la ciencia, consideraba la matemática como una disciplina abstracta, apartada de la realidad física. Por consiguiente, aunque no cabe duda de que Aristóteles era una potencia intelectual, *no* entraría en mi lista de «magos».

Utilizo aquí la palabra «mago» para referirme a las personas capaces de sacar conejos de chisteras literalmente vacías; aquellas

que descubrieron conexiones nunca antes imaginadas entre la matemática y la naturaleza; aquellas que, al observar fenómenos complejos, fueron capaces de destilar de ellos precisas leyes matemáticas. En algunos casos, estos pensadores de un nivel superior utilizaron incluso sus experimentos y observaciones para hacer avanzar la matemática. La cuestión de la colosal eficacia de la matemática para explicar la naturaleza no hubiese surgido jamás de no haber sido por estos «magos». Este enigma nació directamente de la milagrosa inspiración de estos investigadores.

Ningún libro puede hacer realmente justicia a estos soberbios científicos y matemáticos que han contribuido a nuestra comprensión del universo. En este capítulo y el siguiente tengo previsto centrarme en cuatro de estos gigantes de siglos pretéritos, cuyo estatus de «mago» no puede cuestionarse; la *crème de la crème* del mundo científico. Al primero de los «magos» de mi lista se le recuerda por un hecho insólito: ¡por atravesar corriendo completamente desnudo las calles de su ciudad!

Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo

Cuando el historiador de la matemática E. T. Bell tuvo que decidir a quién situaba en su lista de «los tres mejores matemáticos», su conclusión fue:

> En cualquier lista de los tres mejores matemáticos de la historia debe aparecer el nombre de Arquímedes. Los otros dos que suelen acompañarle suelen ser Newton (1643-1727) y Gauss (1777-1855). Considerando la abundancia (o escasez) relativa de matemáticos y científicos en las respectivas épocas en los que estos dos gigantes vivieron y tomando en consideración sus logros en el contexto de su época, algunos pondrían a Arquímedes en el primer lugar.[62]

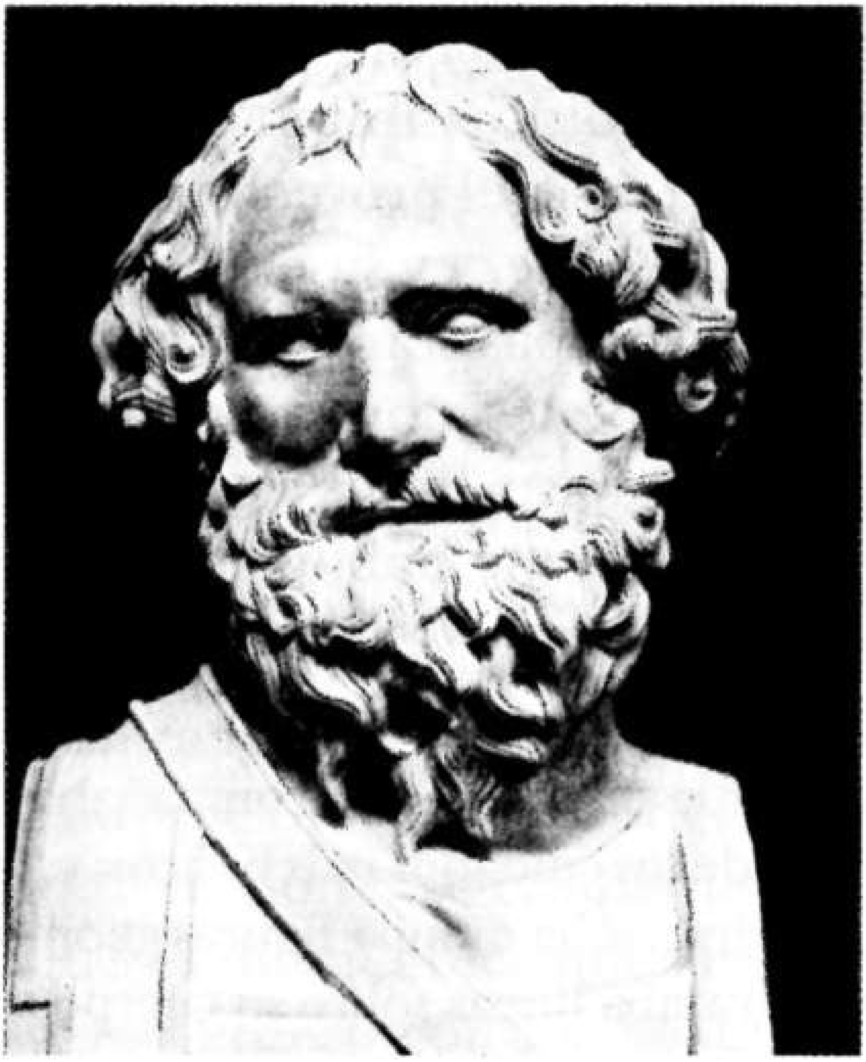


Figura 10

Arquímedes (287-212 a.C; en la figura 10 se muestra un busto que, según se dice, representa a Arquímedes, pero que podría corresponder en realidad a un rey de Esparta) era, efectivamente, el Newton o Gauss de su época. Una persona tan brillante, imaginativa e inspirada que tanto sus contemporáneos como las generaciones que lo sucedieron mencionaban su nombre con respeto y admiración. Aunque se le conoce sobre todo por sus ingeniosos inventos en el campo de la ingeniería, Arquímedes era sobre todo matemático, y en esta disciplina se hallaba siglos por delante de su época. Por desgracia, apenas hay información acerca de los primeros años de su vida y de su familia. En su primera biografía, escrita por un tal Heráclides,[63] no ha llegado hasta nuestros días, y los escasos detalles que sabemos sobre su vida y su violenta muerte proceden principalmente de los escritos del historiador romano Plutarco. Plutarco (ca. 46-120 d.C.) estaba, de hecho, más interesado en los logros militares del general romano Marcelo, que conquistó la ciudad natal de Arquímedes, Siracusa, en 212 a.C.[64] Por suerte para la historia de la matemática, Arquímedes dio tantos problemas a Marcelo durante el sitio de Siracusa que los tres principales historiadores de ese período —Plutarco, Polibio y Livio— tuvieron que hablar de él.

Arquímedes nació en Siracusa, en aquellos tiempos un enclave griego en Sicilia.[65] Según su propio testimonio, era hijo del astrónomo Fidias, sobre el que se tiene escasa información salvo que había hecho una estimación de los diámetros del Sol y de la Luna. Arquímedes podría también estar emparentado de algún modo con el rey Hierón II, que a su vez era hijo ilegítimo de un noble y de una de sus esclavas. Independientemente de los lazos de parentesco que tuviese con la familia real, tanto el rey como su hijo, Gelón, tuvieron siempre a Arquímedes en muy alta consideración. En su juventud, Arquímedes pasó un tiempo en Alejandría, en donde estudió matemáticas, antes de regresar a Siracusa para dedicarse en cuerpo y alma a la investigación.[66]

Arquímedes era un matemático de la cabeza a los pies. Según Plutarco, consideraba sórdido e innoble «cualquier arte que sirviese meramente para el uso y el provecho, y su ambición se limitaba a aquello que, por su belleza y su excelencia, permaneciese al margen de las necesidades más comunes de la vida». La constante preocupación de Arquímedes por la matemática abstracta y la atención que le dedicaba hasta llegar a consumirle iba, al parecer, mucho más allá del entusiasmo habitual entre los practicantes de esa disciplina. Citando de nuevo a Plutarco:

> Hechizado por la sirena que le acompañaba a todas partes, se olvidaba de comer y de los cuidados más básicos; y, cuando se veía forzado a bañarse y ungirse, solía dibujar figuras geométricas en las cenizas o, con los dedos, trazaba líneas sobre su cuerpo ungido, poseído por un sublime éxtasis y, en verdad, esclavizado por las musas.

A pesar de su desprecio por la matemática aplicada y la poca importancia que concedía a sus propias ideas sobre ingeniería, sus ingeniosos inventos le supusieron una mayor celebridad a nivel popular que su genio matemático.

La leyenda más conocida sobre Arquímedes resalta aún más su imagen arquetípica de matemático despistado. Este divertido relato fue narrado por primera vez por el arquitecto romano Vitruvio en el siglo I d.C, y dice así: el rey Hierón quería consagrar una corona de oro a los dioses inmortales. Cuando el rey recibió la corona acabada, su peso era igual al del oro entregado para su creación. Sin embargo, el rey sospechaba que una cierta cantidad de oro había sido sustituida por el mismo peso en plata. Incapaz de corroborar sus sospechas, el rey pidió consejo al maestro de los matemáticos: Arquímedes. Un día, prosigue la leyenda, Arquímedes, que seguía enfrascado en la resolución del problema del posible fraude de la corona, fue a bañarse. Mientras se sumergía en el agua de la bañera, se dio cuenta de que su cuerpo desplazaba un cierto volumen de agua, que desbordaba por encima de la bañera, y en su mente vio la solución.[67] Sin poder contener su alborozo, Arquímedes saltó de la bañera y salió corriendo desnudo por las calles al grito de *¡Eureka! ¡Eureka!* («¡Lo encontré! ¡Lo encontré!»).

Otra de las famosas máximas arquimedianas, «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo», aparece actualmente, en distintas versiones, en más de 150.000 páginas web de acuerdo con los resultados de Google. Esta osada afirmación, que parece algo así como el lema de una gran corporación, ha sido citado en discursos de Thomas Jefferson, Mark Twain y John F. Kennedy, y hasta en un poema de Lord Byron.[68] Al parecer, la frase era la culminación de los estudios de Arquímedes sobre el problema de mover un peso determinado con una fuerza determinada. Según Plutarco, cuando el rey Hierón solicitó ver una demostración práctica de la capacidad de Arquímedes para manejar un peso muy grande con una fuerza muy pequeña, Arquímedes se las arregló, mediante una polea compuesta, para botar un barco con toda su carga. Plutarco agrega, admirado, que «movió el barco con suavidad y seguridad, como si estuviese navegando por el mar». En otras fuentes se pueden encontrar versiones ligeramente distintas de esta misma leyenda. Aunque es difícil creer que Arquímedes fuese capaz de desplazar un barco entero con los aparatos mecánicos de los que disponía, las leyendas no dejan lugar a dudas sobre una impresionante demostración de un invento que le permitía maniobrar grandes pesos.

Aunque Arquímedes es el responsable de muchos inventos pacíficos, como un tornillo hidráulico para elevar agua y un planetario que mostraba los movimientos de los cuerpos celestes, en la Antigüedad se hizo célebre por su intervención en la defensa de Siracusa contra los romanos.

A los historiadores siempre les han gustado las guerras. Por tanto, los hechos del sitio romano de Siracusa durante los años 214-212 a.C. aparecen descritos con todo lujo de detalles en las crónicas de diversos historiógrafos. El general romano Marco Claudio Marcelo (ca. 268-208 a.C), cuya fama militar era notable en aquellos días, preveía una victoria rápida. Pero lo que al parecer no tuvo en cuenta fue la testarudez del rey Hierón, ayudado por un genio de la matemática y la ingeniería. Plutarco ofrece una vivida descripción del caos que las máquinas de Arquímedes provocaron en las huestes romanas:

> Al ejército, [disparó Arquímedes] con armas arrojadizas de todo género y con piedras de una mole inmensa, despedidas con increíble violencia y celeridad, las cuales no habiendo nada que resistiese a su paso, obligaban a muchos a la fuga y rompían la formación. En cuanto a las naves, a unas las asían por medio de grandes maderos con punta, que repentinamente aparecieron en el aire saliendo desde la muralla, y, alzándose en alto con unos contrapesos, las hacían luego sumirse en el mar, y a otras, levantándolas rectas por la proa con garfios de hierro semejantes al pico de las grullas, las hacían caer en el agua por la popa, o atrayéndolas y arrastrándolas con máquinas que calaban adentro las estrellaban en las rocas… A veces hubo nave que suspendida en alto dentro del mismo mar, y arrojada en él y vuelta a levantar, fue un espectáculo terrible hasta que estrellados o expelidos los marineros, vino a caer vacía sobre los muros, o se deslizó por soltarse el garfio que la asía.

El miedo a los dispositivos de Arquímedes llegó hasta tal punto que «si [los soldados romanos] veían la sombra de un trozo de cuerda o un madero sobre una pared, gritaban horrorizados "ahí está de nuevo", refiriéndose a que Arquímedes estaba lanzando contra ellos alguno de sus ingenios, y se daban media vuelta y salían huyendo». El propio Marcelo, profundamente impresionado, se quejaba a su equipo de ingenieros militares: «¿Es que nunca terminaremos de luchar contra este Briareo [el gigante de cien brazos hijo de Urano y Gea] de la geometría que, sentado junto al mar, juega al tejo con nuestros barcos para confundirnos y, por las armas arrojadizas que lanza contra nosotros, supera a los gigantes de cien brazos de la mitología?».

Según otra leyenda popular que hizo su primera aparición en los escritos del gran médico griego Galeno (ca. 129-200 d.C), Arquímedes utilizó un conjunto de espejos que enfocaban los rayos del Sol para quemar los barcos romanos.[69] El arquitecto bizantino del siglo VI Antemio de Tralles y varios historiadores del siglo XII repitieron esta historia fantástica, aunque la viabilidad de tamaña proeza sigue siendo incierta. Aun así, el número de relatos cuasi-mitológicos nos proporciona un abundante testimonio de la veneración que «el sabio» inspiró en las generaciones posteriores.

Como ya he mencionado, Arquímedes (ese «Briareo de la geometría» tan altamente considerado) no tenía en demasiada consideración sus juguetes militares; más bien los veía como diversiones geométricas. Por desgracia, esa actitud distante podría finalmente haberle costado la vida. Cuando los romanos capturaron por fin Siracusa, Arquímedes estaba tan absorto dibujando sus diagramas geométricos en una bandeja de arena que apenas prestó atención al tumulto de la batalla. Según algunas narraciones, cuando un soldado romano ordenó a Arquímedes que lo siguiera para presentarlo ante Marcelo, el anciano geómetra repuso indignado: «Apártate de mis diagramas».[70] Esta respuesta encolerizó al soldado hasta tal punto que, desobedeciendo las órdenes expresas de su superior, desenvainó su espada y dio muerte al mayor matemático de la Antigüedad.

FIGURA 11

La figura 11 muestra lo que se considera una reproducción del siglo XVIII de un mosaico hallado en Herculano en el que se representan los últimos momentos de la vida del «maestro».

En cierto sentido, la muerte de Arquímedes marcó el final de una era de extraordinaria vitalidad en la historia de las matemáticas. Tal como señaló el matemático y filósofo británico Alfred North Whitehead:

> La muerte de Arquímedes a manos de un soldado romano es el símbolo de un cambio de primera magnitud a nivel mundial. Los romanos fueron un gran pueblo, pero estaban condenados por la esterilidad que se deriva del sentido práctico. No eran soñadores que alcanzasen nuevos puntos de vista para llegar a un control más fundamental de las fuerzas de la naturaleza. *Ningún romano perdió nunca la vida por estar absorto en la contemplación de un diagrama matemático.* (La cursiva es mía.)[71]

Por suerte, aunque los detalles acerca de la vida de Arquímedes escasean, muchos (aunque no todos) de sus increíbles escritos han sobrevivido. Arquímedes tenía la costumbre de enviar notas sobre sus descubrimientos matemáticos a algunos matemáticos amigos suyos o a personas que le merecían respeto. Esta exclusiva lista de corresponsales incluía, entre otros, al astrónomo Conón de Sanios, al matemático Eratóstenes de Cirene y al hijo del rey, Gelón. Tras la muerte de Conón, Arquímedes envió algunas notas al pupilo de aquél, Dositeo de Pelusio.

La obra de Arquímedes abarca una asombrosa variedad dentro de la matemática y la física.[72] Estos son algunos de sus numerosos logros: ideó métodos generales para hallar las áreas de diversas figuras planas y los volúmenes limitados por todo tipo de superficies curvas, entre los que se encontraban las áreas del círculo, el segmento de parábola y la espiral, y los volúmenes del segmento de cilindro, de cono y de otras figuras generadas por la rotación de parábolas, elipses e hipérbolas; demostró que el valor del número tí, la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, debía ser mayor que $3\ {}^{10}/_{71}$ y menor que $3\ {}^{1}/_{7}$; en una época en la que no existía método alguno para describir los números muy grandes inventó un sistema que le permitía, no sólo escribir, sino también manipular, números de cualquier magnitud. En física, Arquímedes descubrió las leyes que gobernaban el comportamiento de los cuerpos flotantes, estableciendo así la ciencia de la *hidrostática.* Además, calculó los centros de gravedad de muchos sólidos y formuló las leyes mecánicas de las palancas. En astronomía, efectuó observaciones para medir la longitud del año y las distancias a los planetas.

Los trabajos de muchos matemáticos griegos se caracterizaron por su originalidad y su atención a los detalles. Sin embargo, los métodos de razonamiento y resolución de Arquímedes lo situaban en una clase aparte de los científicos de su época. Permítanme describir únicamente tres ejemplos representativos que ofrecen una somera idea de la inventiva de Arquímedes. El primero de ellos, a primera vista, no parece más que una entretenida curiosidad, pero un examen más atento revela la profundidad de su inquisitivo cerebro. Las otras dos ilustraciones de los métodos arquimedianos demuestran un pensamiento tan avanzado que bastan para elevar a Arquímedes a lo que he denominado el estatus de «mago».

Al parecer, Arquímedes estaba fascinado por los números grandes. La notación ordinaria es demasiado tosca para expresar números muy grandes (intente escribir un cheque personal de 8,4 billones de dólares, la deuda nacional de Estados Unidos en julio de 2006, en el espacio asignado para la cantidad). De modo que Arquímedes desarrolló un sistema con el que podría representar incluso números de 80 trillones de dígitos. Este sistema lo utilizó en un original tratado llamado *El arenario,* para mostrar que el número total de granos de arena en el mundo no era infinito.

La misma introducción de ese tratado es tan ilustrativa que reproduciré aquí un fragmento de la misma (la introducción estaba dirigida a Gelón, el hijo del rey Hierón

II):

> Hay algunos, rey Gelón, que creen que el número de los granos de arena es infinito por su multitud; y cuando digo arena no solamente me refiero a la que existe alrededor de Siracusa y del resto de Sicilia sino también a la que se puede encontrar en toda región, ya sea habitada o deshabitada.También hay algunos que sin creer que sea infinita, piensan sin embargo que no existe ningún número que sea lo bastante grande como para superar tanta abundancia. Y es claro que, si aquellos que sostienen esa opinión imaginasen una masa hecha de arena tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y los huecos de la Tierra llenos hasta la altura de la más alta de los montañas, seguirían muy lejos de reconocer que se puede expresar cualquier número que supere esta multitud de arena. Pero intentaré mostrarte, con pruebas geométricas que podrás entender, que de los números a los que nombré y que incluí en la obra que envié a Zeuxipo [por desgracia, esta obra se ha perdido], algunos de ellos superan no sólo el número de los granos de arena cuya masa es igual en magnitud a la de la Tierra llena de la forma en que lo he descrito, sino también a una masa de igual magnitud que el universo. Como sabes, "universo" es el nombre con el que los astrónomos llaman a la esfera cuyo centro es el centro de la Tierra y cuyo radio es igual a la longitud de una línea recta entre el centro del Sol y el centro de la Tierra. Esto es lo que los astrónomos dicen, y es conocimiento común. Pero Aristarco de Samos escribió un libro en el que exponía algunas hipótesis que conducían al resultado de que el universo es muchas veces mayor que lo que ahora se llama así. Sus hipótesis eran que las estrellas fijas y el Sol están inmóviles, que la Tierra gira alrededor del Sol en la circunferencia de un círculo, con el Sol en el centro de la órbita…[73]

De esta introducción sobresalen de inmediato dos aspectos: (i) Arquímedes estaba preparado para poner en duda incluso las creencias más habituales (por ejemplo, que el número de granos de arena es infinito), y (ii) que respetaba la teoría heliocéntrica del astrónomo (en otro lugar del tratado corrige incluso una de las hipótesis de Aristarco). En el universo de Aristarco, la Tierra y los planetas giraban alrededor de un Sol estacionario ubicado en el centro (¡recuerde que este modelo se propuso mil ochocientos años antes de Copérnico!). Tras estas observaciones preliminares, Arquímedes se aboca a la tarea de los granos de arena, avanzando mediante una serie de pasos lógicos. En primer lugar efectúa una estimación del número de granos que puestos en fila son necesarios para abarcar el diámetro de una semilla de amapola. Luego, cuántas semillas de amapola abarcarían la anchura de un dedo, cuántos dedos en un estadio, y continúa hasta los diez mil millones de estadios. Sobre la marcha, Arquímedes inventa un sistema de índices y una notación que, combinados, le permiten clasificar estos descomunales números. Arquímedes supuso que la esfera de estrellas fijas es menos de diez millones de veces mayor que la esfera que contiene la órbita del Sol (según se ve desde la Tierra), halló que el número de granos de arena en un universo lleno de ella sería inferior a 10^{63} (un uno seguido de sesenta y tres ceros). La conclusión de su tratado era una respetuosa nota a Gelón:

> Imagino que estos hechos, rey Gelón, parecerán increíbles a la gran mayoría de las personas que no han estudiado matemáticas, pero a aquellos que están versados en ellas y han meditado sobre la cuestión de las distancias y tamaños de la Tierra y el Sol y la Luna y el universo entero, la prueba les resultará convincente. Y por ese motivo he pensado que el asunto no sería inapropiado para someterlo a tu consideración.

La belleza de *El arenario* reside en la facilidad con la que Arquímedes pasa de los objetos cotidianos (semillas de amapola, arena y dedos) a los números abstractos y la notación matemática, y de ahí a los tamaños del sistema solar y del universo entero. Arquímedes poseía sin duda una flexibilidad intelectual de tal calibre que podía utilizar cómodamente sus matemáticas para descubrir propiedades desconocidas del universo y también utilizar las características del cosmos para avanzar en los conceptos aritméticos.

El segundo factor que hace a Arquímedes acreedor del título de «mago» es el *método* utilizado para llegar a sus notables teoremas geométricos. Apenas se sabía nada sobre este método ni sobre los procesos mentales en general de Arquímedes hasta el siglo XX. En 1906, un espectacular descubrimiento abrió una ventana a la mente de este genio. La historia de este descubrimiento recuerda tanto a una de esas novelas históricas de misterio del escritor y filósofo italiano Umberto Eco que me siento en la obligación de desviarme brevemente para contarla.[74]

El palimpsesto de Arquímedes

En algún momento del siglo X,[75] un escriba anónimo de Constantinopla (la actual Estambul) copió tres importantes obras de Arquímedes: *El método, Stomachion* y *De los cuerpos flotantes.* Probablemente se debió a un interés general por los matemáticos griegos suscitado por el matemático del siglo IX León el Geómetra. Sin embargo, en 1204, los caballeros de la cuarta cruzada decidieron saquear Constantinopla en busca de soporte financiero. En los años venideros, la pasión por las matemáticas decayó, mientras que el cisma entre la Iglesia Católica de Occidente y la Iglesia Ortodoxa de Oriente se convirtió en un hecho consumado. En algún momento antes de 1229, el manuscrito con las obras de Arquímedes sufrió un catastrófico proceso de reciclaje: fue desencuadernado y lavado para reutilizar el pergamino en un libro de oraciones cristiano. El escriba Ioannes Myronas terminó de copiar el libro de oraciones el 14 de abril de 1229.[76] Por fortuna, el borrado del texto original no lo eliminó por completo.

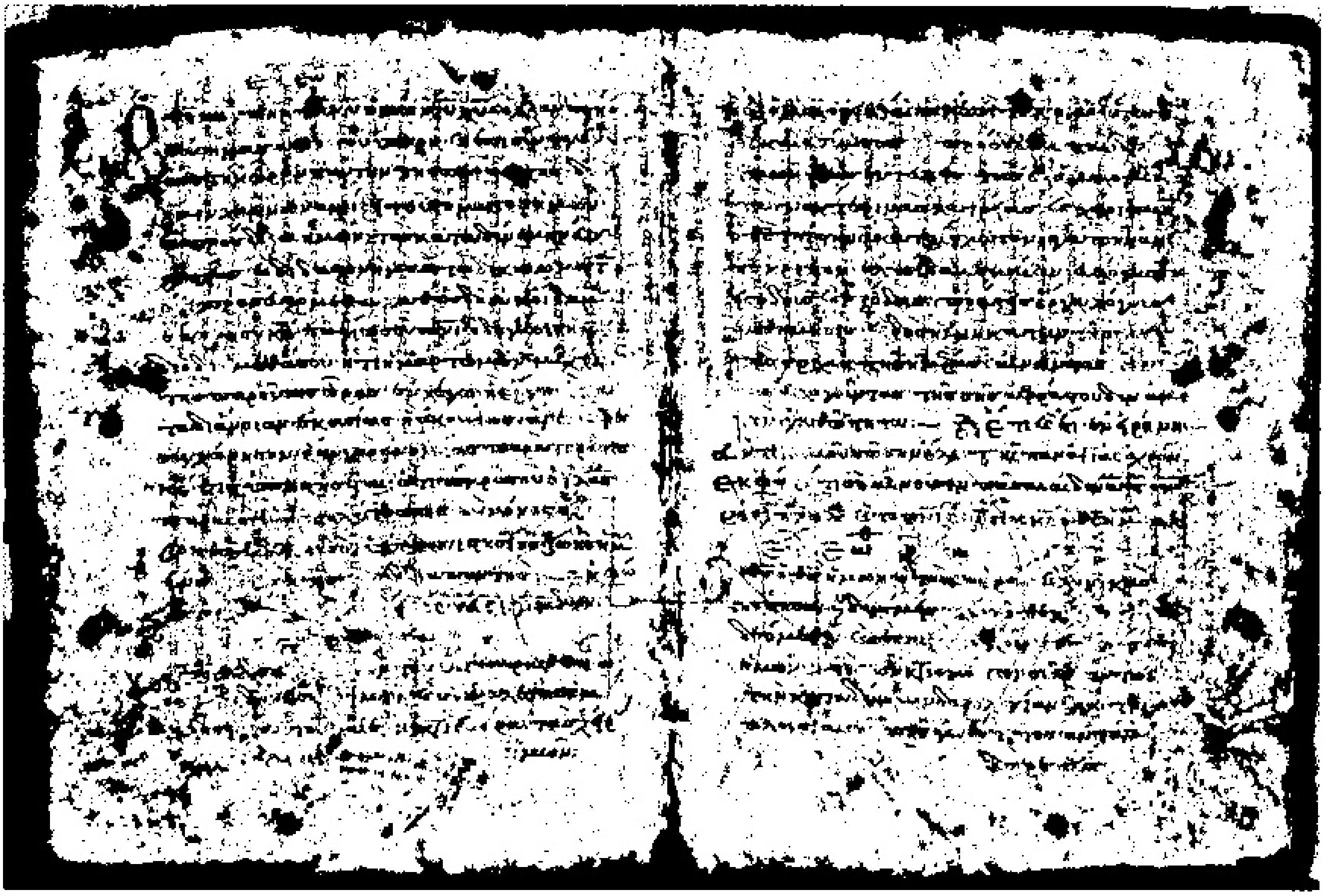


FIGURA 12

En la figura 12 se muestra una página del manuscrito; las líneas horizontales representan las oraciones y las verticales, el contenido matemático. Alrededor del siglo XVI, el palimpsesto —el documento reciclado— había llegado de algún modo a Tierra Santa, concretamente al monasterio de San Sabas, al este de Belén. A principios del siglo XIX, la biblioteca del monasterio contenía no menos de un millar de manuscritos. Sin embargo, por razones no del todo conocidas, el palimpsesto de Arquímedes volvió a ser trasladado a Constantinopla. En la década de 1840, el famoso erudito bíblico alemán Constantin Tischendorf (1815-1874), descubridor de uno de los manuscritos más antiguos de la Biblia, visitó el metoquio del Santo Sepulcro en Constantinopla (dependiente de la abadía del Patriarcado Griego en Jerusalén) y allí vio el palimpsesto. Probablemente, Tischendorf quedó intrigado por el parcialmente visible texto matemático subyacente, porque al parecer ¡arrancó y robó una página del manuscrito! Los herederos de Tischendorf vendieron esa página en 1879 a la Biblioteca de la Universidad de Cambridge.

En 1899, el estudioso griego Anastasius Papadopoulos Kerameus catalogó todos los manuscritos del Metoquio, y el manuscrito de Arquímedes apareció en su lista como Ms. 355. Papadopoulos Kerameus fue capaz de leer algunas líneas del texto matemático y, quizá dándose cuenta de su posible importancia, escribió estas líneas en su catálogo. El texto matemático en el catálogo captó la atención del filólogo danés Johan Ludvig Heiberg (1854-1928). Heiberg reconoció el texto como perteneciente a Arquímedes, de modo que viajó a Estambul en 1906, examinó y fotografió el palimpsesto y, un año después, anunció su extraordinario descubrimiento: dos tratados inéditos de Arquímedes (y otro del que sólo se conocía hasta entonces su traducción al latín). Aunque Heiberg fue capaz de leer fragmentos del manuscrito y luego publicarlos en su libro sobre la obra de Arquímedes, aún había huecos importantes. Por desgracia, en algún momento después de 1908, el manuscrito desapareció de Estambul en misteriosas circunstancias, para reaparecer en manos de una familia de París, que afirmaba haberlo poseído desde los años veinte. El palimpsesto había sufrido daños irreversibles por moho debido a un almacenaje incorrecto, y tres de las páginas anteriormente transcritas por Heiberg habían, simplemente, desaparecido. Además, posteriormente a 1929, una persona pintó cuatro miniados de estilo bizantino en cuatro de sus páginas. La familia francesa que poseía el manuscrito decidió finalmente enviarlo a Christie's para que fuese subastado. La propiedad del manuscrito fue disputada en un juzgado federal de Nueva York en 1998. El Patriarcado de Jerusalén de la Iglesia Ortodoxa griega reclamaba que el manuscrito había sido robado en los años veinte de uno de sus monasterios, pero el juez acabó decidiendo en favor de Christie's. El palimpsesto fue subastado en Christie's el 29 de octubre de 1998, y un comprador anónimo pagó por él dos millones de dólares. El propietario depositó el manuscrito de Arquímedes en el museo de arte Walters en Baltimore, donde recibe un exhaustivo tratamiento de conservación y está siendo sometido a un concienzudo examen. Los modernos científicos especialistas en imagen disponen de herramientas en su arsenal que no estaban disponibles a los investigadores de épocas pasadas. Luz ultravioleta, imagen multiespectral y rayos X enfocados (producidos por electrones acelerados en el Acelerador lineal de Stanford) han ayudado a descifrar porciones del manuscrito previamente ocultas. En el momento de redactar estas líneas, los especialistas prosiguen con el cuidadoso estudio del manuscrito de Arquímedes. Yo mismo tuve la suerte de conocer al equipo «forense» del palimpsesto.[77]

FIGURA 13

En la figura 13 aparezco yo mismo junto a un montaje experimental utilizado para iluminar una de las páginas del palimpsesto en distintas longitudes de onda.

La dramática historia que rodea al palimpsesto es de lo más adecuada para un documento que nos permite echar un vistazo sin precedentes al método del insigne geómetra.

El método

Al leer cualquier libro de geometría griega, no deja de impresionar la economía de estilo y la precisión con la que se enunciaban y se demostraban los teoremas hace más de dos milenios. Sin embargo, lo que esos libros no proporcionan son pistas claras sobre cómo se concibieron esos teoremas. El excepcional documento de Arquímedes *El método* ayuda a cubrir parcialmente esta misteriosa laguna, ya que revela cómo el propio Arquímedes se convenció de la verdad de ciertos teoremas antes de saber cómo demostrarlos. Este texto es parte de lo que decía al matemático

Eratóstenes de Cirene (ca. 284-192 a.C.) en la introducción:

> Te haré llegar las demostraciones de los teoremas de este libro. Como te tengo por una persona diligente, un excelente profesor de filosofía, y sé de tu interés por las investigaciones matemáticas, juzgué apropiado escribir y exponer para ti en este mismo libro ciertométodo especial que te permitirá comprender determinadas cuestiones matemáticas *con la ayuda de la mecánica.* Estoy convencido de la utilidad de tal método para hallar las demostraciones de estos mismos teoremas. Porque algunas cosas que primero pude apreciar por el método mecánico se probaron luego de forma geométrica, ya que al investigarlas por ese método no se alcanzaba una verdadera demostración. Pues es más fácil llegar a la demostración cuando, mediante el método, se ha adquirido un conocimiento de las cuestiones, que no llegar a ella sin conocimiento previo. (La cursiva es mía.)[78]

Arquímedes se refiere aquí a uno de los aspectos fundamentales en la investigación científica y matemática: con frecuencia es más complicado describir cuáles son las *preguntas* o teoremas importantes que encontrar la respuesta a las preguntas o la demostración de los teoremas conocidos. Entonces, ¿cómo descubrió Arquímedes los nuevos teoremas? A partir de su magistral comprensión de la mecánica, el equilibrio y los principios de la palanca, *pesó* mentalmente los sólidos o figuras cuyo volumen o área intentaba hallar comparándolos con otros que ya sabía. Tras determinar así la *solución* del área o volumen desconocidos, le resultaba mucho más sencillo probar geométricamente la corrección de esa solución. Así, *El método* se inicia con una serie de afirmaciones relativas a centros de gravedad para luego proseguir a las proposiciones geométricas y sus demostraciones.

El método de Arquímedes resulta extraordinario desde dos puntos de vista. En primer lugar, introduce el concepto de «experimento mental» en la investigación rigurosa. El físico del siglo XIX Hans Christian Oersted denominó por primera vez a esta herramienta —un experimento imaginario realizado en lugar de uno real— *Gedankenexperiment* (en alemán, «experimento efectuado en el pensamiento»). En física, donde este concepto ha resultado extremadamente fructífero, los experimentos mentales se utilizan para percibir ciertos aspectos de un problema antes de efectuar el experimento real, o bien en casos en los que éste no se puede llevar a cabo. En segundo lugar, y más importante aún, Arquímedes liberó a la matemática de las cadenas más bien artificiales que Euclides y Platón le habían impuesto. Para ellos sólo había una forma de hacer matemáticas. Debía empezarse por los axiomas y proseguir a través de una inexorable secuencia de pasos lógicos, utilizando herramientas perfectamente establecidas. Arquímedes, de espíritu más libre, utilizaba en cambio cualquier recurso que se le ocurría para formular nuevos problemas y resolverlos. No vacilaba en explorar y sacar provecho de las relaciones entre los objetos matemáticos abstractos (las formas platónicas) y la realidad física (sólidos y objetos planos reales) para progresar.

Un último ejemplo que consolida aún más el estatus de «mago» de Arquímedes: fue capaz de prever el *cálculo diferencial e integral*[79] —una rama de la matemática desarrollada formalmente por Newton (y, de forma independiente, por el matemático alemán Leibnitz) a finales del siglo XVII—.

La idea básica que subyace al proceso de *integración* es bastante simple (¡después de señalarla!). Supongamos que queremos determinar el área de un segmento de elipse. Se puede dividir el área en muchos rectángulos de la misma anchura y luego sumar las áreas de esos rectángulos (figura 14).

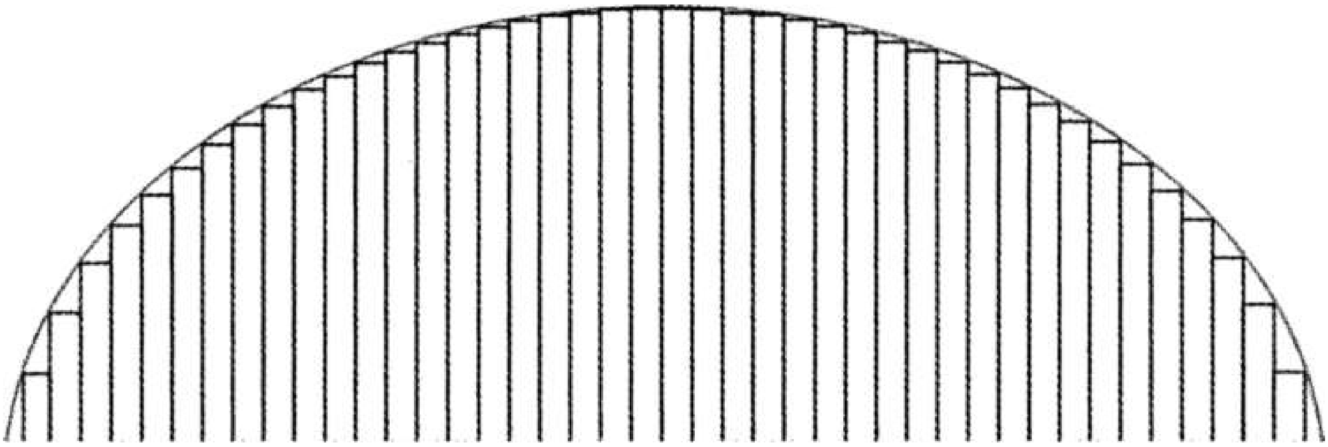


FIGURA 14

Por supuesto, cuantos más rectángulos se utilicen, más se aproximará la suma al área real del segmento. En otras palabras, el área del segmento es en realidad igual al *límite* al que se acerca la suma de los rectángulos cuando el número de éstos tiende a infinito. El proceso de hallar este límite se denomina *integración.* Arquímedes utilizó su propia versión del método que acabo de describir para hallar los volúmenes y las superficies de la esfera, del cono y de elipsoides y paraboloides (los sólidos que se obtienen al hacer girar elipses o parábolas sobre sus ejes).

Uno de los principales objetivos del *cálculo diferenciales* hallar la pendiente de una línea recta *tangente* a una curva en un punto determinado (la línea que toca a la curva únicamente en ese punto). Arquímedes resolvió el problema para el caso especial de una espiral, en un atisbo de lo que serían los futuros trabajos de Newton y Leibnitz. En la actualidad, el cálculo diferencial e integral y las ramas derivadas constituyen la base de la mayoría de los modelos matemáticos, tanto en física como en ingeniería, economía o dinámica de poblaciones.

Arquímedes cambió profundamente el mundo de las matemáticas y la percepción de su relación con el cosmos. Con su asombrosa combinación de intereses teóricos y prácticos, *ofreció las primeras pruebas empíricas, no míticas; del diseño aparentemente matemático de la naturaleza.* La percepción de que las matemáticas son el «idioma» del universo nació con la obra de Arquímedes. Sin embargo, Arquímedes dejó algo por hacer: nunca comentó las *limitaciones* de sus modelos matemáticos al aplicarlos a las circunstancias físicas reales. Sus comentarios teóricos sobre palancas, por ejemplo, suponían que éstas tenían una rigidez infinita, y que las varas carecían de peso. Así, en cierto modo, abrió la puerta a la interpretación de «salvar las apariencias» de los modelos matemáticos. Me refiero a la idea de que los modelos matemáticos pueden representar únicamente *lo que los humanos observan,* y no describen la verdadera realidad física. El matemático griego Gémino (ca. 10 a.C.-60 d.C.) fue el primero en hablar con cierto detalle de las diferencias entre los modelos matemáticos y las explicaciones físicas en relación con el movimiento de los cuerpos celestes.[80] Distinguía entre astrónomos (o matemáticos), que, en su opinión, sólo tenían que sugerir modelos que *reprodujesen* los movimientos celestiales, y físicos, que debían hallar *explicaciones* para los movimientos reales. Esta distinción en particular llegaría a un punto crítico en la época de Galileo, y volveré a ella más adelante en este capítulo.

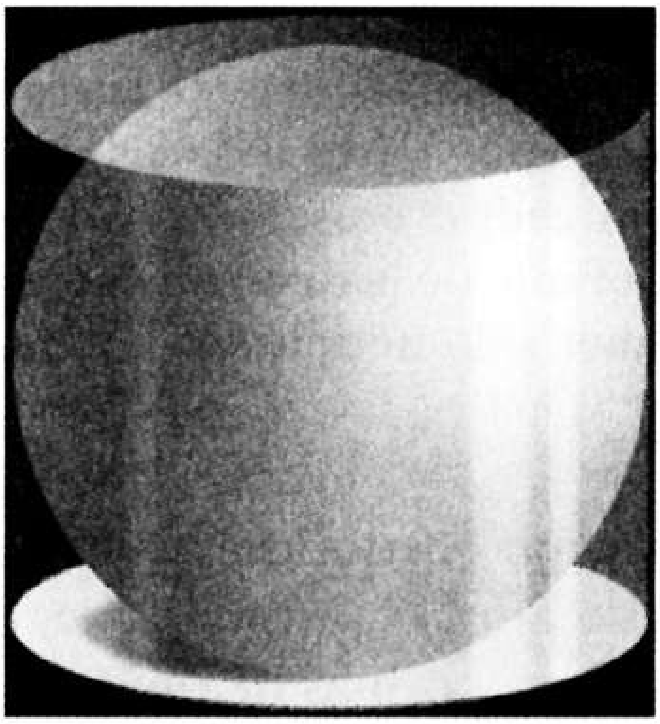


FIGURA 15

Sorprendentemente, el propio Arquímedes consideraba uno de sus mayores logros el descubrimiento de que el volumen de una esfera inscrita en un cilindro (figura 15) era siempre 2/3 del volumen del cilindro. Estaba tan satisfecho con este resultado que hizo que lo grabaran en su lápida.[81] Unos ciento treinta y siete años después de la muerte de Arquímedes, el famoso orador romano Marco Tulio Cicerón (ca. 106-43 a.C.) descubrió la tumba del insigne matemático, lo que describe de esta forma conmovedora:

> Siendo yo cuestor en Sicilia pude localizar su tumba [de Arquímedes]. Los siracusanos no sabían nada de ella, y de hecho negaban incluso su existencia. Pero allí estaba, completamente oculta por arbustos de

> zarzas y espinos. Recordé haber oído hablar de unos versos inscritos en su lápida que hablaban de un modelo de una esfera y un cilindro sobre la piedra que coronaba su tumba. Así que examiné con atención las numerosas tumbas que se erguían junto a la puerta de Agrigento. Finalmente, observé una pequeña columna apenas visible por encima de la maleza, sobre la que se distinguían una esfera y un cilindro. Inmediatamente me volví a los ilustres ciudadanos de Siracusa que me acompañaban, y les indiqué que creía que ése era el objeto que estaba buscando. Enviaron a llamar a hombres con hoces para despejar el lugar y, cuando el monumento quedó al descubierto, nos acercamos a él. Y los versos aún podían verse, aunque aproximadamente la segunda mitad de cada línea se había desgastado. Así, una de las ciudades más famosas del mundo griego, un centro de sabiduría de la Antigüedad, habría permanecido ignorante de la tumba del más brillante de sus ciudadanos, ¡de no haber sido porque un hombre de Arpino acudió a señalarla! [82]

Mi listón para ser merecedor del título de «mago» lo he colocado deliberadamente a una altura tal que, desde el gigante Arquímedes, es necesario saltar más de diecisiete siglos antes de hallar a alguien de una estatura similar. A diferencia de Arquímedes, que dijo que podía mover la Tierra, este «mago» insistía en que la Tierra ¡ya se estaba moviendo!

El mejor alumno de Arquímedes

Galileo Galilei (figura 16) nació en Pisa el 15 de febrero de 1564.[83]

FIGURA 16

Su padre, Vincenzo, era músico, y su madre, Giulia Ammannati, era una ingeniosa, aunque algo intolerante, mujer que no podía soportar la estupidez. En 1581, Galileo siguió el consejo de su padre y se inscribió en la facultad de artes de la Universidad de Pisa para estudiar medicina. Sin embargo, su interés por la medicina se desvaneció al poco de empezar, en favor de la matemática. Así, durante las vacaciones de verano de 1583, Galileo persuadió al matemático de la corte de Toscana, Ostilio Ricci (1540-1603) para que hablase con su padre y le convenciese de que el destino de Galileo era convertirse en matemático. La cuestión quedó resuelta enseguida, y el entusiasta joven quedó absolutamente maravillado por la obra de Arquímedes: «Aquellos que leen sus trabajos», escribió, «pueden darse perfecta cuenta de la inferioridad de las demás mentes en comparación con la de Arquímedes, y de la escasa esperanza de poder hacer descubrimientos similares a los que él efectuó».[84] Poco imaginaba Galileo en aquel entonces que él mismo poseía una de esas raras mentes que no eran inferiores a la del maestro griego. Inspirado por la leyenda de Arquímedes y la corona del rey, Galileo publicó en 1586 un opúsculo titulado *La pequeña balanza* sobre una balanza hidrostática de su invención. Más adelante volvió a citar a Arquímedes en una conferencia sobre literatura en la Academia de Florencia, en la que comentaba un tema poco corriente: la ubicación y tamaño del infierno en el poema épico de Dante, *Inferno.*

En 1589, Galileo fue designado titular de la cátedra de matemáticas de la Universidad de Pisa, debido en parte a la enérgica recomendación de Christopher Clavius (1538-1612), un respetado matemático y astrónomo de Roma a quien Galileo había visitado en 1587. La fama del joven matemático estaba en pleno auge. Galileo pasó los tres años siguientes exponiendo sus primeras ideas sobre la teoría del movimiento. Estos ensayos, estimulados por la obra de Arquímedes, contienen una combinación fascinante de ideas interesantes y afirmaciones falsas. Por ejemplo, al tiempo que establecía la pionera noción de que se pueden comprobar las teorías sobre la caída de los cuerpos empleando un plano inclinado para que el movimiento sea más lento, Galileo afirmaba incorrectamente que, al dejar caer un cuerpo de una torre, «la madera se mueve más rápidamente que el plomo al principio de su movimiento».[85] Las tendencias y los procesos mentales de Galileo durante esta etapa de su vida fueron parcialmente deformadas por su primer biógrafo, Vincenzo Viviani (1622-1703). Viviani creó la imagen popular de un estricto experimentalista terco y meticuloso, cuya inspiración procedía exclusivamente de la atenta observación de los fenómenos naturales.[86] En realidad, hasta su traslado a Padua en 1592, la orientación y la metodología de Galileo eran principalmente matemáticas. Solía apoyarse en «experimentos mentales» y en la descripción arquimediana del mundo en términos de figuras geométricas sometidas a leyes matemáticas. En aquellos días, su principal reproche a Aristóteles era que éste «no sólo ignoraba los descubrimientos más profundos y abstrusos de la geometría, sino incluso los principios más elementales de esta ciencia».[87] Galileo opinaba también que Aristóteles se basaba en exceso en las experiencias sensoriales «porque, a primera vista, ofrecen la apariencia de verdad». En su lugar, Galileo proponía «emplear en todo momento el raciocinio en lugar de los ejemplos (porque buscamos las causas de los efectos, y no es la experiencia la que las revela)».

El padre de Galileo murió en 1591, animando al joven, que debía convertirse en el sostén económico de la familia, a que aceptase una plaza en Padua, donde su salario sería triplicado. Los dieciocho años siguientes fueron los más dichosos en la vida de Galileo. En Padua inició una prolongada relación con Marina Gamba, con quien nunca se casó, pero que le dio tres hijos: Virginia, Livia y Vincenzo.[88]

El 4 de agosto de 1597, Galileo dirigió una misiva al gran astrónomo alemán Johannes Kepler en la que admitía que hacía mucho tiempo que «era copernicano», y agregaba que el modelo heliocéntrico de Copérnico permitía dar explicación a diversos hechos naturales que la doctrina geocéntrica era incapaz de explicar. Se lamentaba, no obstante, del hecho de que Copérnico «hubiese sido ridiculizado y expulsado de la escena». Esta carta marcó el inicio de la trascendental fisura entre Galileo y la cosmología de Aristóteles. La astrofísica moderna empezaba a tomar forma.

El mensajero de los cielos

En la noche del 9 de octubre de 1604, los astrónomos de Verona, Roma y Padua se asombraron al descubrir una nueva estrella que rápidamente se hizo más brillante que todas las estrellas del firmamento. El meteorólogo Jan Brunowski, que trabajaba para la corte imperial en Praga, vio también el fenómeno el 10 de octubre y, terriblemente agitado, informó de ello a Kepler. Las nubes impidieron a Kepler observar la estrella hasta el 17 de octubre; sin embargo, desde ese momento, Kepler mantuvo un registro de sus observaciones durante aproximadamente un año, y finalmente publicó un libro acerca de la «nueva estrella» en 1606. Actualmente sabemos que el espectáculo celeste de 1604 no marcaba el nacimiento de una nueva estrella, sino más bien la explosiva muerte de una estrella vieja. Este evento, que ahora se conoce como *supernova de Kepler,* causó sensación en Padua. Galileo pudo ver la nueva estrella con sus propios ojos a finales de octubre de 1604, y en los meses de diciembre y enero posteriores dio tres conferencias públicas sobre ello con gran éxito de asistencia. Apelando al conocimiento por encima de la superstición, Galileo apuntó que la ausencia de un desplazamiento (paralaje) observable en la posición de la nueva estrella (contra el fondo de estrellas fijas) demostraba que dicha estrella debía de hallarse más allá de la región lunar. El significado de esta observación era tremendo. En el mundo aristotélico, los cambios en los cielos se restringían a este lado de la Luna, mientras que la esfera de estrellas fijas, mucho más distante, se suponía inviolable e inmune al cambio.

Las esferas inmutables ya habían empezado a hacerse añicos en 1572, cuando el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) observó otra explosión estelar que se conoce en la actualidad como *supernova de Tycho.* El acontecimiento de 1604 representaba otra palada de tierra sobre la cosmología de Aristóteles. Pero el verdadero avance en la comprensión del cosmos no vino del reino de la especulación teórica ni de las observaciones realizadas a simple vista. Más bien fue el resultado de un sencillo experimento con lentes de cristal convexas (abultadas hacia fuera) y cóncavas (curvadas hacia dentro): al colocar dos lentes adecuadas a unos 33 centímetros de distancia entre sí, los objetos lejanos parecen aproximarse. Por el año 1608, estos catalejos empezaron a aparecer por toda Europa, y dos fabricantes de gafas flamencos y uno holandés solicitaron incluso la patente. Los rumores sobre este milagroso instrumento llegaron a oídos del teólogo veneciano Paolo Sarpi, que habló de ello a Galileo sobre mayo de 1609. Deseoso de confirmar la información, Sarpi escribió también a un amigo suyo de París para preguntarle si los rumores eran ciertos. Según su propio testimonio, Galileo se vio «invadido por el deseo de poseer ese bello objeto». Más adelante hablaría de estos hechos en el libro *El mensajero sideral*, aparecido en marzo de 1610:

> Cerca de diez meses hace ya que llegó a nuestros oídos la noticia de que cierto belga había fabricado un anteojo mediante el que los objetos visibles muy alejados del ojo del observador se discernían claramente como si se hallasen próximos. Sobre dicho efecto, en verdad admirable, contábanse algunas experiencias a las que algunos daban fe, mientras que otros las negaban. Este extremo me fue confirmado pocos días después en una carta de un noble galo, Jacobo Badovere, de París, lo que constituyó el motivo que me indujo a aplicarme por entero a la búsqueda de las razones, no menos que a la elaboración de los medios por los que pudiera alcanzar la invención de un instrumento semejante, lo que conseguí poco después basándome en la doctrina de las refracciones.[89]

Galileo manifiesta aquí el mismo tipo de pensamiento práctico creativo que caracterizaba a Arquímedes: una vez supo que era posible construir un telescopio, no tardó demasiado en averiguar cómo construir uno él mismo. Es más, entre agosto de 1609 y marzo de 1610, Galileo utilizó su inventiva para perfeccionar su telescopio desde un aparato que podía acercar los objetos ocho veces, a un dispositivo con una potencia de veinte. Pero la grandeza de Galileo no se reveló en esta hazaña técnica y en su pericia, sino en el uso que dio a su tubo de mejora de la visión (al que llamó *perspicillum)*. En lugar de espiar los distantes barcos del puerto de Venecia o de examinar los tejados de Padua, Galileo apuntó su telescopio hacia el cielo. Las consecuencias de ello no tienen precedente en la historia de la ciencia. En palabras del historiador de la ciencia Noel Swerdlow: «En unos dos meses, diciembre y enero [de 1609 y 1610 respectivamente], Galileo hizo más descubrimientos que cambiaron la faz del mundo de los que nadie había hecho jamás hasta entonces ni después».[90] De hecho, el año 2009 ha sido bautizado como «Año Internacional de la Astronomía» para conmemorar el 400 aniversario de las primeras observaciones de Galileo. ¿Qué hizo realmente Galileo para convertirse en un héroe científico de tan colosal magnitud? He aquí algunas de sus sorprendentes proezas con el telescopio.

Volviendo el telescopio hacia la Luna y observando especialmente el terminador (la línea que divide las partes iluminada y sombría), Galileo halló que la superficie de este cuerpo celeste era desigual, con montañas, cráteres y vastas llanuras.[91] Observó cómo aparecían puntos de luz en la zona cubierta de tinieblas, y cómo estas luces se hacían más extensas, de forma similar a cimas de montañas iluminadas por la claridad del sol naciente. Utilizó incluso la geometría de esta iluminación para determinar la altura de una montaña, que resultó ser de más de 6 kilómetros. Pero eso no fue todo. Galileo vio que la parte oscura de la Luna (en fase creciente) está también levemente iluminada, y llegó a la conclusión de que se debía a la luz solar reflejada desde la Tierra. Del mismo modo que la Luna llena ilumina la Tierra, Galileo afirmó que la superficie lunar recibe aún en mayor medida la luz reflejada desde la Tierra.

Aunque algunos de estos descubrimientos no eran completamente nuevos, la solidez de las pruebas de Galileo elevó la discusión a otro nivel. Hasta la época de Galileo, la distinción entre lo *terrestre y* lo *celeste*, lo que pertenecía a la Tierra y lo que pertenecía a los cielos, estaba perfectamente delimitada. La diferencia no era únicamente científica o filosófica: una profusión de mitologías, religiones, poesía romántica y sensibilidad estética había surgido de la percepción de esta diferencia entre la Tierra y el cielo. Lo que ahora decía Galileo se consideraba poco menos que inconcebible. Contrariamente a la doctrina de Aristóteles, la Tierra y un cuerpo celeste (la Luna) quedaban de hecho equiparados: la superficie de ambos era rugosa, y ambos reflejaban la luz del Sol.

Más allá de la Luna, Galileo empezó a observar los *planetas* (un nombre que los griegos habían dado a los cuerpos «errantes» del cielo nocturno). Dirigió su telescopio hacia Júpiter el 7 de enero de 1610 y se asombró al descubrir tres nuevas estrellas alineadas en una dirección que cruzaba el planeta, dos al este y una al oeste. La posición aparente de las nuevas estrellas pareció cambiar con respecto al planeta durante las noches siguientes. El 13 de enero, Galileo observó una cuarta estrella como éstas. Pasada una semana de su primer descubrimiento, Galileo llegó a una extraordinaria conclusión: las nuevas estrellas eran en realidad *satélites* que orbitaban en torno a Júpiter, de igual modo que la luna orbitaba alrededor de la Tierra.

Una de las características que distingue a las personas que han causado una conmoción significativa en la historia de la ciencia es su capacidad para captar de inmediato qué descubrimientos iban a marcar la diferencia. Otro rasgo de muchos de los científicos más influyentes es su habilidad para hacer que otras personas entendieran su descubrimiento. Galileo dominaba con autoridad estos dos aspectos. Preocupado por la posibilidad de que otra persona descubriese también los satélites jovianos, Galileo publicó enseguida sus resultados; en la primavera de 1610 apareció en Venecia su tratado *Sidereus Nuncius.* Mostrando gran astucia política, Galileo dedicó el libro al Gran Duque de Toscana, Cósimo II de Médicis, y dio a los satélites el nombre de «estrellas mediceanas».

Dos años más tarde, después de lo que él denominó su «trabajo atlántico», Galileo pudo determinar los períodos orbitales —el tiempo que cada uno de los cuatro satélites tardaba en dar la vuelta a Júpiter— con una precisión de pocos minutos. *El mensajero sideral se* convirtió en un *best seller* al instante —las 500 copias originales se vendieron como churros— y Galileo se hizo famoso en todo el continente.

La importancia del descubrimiento de los satélites de Júpiter es fundamental.[92] No sólo se trataba de los primeros cuerpos celestes que se sumaban al sistema solar desde las observaciones de los antiguos griegos, sino que la mera existencia de estos satélites acababa de un solo golpe con una de las más serias objeciones a la doctrina de Copérnico. Los aristotélicos sostenían que era imposible que la Tierra orbitase alrededor del Sol, ya que la Luna giraba alrededor de la propia Tierra. ¿Cómo iba a tener el universo dos centros de rotación independientes? El descubrimiento de Galileo demostraba de forma inequívoca que un planeta podía tener satélites orbitando a su alrededor al tiempo que seguía su propia trayectoria alrededor del Sol.

Otro importante descubrimiento efectuado por Galileo en 1610 fueron las fases del planeta Venus. En la doctrina geocéntrica, se suponía que Venus se movía en un pequeño círculo (un *epiciclo)* superpuesto a su órbita alrededor de la Tierra. Se suponía que el centro del epiciclo se hallaba siempre en la línea que unía la Tierra y el Sol (figura 17a; el dibujo no está a escala).

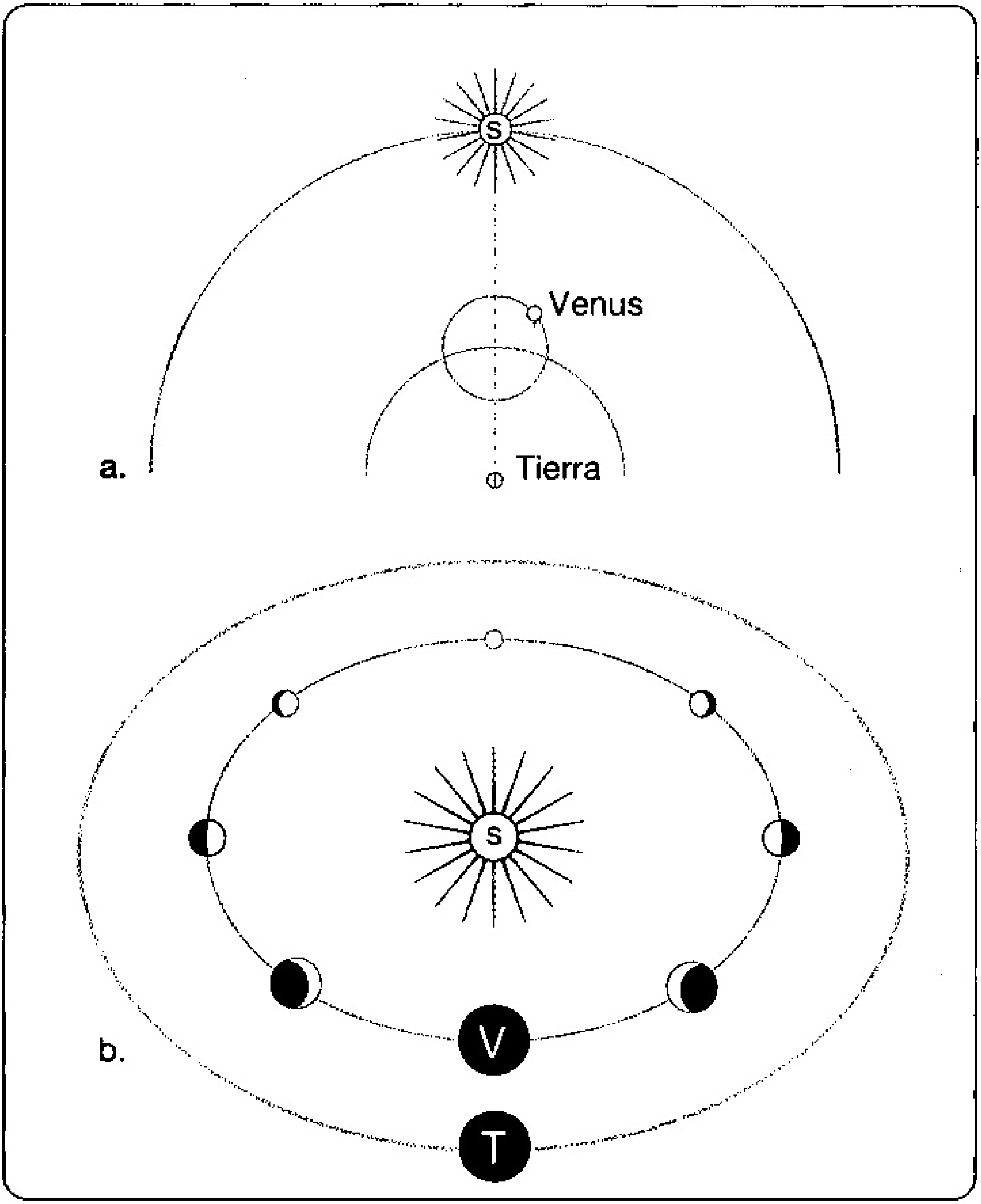


Figura 17

En ese caso, al observarlo desde la Tierra, se espera que Venus aparezca siempre en una fase creciente de anchura ligeramente variable. En cambio, en el sistema copernicano, el aspecto de Venus debería cambiar, desde un pequeño disco brillante cuando el planeta está al otro lado del Sol (respecto de la Tierra) a un disco de gran tamaño y prácticamente oscuro cuando se halla en el mismo lado que la Tierra (figura 17b). Entre estas dos posiciones, Venus debería pasar por una serie completa de fases similares a las de la Luna. Galileo intercambió correspondencia con su antiguo alumno Benedetto Castelli (1578-1643) sobre esta importante diferencia entre las predicciones de ambas doctrinas, y efectuó las observaciones decisivas entre octubre y diciembre de 1610. El veredicto fue obvio. Las observaciones confirmaban de modo concluyente la predicción copernicana, demostrando que, efectivamente, Venus gira alrededor del Sol. El 11 de diciembre, un travieso Galileo envió a Kepler el siguiente críptico anagrama: *Haec immatura a me iam frustra leguntur oy* («Estas cosas son leídas por mí en vano, prematuramente, o.y.»).[93] Kepler intentó sin éxito descifrar el mensaje oculto, pero acabó dándose por vencido.[94] En su siguiente carta, del 1 de enero de 1611, Galileo transpuso las letras del anagrama, que decía: *Cynthiae figuras aemulatur mater amorum* («la madre del amor [Venus] emula las figuras de Diana [la Luna]»).

Todos los descubrimientos descritos hasta ahora tenían que ver con *planetas* del sistema solar —cuerpos celestes que giraban alrededor del Sol y reflejaban su luz— o *satélites* que giraban alrededor de estos planetas. Galileo efectuó también dos descubrimientos fundamentales relacionados con *estrellas*—cuerpos celestes que generan su propia luz, como el Sol—. En primer lugar, realizó observaciones del propio Sol. En la visión del mundo aristotélica, se suponía que el Sol simbolizaba la perfección y la inmutabilidad ultraterrenas. No es difícil imaginar el shock que produjo saber que la superficie del Sol no tiene nada de perfecta, sino que contiene manchas, zonas oscuras, que aparecen y desaparecen a medida que el Sol rota sobre su propio eje. En la figura 18 se muestran dibujos de las manchas solares realizados por el propio Galileo, sobre los que su colega Federico Cesi (1585-1630) señaló que «deleitan tanto por la maravilla del espectáculo que muestran como por su precisión». En realidad, Galileo no fue el primero que vio las manchas solares, ni siquiera el primero que escribió sobre ellas. Un folleto en particular, *Tres cartas sobre manchas solares*, escrito por el sacerdote jesuita y científico Christopher Scheiner (1573-1650) enojó de tal modo a Galileo que éste se sintió obligado a publicar una pormenorizada respuesta. Scheiner argüía que era imposible que las manchas estuviesen sobre la propia superficie del Sol.[95] Para ello se basaba en parte en que las manchas eran, en su opinión, demasiado frías (pensaba que eran más oscuras que las zonas oscuras de la Luna) y en parte en el hecho de que no siempre parecían regresar a las mismas posiciones. En consecuencia, Scheiner creía que se trataba de pequeños planetas que orbitaban alrededor del Sol. En su *Historia y demostraciones en torno a las manchas solares*, Galileo destrozó sistemáticamente y uno por uno los argumentos de Scheiner. Con una meticulosidad, ingenio y sarcasmo que hubiesen hecho que Oscar Wilde se pusiese en pie para aplaudir, Galileo mostró que las manchas no eran, en realidad, oscuras, sino que sólo lo eran en relación al brillo de la superficie solar. Asimismo, el trabajo de Galileo no dejaba lugar a dudas: las manchas estaban sobre la misma superficie del Sol (más adelante en el capítulo volveré a tratar sobre cómo demostró Galileo este hecho).

Las observaciones que Galileo hizo de otras estrellas fueron realmente la primera incursión del ser humano más allá del sistema solar. A diferencia del caso de la Luna y los planetas, Galileo descubrió que el telescopio apenas ampliaba las imágenes de las estrellas. La implicación era evidente: las estrellas estaban mucho más alejadas que los planetas. Esto representaba un dato sorprendente, pero lo que fue una verdadera revelación fue el colosal *número* de nuevas y tenues estrellas reveladas por el telescopio. Sólo en una zona pequeña próxima a la constelación de Orion, Galileo descubrió no menos de 500 nuevas estrellas. Sin embargo, cuando Galileo volvió su telescopio a la Vía Láctea —la débil faja de luz que cruza el cielo nocturno— le esperaba la mayor de las sorpresas. Aquel salpicón de luz de aspecto uniforme se convirtió en un sinnúmero de estrellas que ningún humano había visto antes. De improviso, el universo se había hecho mucho mayor. En el algo desapasionado lenguaje científico, Galileo escribió:

> Lo que observamos en tercer lugar es la naturaleza de la materia de la propia Vía Láctea que, con la ayuda del catalejo, puede observarse con tal claridad que todas las discusiones que han desconcertado a los filósofos durante generaciones quedan destruidas por una certeza visible que nos libera de argumentos mundanos. Porque la Galaxia no es más que la reunión de innumerables estrellas distribuidas en cúmulos. En cualquier región a la que se dirija el catalejo se ofrecen de inmediato a la vista un inmenso número de estrellas. De éstas, muchas parecen ser de gran tamaño y harto conspicuas, pero la multitud de pequeñas estrellas es realmente inconmensurable.

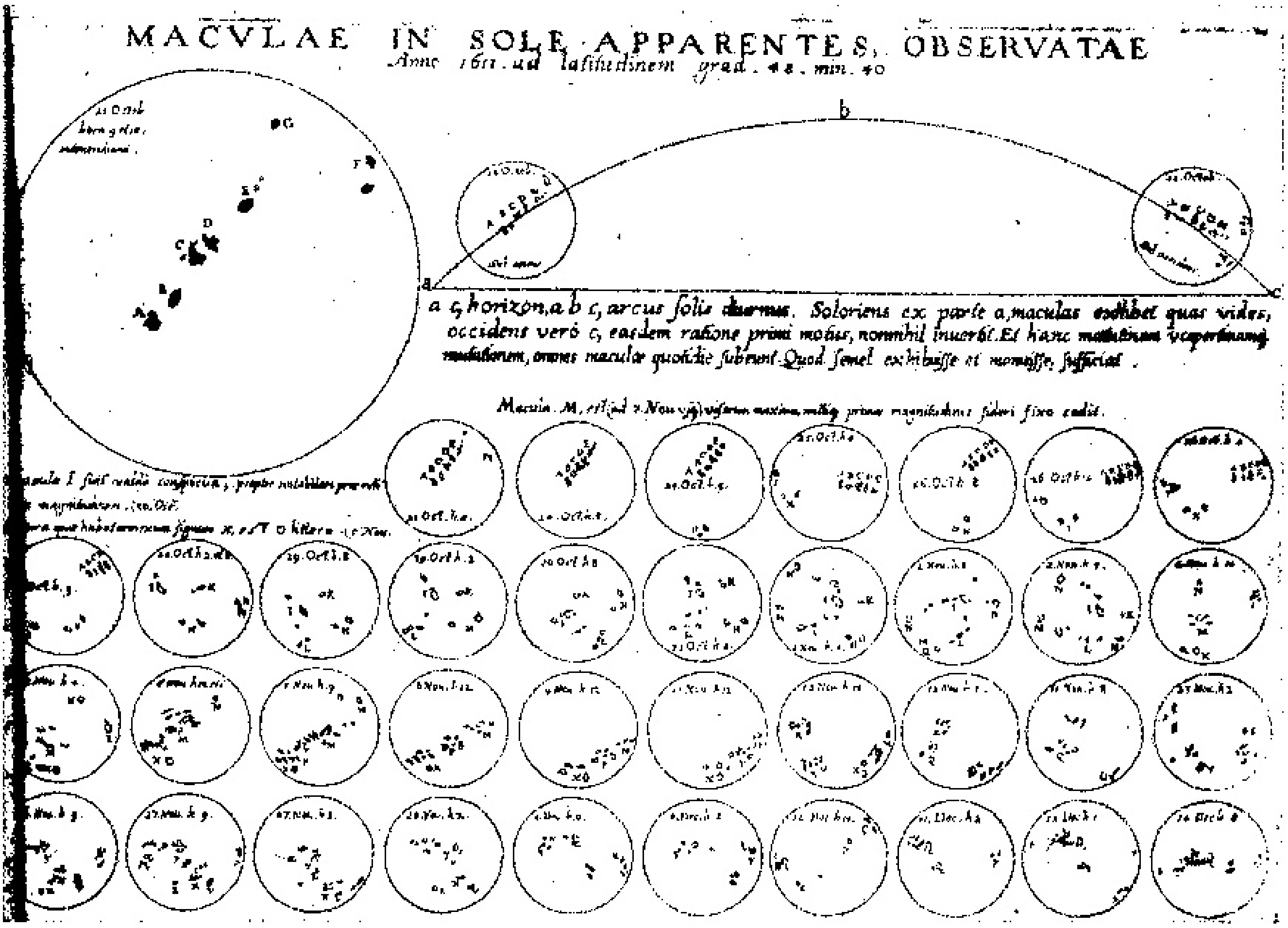


FIGURA 18

Algunos de los contemporáneos de Galileo reaccionaron con entusiasmo. Sus descubrimientos inflamaron la imaginación de científicos y profanos en toda Europa. El poeta escocés Thomas Seggett escribía, enardecido:

> Colón dio al hombre nuevas tierras que conquistar por la sangre, Galileo, nuevos mundos nocivos para nadie. ¿Qué es mejor?[96]

Sir Henry Wotton, un diplomático inglés destinado a Venecia, logró hacerse con una copia del *Sidereus Nuncius* el mismo día de su publicación, e inmediatamente lo envió al rey Jaime I de Inglaterra con una nota que decía, entre otras cosas:

> Envío a Su Majestad la noticia más singular (creo que el nombre le hace justicia) que haya recibido nunca desde este rincón del mundo; se trata del libro adjunto (aparecido en el día de hoy) del profesor de Matemáticas de Padua quien, con la ayuda de un instrumento óptico … ha descubierto cuatro nuevos planetas que giran alrededor de la esfera de Júpiter, además de otras muchas estrellas fijas antes desconocidas.[97]

Se podrían escribir volúmenes enteros (y de hecho, se han escrito) sobre los logros de Galileo, pero esto va más allá del ámbito del presente libro. Aquí sólo pretendo examinar el efecto de algunas de estas sorprendentes revelaciones sobre la visión que Galileo tenía del universo. En particular, sobre la relación percibida por éste entre la matemática y el vasto cosmos que había desvelado.

EL GRAN LIBRO DE LA NATURALEZA

El filósofo de la ciencia Alexandre Koyré (1892-1964) señaló en cierta ocasión que la revolución del pensamiento científico provocada por Galileo se podía resumir en un elemento esencial: *el descubrimiento de que la matemática es la gramática de la ciencia.* Mientras que los aristotélicos estaban satisfechos con su descripción cualitativa de la naturaleza, e incluso para ella apelaban a la autoridad de Aristóteles, Galileo sostenía que los científicos debían estar atentos a la propia naturaleza, y que las claves para descifrar el lenguaje del universo eran las relaciones matemáticas y los modelos geométricos. El marcado contraste entre ambos puntos de vista se ponía de manifiesto en los escritos de los miembros más destacados de ambas tendencias. El aristotélico Giorgio Coresio escribe: «Podemos, pues, concluir que aquel que no quiera moverse en las tinieblas deberá consultar a Aristóteles, el más excélente intérprete de la naturaleza».[98] A lo que otro aristotélico, el filósofo de Pisa Vincenzo di Grazia, agrega:

> Antes de tomar en consideración las demostraciones de Galileo, parece necesario demostrar cuan lejos se hallan de la realidad aquellos que pretenden probar los hechos de la naturaleza mediante razonamiento matemático, entre los cuales, si no me equivoco, se encuentra Galileo. Todas las ciencias y artes tienen sus propios principios y sus propias causas, mediante los cuales demuestran las propiedades especiales de los objetos que les son propios. *En consecuencia, no está permitido utilizar los principios de una ciencia para demostrar las propiedades de otra.* Así, quienquiera que piense que puede demostrar las propiedades naturales mediante argumentos matemáticos no es más que un demente, pues ambas ciencias son muy distintas. El científico natural estudia los objetos naturales cuyo estado natural y adecuado es el movimiento, mientras que el matemático se abstrae de todo movimiento. (La cursiva es mía.)[99]

El concepto de compartimentos herméticos en las diversas ramas de la ciencia era precisamente el tipo de idea que sacaba a Galileo de sus casillas. En el borrador de su tratado sobre hidrostática, *Diálogo sobre los cuerpos flotantes,* presentaba la matemática como una poderosa herramienta que permite desvelar los secretos de la naturaleza:

> Espero un tremendo rechazo por parte de uno de mis adversarios, y casi puedo oír sus gritos diciéndome que una cosa es tratar los asuntos de forma física y otra de forma matemática, y que los geómetras deben limitarse a sus fantasías y no meterse en cuestiones filosóficas, cuyas conclusiones son distintas de las conclusiones matemáticas. ¡Como si pudiese haber más de una verdad! ¡Como si la geometría en nuestros días fuese un obstáculo que impide alcanzar la verdadera filosofía! ¡Como si fuese imposible ser a un tiempo geómetra y filósofo, de modo que, si alguien sabe de geometría, la consecuencia necesaria que se infiere es que no puede saber de física ni tratar los asuntos de forma física! Consecuencias insensatas, como la de cierto médico que, en un arrebato de cólera, dijo que el gran doctor Acquapendente

> [el anatomista italiano Hyeronimus Fabricius de Acquapendente (1537-1619)], siendo un famoso anatomista y cirujano, debía contentarse con sus escalpelos y ungüentos y no tratar de curar mediante los procedimientos de la medicina, como si los conocimientos de cirugía fuesen opuestos a la medicin a y la anulasen.[100]

Un ejemplo simple de hasta qué punto estas distintas actitudes hacia las conclusiones observacionales podían alterar por completo la interpretación de los fenómenos naturales lo tenemos en el descubrimiento de las manchas solares. Como señalaba antes, el astrónomo jesuita Christopher Scheiner observó estas manchas de una forma meticulosa y competente. Sin embargo, cometió el error de permitir que sus prejuicios aristotélicos sobre la perfección de los cielos nublasen su capacidad de juicio. Por consiguiente, cuando descubrió que las manchas no regresaban a la misma posición y orden, anunció enseguida que podía «liberar al Sol de la herida de las manchas». Su premisa de la inmutabilidad celestial limitaba su imaginación y le impedía siquiera tomar en consideración la posibilidad de que las manchas pudiesen cambiar, incluso hasta resultar irreconocibles.[101] Por lo tanto, su conclusión fue que las manchas *debían* ser estrellas que orbitaban alrededor del Sol. La estrategia de ataque de Galileo al problema de la distancia entre las manchas y la superficie del Sol era completamente diferente. Galileo identificó tres observaciones que precisaban de explicación. En primer lugar, las manchas parecían ser más delgadas cuando estaban cerca del borde del disco solar que cuando estaban próximas al centro. En segundo lugar, las separaciones entre las manchas parecían aumentar a medida que éstas se acercaban al centro del disco. Finalmente, las manchas parecían desplazarse más rápidamente cerca del centro que en las proximidades del borde del disco. A Galileo le bastó una construcción geométrica para demostrar que su hipótesis —que las manchas eran contiguas a la superficie del Sol y que se desplazaban con ella— era coherente con todos los hechos observados. Su explicación detallada se basaba en el fenómeno visual del *escorzo* sobre una esfera, es decir, el hecho de que las formas parecen más delgadas y más juntas cerca del borde (en la figura 19 se muestra este efecto para círculos sobre una superficie esférica).

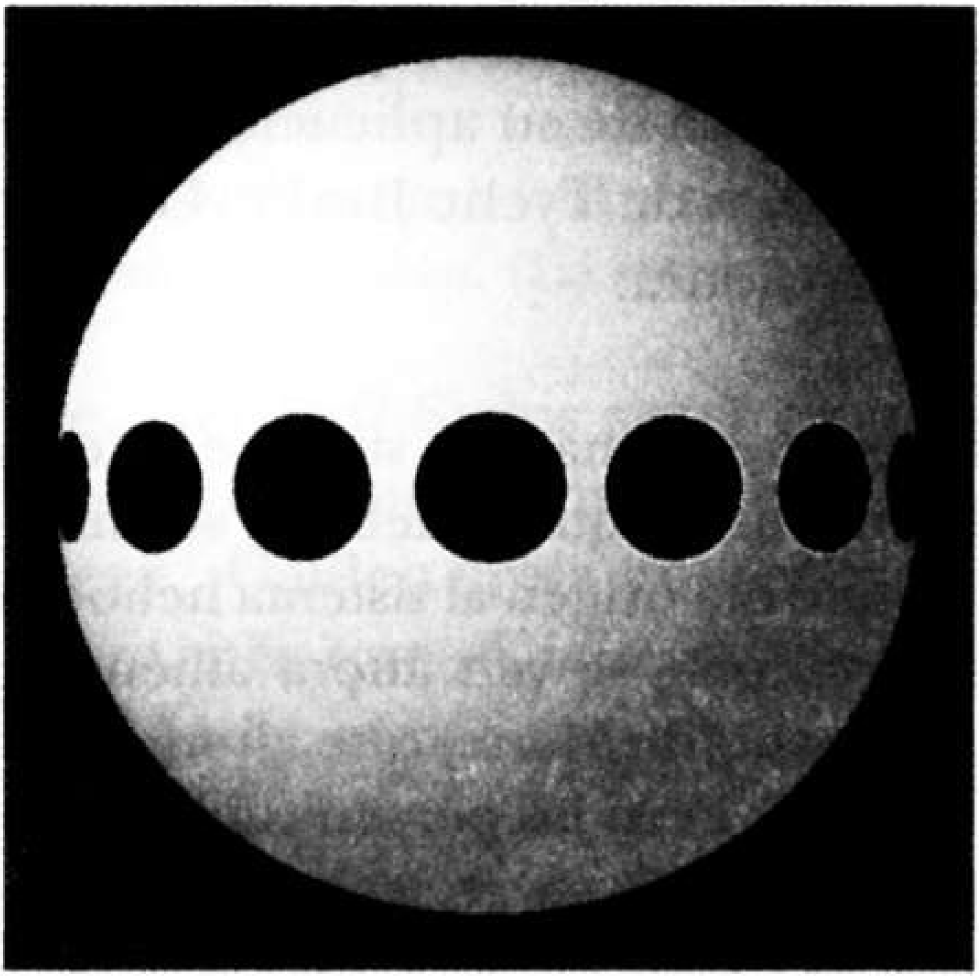


FIGURA 19

La importancia de la demostración de Galileo para sentar las bases del proceso científico fue extraordinaria. Galileo mostró que los datos observacionales sólo son descripciones significativas de la realidad *después de incluirlos en una teoría matemática adecuada.* Las mismas observaciones pueden llevar a interpretaciones ambiguas si no se interpretan dentro de un contexto teórico más amplio.

Galileo nunca renunciaba a una buena pelea. La exposición más elocuente de sus opiniones sobre la naturaleza de la matemática y su función en la ciencia se encuentra en otra polémica publicación: *El ensayista.* Este brillante tratado se hizo tan popular que el papa Urbano VIII hacía que se lo leyesen durante sus comidas. Curiosamente, la tesis central de Galileo en *El ensayista* era manifiestamente falsa. Galileo intentaba argumentar que los cometas eran en realidad fenómenos causados por peculiaridades de la refracción óptica en este lado de la Luna. La historia de *El ensayista* parece sacada del libreto de una ópera italiana.[102] En el otoño de 1618 se pudo observar una sucesión de tres cometas. El tercero, específicamente, fue visible durante casi tres meses. En 1619, Horado Grassi, un matemático del jesuita *Collegio Romano,* publicó de forma anónima un panfleto acerca de sus observaciones de los cometas. Siguiendo los pasos del insigne astrónomo danés Tycho Brahe, Grassi llegó a la conclusión de que los cometas se hallaban en algún punto entre el Sol y la Luna. El panfleto pudo haber pasado desapercibido, pero Galileo decidió darle respuesta cuando se enteró de que algunos jesuitas pensaban que la publicación de Grassi representaba un duro golpe al copernicanismo. Su respuesta tomó la forma de una serie de disertaciones dadas por su discípulo Mario Guiducci, aunque escritas principalmente por el propio Galileo.[103] En la versión publicada de estas conferencias, *Discurso sobre los cometas*, Galileo atacaba directamente a Grassi y a Tycho Brahe. Ahora le tocaba a Grassi sentirse ofendido, de modo que, con el seudónimo de Lothario Sarsi y haciéndose pasar por uno de sus propios alumnos, Grassi publicó una acérrima respuesta, en la que criticaba a Galileo sin ambages (la respuesta se titulaba *La balanza astronómica y filosófica, en la que se pesan las opiniones de Galileo Galilei, así como las presentadas por Mario Guiducci en la Academia Florentina)*. En defensa de su aplicación de los métodos de determinación de distancias de Tycho Brahe, Grassi (hablando como si fuese su alumno) sostenía:

> Supongamos que mi maestro siguiese las enseñanzas de Tycho. ¿Acaso es un crimen? ¿A quién debería seguir si no? ¿A Ptolomeo [el alejandrino que dio origen al sistema heliocéntrico], las gargantas de cuyos seguidores se ven ahora amenazadas por la espada blandida por la mano de Marte, que ahora se halla más próximo? ¿A Copérnico quizá? Pero las personas piadosas deben alejarse de él y rechazar con desdén su recientemente condenada hipótesis. Tycho es, pues, el único digno de ser reconocido como nuestro guía en las misteriosas trayectorias de las estrellas.[104]

Este texto demuestra con gran elegancia la delgada línea sobre la que debían hacer equilibrios los matemáticos jesuitas al principio del siglo XVII. Por un lado, las perspicaces críticas de Grassi hacia Galileo estaban perfectamente justificadas. Por otro, con su rechazo forzado al copernicanismo, Grassi se autoimponía una restricción que afectaba a su razonamiento global. A los amigos de Galileo les preocupaba que el ataque de Grassi minase la autoridad de Galileo, e instaron al maestro a responderle, lo que llevó a la publicación de *El ensayista* en 1623 (el título completo explica que en el documento «se pesan con una precisa balanza los contenidos de *La balanza astronómica y filosófica* de Lotahris Sarsi de Sigüenza).

Como ya he señalado, *El ensayista* contiene la declaración más clara e impactante de Galileo acerca de la relación entre la matemática y el cosmos. He aquí este notable texto:

> Creo que Sarsi está plenamente convencido de que, en filosofía, es fundamental apoyarse en la opinión de algún autor famoso, como si nuestro pensamiento fuese completamente árido y estéril si no está unido a los razonamientos de otro. Quizá piensa que la filosofía es una obra de ficción creada por un hombre, como *La Iliada* u *Orlando furioso* [un poema épico del siglo XVI escrito por Ludovico Ariosto] —libros en los que no tiene la menor importancia la verdad de lo que describen—. Señor Sarsi, las cosas no son de este modo. *La filosofía está escrita en el gran libro que está siempre abierto ante nuestros ojos (me refiero*

al universo) pero que no podemos comprender si no aprendemos en primer lugar su lenguaje y comprendemos los caracteres en los que está escrito.Está escrito en el lenguaje de la matemática, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales no es humanamente posible comprender ni una sola de sus palabras, y sin las cuales se deambula vanamente por un laberinto de tinieblas. (La cursiva es mía.)[105]

Impresionante, ¿verdad? Siglos antes de que se formulase siquiera la pregunta de por qué la matemática era tan eficaz para explicar la naturaleza, ¡Galileo creía poseer la respuesta! Para él, la matemática no era más que el *idioma* del universo. Para comprender el universo, decía, es necesario hablar su idioma. Dios es, evidentemente, un matemático.

Las ideas que se manifiestan en la obra de Galileo describen una imagen aún más detallada de su punto de vista sobre la matemática. En primer lugar, es necesario darse cuenta de que, para él, matemática significaba en última instancia geometría. Galileo tenía escaso interés en la medición de valores en forma de números absolutos. Su descripción de los fenómenos se basaba sobre todo en proporciones entre cantidades y en términos relativos. En este sentido, Galileo se mostraba de nuevo como un auténtico discípulo de Arquímedes, cuyo principio de la palanca y métodos de geometría comparada utilizó con profusión. Un segundo aspecto de interés, que se revela en especial en la última obra de Galileo, es la distinción que efectúa entre las funciones de la geometría y de la lógica. El libro, titulado *Diálogos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, está escrito en forma de animadas conversaciones entre tres interlocutores, Salviati, Sagredo y Simplicio, cuyos papeles están perfectamente delimitados.[106] Salviati es, de hecho, el portavoz de Galileo. La mente de Sagredo, el aristocrático aficionado a la filosofía, se ha zafado de las ilusiones del sentido común aristotélico y, por tanto, está dispuesto a dejarse persuadir por el poder de la nueva ciencia matemática. Simplicio, a quien en obras anteriores de Galileo se representaba como alguien fascinado por la autoridad de Aristóteles, aparece aquí como un erudito de mente abierta. En el segundo día de debates, Sagredo protagoniza un interesante intercambio con Simplicio:

Sagredo: ¿Qué podemos decir, Simplicio? ¿No debemos acaso admitir que la geometría es el más poderoso de los instrumentos para aguzar la mente y disponerla para el perfecto razonamiento y para la especulación? ¿Acaso no tenía razón Platón al exigir que sus discípulos se formaran primero en la matemática?

Simplicio parece estar de acuerdo, y presenta una comparación con la lógica:

Simplicio: En verdad empiezo a entender que, aunque la lógica es un instrumento de gran excelencia para gobernar nuestra razón, no puede compararse con la agudeza de la geometría para despertar nuestra mente a los descubrimientos.

A continuación, Sagredo destaca la distinción:

Sagredo: A mi parecer, la lógica enseña a saber si los razonamientos y las demostraciones ya descubiertas son concluyentes o no lo son, pero no creo que enseñe a hallar razonamientos o demostraciones concluyentes.

El mensaje de Galileo en este texto es simple: Galileo era de la opinión que la geometría era la herramienta que permite *descubrir* verdades nuevas. La lógica, por el contrario, era para él el medio de *evaluar y criticarlos* descubrimientos. En el capítulo 7 examinaremos una perspectiva distinta, según la cual toda la matemática surge de la lógica.

¿Cómo llegó Galileo a la noción de que la matemática era el lenguaje de la naturaleza? Después de todo, una conclusión filosófica de tal magnitud no pudo materializarse súbitamente de la nada. En efecto, las raíces de este concepto se pueden rastrear hasta los escritos de Arquímedes. El maestro griego fue el primero que utilizó la matemática para explicar fenómenos naturales. A través de un retorcido camino que pasa por ciertos calculadores medievales y matemáticos de la corte en Italia, la *naturaleza* de la matemática pasó a ser considerada un asunto digno de ser comentado. Finalmente, algunos de los matemáticos jesuitas de la época de Galileo, en particular Christopher Clavius, reconocieron también que la matemática podía ocupar un lugar intermedio entre la metafísica —los principios filosóficos de la naturaleza del ser— y la realidad física. En el prefacio («Prolegomena»), de sus *Comentarios a los Elementos de Euclides*, Clavius escribía:

Puesto que el objeto de las disciplinas matemáticas se considera apartado de la materia perceptible, a pesar de que aquéllas se hallan inmersas en lo material, es evidente que ocupan un lugar intermedio entre la metafísica y la ciencia natural, si tenemos en cuenta el asunto que tratan.

A Galileo no le satisfacía la idea de la matemática como un mero intermediario o conducto, y tuvo el valor de ir un paso más allá para igualar la matemática a la lengua materna de Dios. Esta identificación, no obstante, suscitó otro grave problema, que estaba destinado a afectar de forma espectacular a la vida de Galileo.

Ciencia y teología

Según Galileo, al diseñar la naturaleza, Dios hablaba el lenguaje de la matemática. Según la Iglesia Cristiana, Dios era el «autor» de la Biblia. ¿Qué sucedía entonces con los casos en los que las explicaciones científicas, fundamentadas en la matemática, parecían contradecir las Escrituras? Los teólogos del Concilio de Trento, en 1546, respondieron a ello en términos que no dejaban lugar a dudas: «…ninguno fiado en su propia sabiduría, se atreva a interpretar la misma sagrada Escritura en cosas pertenecientes a la fe, y a las costumbres que miran a la propagación de la doctrina cristiana, violentando la sagrada Escritura para apoyar sus dictámenes, contra el sentido que le ha dado y da la santa madre Iglesia, a la que privativamente toca determinar el verdadero sentido, e interpretación de las sagradas letras».

Del mismo modo, cuando en 1616 se consultó a los teólogos sobre su opinión acerca de la cosmología heliocéntrica de Copérnico, su conclusión fue que era «formalmente herética, pues contradice en muchos extremos de forma explícita el sentido de las Sagradas Escrituras». En otras palabras, la objeción fundamental de la Iglesia al copernicanismo de Galileo no era tanto el traslado de la Tierra fuera de su posición central en el cosmos como el *desafío a la autoridad de la Iglesia* en la interpretación de las Escrituras.[107] En un ambiente en el que la Iglesia Católica romana ya se veía asediada por las controversias con los teólogos de la Reforma, Galileo y la Iglesia se hallaban en trayectoria de choque.

Los acontecimientos se empezaron a precipitar a finales de 1613. El antiguo alumno de Galileo Benedetto Castelli presentó los nuevos descubrimientos astronómicos al Gran Duque y a su séquito. Como era de esperar, se vio obligado a dar explicaciones sobre las aparentes discrepancias entre la cosmología copernicana y algunas de las narraciones bíblicas, como aquella en la que Dios detiene la marcha del Sol y de la Luna para que Josué y los israelitas derroten a los amoritas en el valle de Ayalón. AunqueCastelli señaló que defendió «como un campeón» el copernicanismo, a Galileo le inquietaron las noticias de esta confrontación, y se sintió impulsado a expresar su propio punto de vista acerca de las contradicciones entre la ciencia y las Sagradas Escrituras. En una extensa carta a Castelli de fecha 21 de diciembre de 1613, Galileo escribe:

> …en las Sagradas Escrituras era necesario, con el fin de complacer el entendimiento de la mayoría, decir muchas cosas que difieren en apariencia del significado preciso. Por el contrario, la Naturaleza es inexorable e inmutable, y no tiene en cuenta en absoluto si sus causas y sus mecanismos ocultos son o no inteligibles para la mente humana, y por eso jamás se desvía de las leyes obligatorias. Es por tanto mi parecer que ningún efecto de la naturaleza que la experiencia muestre a nuestros ojos o que sea la conclusión necesaria que se deriva de la evidencia, debe considerarse dudoso por pasajes de las Escrituras que contienen miles de vocablos que pueden interpretarse de formas diversas, pues las frases de las Escrituras no están sujetas a las rígidas leyes que gobiernan los efectos de la naturaleza.[108]

Esta interpretación del significado bíblico estaba en clara discordancia con la de algunos de los teólogos más rigurosos.[109] Por ejemplo, el dominico Domingo Báñez escribía en 1584: «El Espíritu Santo no sólo ha inspirado todo aquello contenido en las Escrituras, sino que también ha dictado y sugerido cada una de las palabras en ellas escritas». Obviamente, a Galileo no le convencía esta afirmación. En su *Carta a Castelli* añadía:

> Me inclino a pensar que la autoridad de las Sagradas Escrituras es convencer a los hombres de las verdades necesarias para su salvación y que, estando más allá de su capacidad de comprensión, únicamente la revelación del Espíritu Santo puede hacer verosímiles. Pero que ese mismo Dios que nos ha

> concedido los sentidos, la razón y el entendimiento, no nos permita utilizarlos, y sea su deseo que lleguemos por otros caminos a los conocimientos que podemos adquirir por nosotros mismos a través de dichas facultades, *eso* no estoy inclinado a creerlo, en especial en lo que concierne a las ciencias sobre las que las Sagradas Escrituras contienen únicamente fragmentos breves y conclusiones dispares; y éste es precisamente el caso de la astronomía, de la que se dice tan poca cosa que ni siquiera se enumeran los planetas.

Una copia de la carta de Galileo llegó a manos de la Congregación del Santo Oficio en Roma, encargada de evaluar de forma rutinaria los asuntos relacionados con la fe; llegó, específicamente, a las manos del influyente cardenal Robert Bellarmine (1542-1621). La primera reacción de Bellarmine al copernicanismo había sido más bien moderada, ya que consideraba el modelo heliocéntrico como «una forma de guardar las apariencias, del estilo de aquellos que han propuesto los epiciclos pero en realidad no creen en su existencia». Igual que otros antes que él, Bellarmine miraba los modelos matemáticos de los astrónomos como una serie de trucos útiles pensados para describir las observaciones de los seres humanos, y sin relación alguna con la realidad. Estos artefactos para «guardar las apariencias», sostenía, no demostraban que la Tierra realmente se moviese. Así, Bellarmine no vio en el libro de Copérnico (*De Revolutionibus*) un verdadero peligro, aunque se apresuró a añadir que la afirmación de que la Tierra se moviese no sólo «irritaría a todos los filósofos y teólogos escolásticos», sino que también «menoscabaría la Santa Fe al proclamar su falsedad».

El resto de los detalles de esta trágica historia se hallan más allá del ámbito y la intención de este libro, de modo que los describiré brevemente. La Congregación del índice prohibió el libro de Copérnico en 1616. Los posteriores intentos de Galileo de emplear numerosos fragmentos del más venerado de los teólogos de la Antigüedad —san Agustín— para apoyar su interpretación de las relaciones entre las ciencias naturales y las Escrituras no le granjearon demasiadas simpatías.[110] A pesar de sus minuciosas cartas que defendían la tesis de la inexistencia de desacuerdos (salvo detalles superficiales) entre la teoría copernicana y los textos bíblicos, los teólogos de la época vieron los argumentos de Galileo como una intrusión en su terreno. Mostrando un gran cinismo, esos mismos teólogos no dudaban en absoluto en expresar sus opiniones en materias científicas.

Mientras nubes de tormenta se iban reuniendo en el horizonte, Galileo seguía creyendo que se impondría la razón; craso error cuando se tratan cuestiones de fe. Galileo publicó su *Diálogo sobre los principales sistemas del mundo* en febrero de 1632 (en la figura 20 se muestra la portada de la primera edición).[111]

FIGURA 20

En este polémico texto se exponían con todo detalle las ideas copernicanas de Galileo. Además, Galileo argumentaba que, utilizando la ciencia con el lenguaje del equilibrio mecánico y la matemática, el hombre era capaz de comprender la mente de Dios. Dicho de otro modo, si una persona halla la solución de un problema mediante el uso de la geometría de proporciones, los conocimientos y la comprensión que obtiene son comparables a la divinidad. La contundente reacción de la Iglesia no se hizo esperar. La circulación del *Diálogo* se prohibió en agosto del mismo año de su publicación. Durante el mes siguiente se convocó a Galileo en Roma para que se defendiese contra la acusación de herejía. El proceso de Galileo se inició el 12 de abril de 1633, y se le halló «vehemente sospechoso de herejía» el 22 de junio del mismo año. Los jueces acusaron a Galileo de «haber creído y sostenido la doctrina —que es falsa y contraria a las sagradas y divinas Escrituras— de que el Sol es el centro del mundo y no se mueve de este a oeste, y que la Tierra se mueve y no se halla en el centro del mundo». Esta fue la severa sentencia:

> …condenamos a su persona a prisión de este Santo Oficio mientras sea Nuestra voluntad; y como penitencia deberá recitar por espacio de tres años, una vez a la semana, los Siete Salmos Penitenciales, reservándonos la facultad de cambiar, moderar, o eliminar cualquiera de las antes mencionadas penas y penalidades.[112]

Anonadado, Galileo, ya un anciano de setenta años, no pudo soportar la presión. Con el espíritu quebrado, Galileo hizo pública su carta de abjuración, en la que se comprometía a «abandonar completamente la falsa opinión de que el Sol es el centro del mundo y que no se mueve y que la Tierra no es el centro del mundo y se mueve». En ella concluía:

> Por tanto, deseando quitar de la mente de sus eminencias y de todo fiel cristiano esta vehemente sospecha, justamente concebida contra mí, con corazón sincero y fe no fingida abjuro, maldigo y detesto los errores y herejías ahora mencionados, y en general todos y cada uno de los errores, herejías y sectas contrarias a la Santa Iglesia. Yjuro que en el futuro no diré nunca más ni afirmaré, oralmente o por escrito, nada que pudiera ser causa de una sospecha semejante contra mí.[113]

El último libro de Galileo, *Diálogos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, se publicó en julio de 1638. El manuscrito se sacó clandestinamente de Italia y se publicó en Leiden, Holanda. El contenido de este libro representaba la verdadera y enérgica expresión de la idea implícita en las legendarias palabras *eppur si muove* («y sin embargo, se mueve»). Esa frase desafiante, que se suele poner en boca de Galileo a la conclusión de su proceso, probablemente no se pronunció jamás.

El 31 de octubre de 1992, la Iglesia Católica decidió por fin «rehabilitar» a Galileo. Tras reconocer que Galileo siempre estuvo en posesión de la razón, pero evitando una crítica directa a la Inquisición, el papa Juan Pablo II dijo:

> Paradójicamente, Galileo, creyente sincero, se mostró en este punto [las aparentes discrepancias entre la ciencia y las Escrituras] más perspicaz que sus adversarios teólogos. La mayoría de los teólogos no percibieron la distinción formal existente entre la Sagrada Escritura en sí misma y su interpretación, lo que les condujo a traspasar indebidamente al campo de la doctrina religiosa una cuestión que en realidad pertenece al campo de la investigación científica.

Los periódicos de todo el mundo se frotaron las manos. *Los Angeles Times* publicaba: «Ya es oficial: la Tierra gira alrededor del Sol. Incluso para el Vaticano».

Muchas personas, en cambio, no le vieron la gracia. Algunos vieron este *mea culpa* de la Iglesia como una medida parca y tardía.

El estudioso español especialista en Galileo Antonio Beltrán Marí señaló:

> El hecho de que el Papa siga considerándose autorizado para emitir opiniones relevantes acerca de Galileo y de su ciencia demuestra que, en lo que a su bando respecta, nada ha cambiado. Se comporta exactamente del mismo modo que los jueces de Galileo cuyos errores reconoce.[114]

Es justo reconocer que el Papa se hallaba en una situación sin salida. Cualquier decisión por su parte, ya fuese ignorar la cuestión y mantener la vigencia de la condena de Galileo, o reconocer por fin el error de la Iglesia, iba a recibir críticas. Sin embargo, en una época en que se está tratando de presentar el creacionismo bíblico como teoría «científica» alternativa (bajo el apenas disimulado nombre de «diseño inteligente»), no está de más recordar que Galileo ya había luchado en esta batalla hace casi cuatrocientos años ¡y ganó!

4
Magos: el escéptico y el gigante

En uno de los siete *sketches* de la película *Todo lo que siempre quiso saber sobre el sexo y no se atrevió a preguntar,* Woody Allen hace el papel de un bufón que interpreta números cómicos para un rey medieval y su corte. El bufón está loco por la reina, así que, con la intención de seducirla, le hace tomar un afrodisíaco. La reina siente, efectivamente, atracción por el bufón, pero ¡ay! su cinturón de castidad está cerrado con un enorme candado. Ante esta frustrante situación, el bufón, nervioso, pronuncia estas palabras en los aposentos de la reina: «Debo pensar en algo rápidamente, antes de que llegue el Renacimiento y *todos* nos convirtamos en pinturas». Bromas aparte, esta exageración es una descripción sencilla de los acontecimientos que tuvieron lugar en Europa durante los siglos XV y XVI. El Renacimiento, efectivamente, había producido tal número de obras maestras en los campos de la pintura, la escultura y la arquitectura que estos asombrosos trabajos siguen formando una parte importante de nuestra cultura. En ciencia, el Renacimiento fue testigo de la revolución heliocéntrica en astronomía, cuyos abanderados fueron Copérnico, Kepler y, en especial, Galileo. La nueva visión del universo ofrecida por las observaciones de Galileo con el telescopio y los conocimientos obtenidos a partir de sus experimentos en mecánica motivaron, más que ningún otro factor, los desarrollos matemáticos efectuados en el siglo posterior. Entre estos primeros signos que revelaban el derrumbamiento de la filosofía aristotélica y el desafío a la ideología teológica de la Iglesia, los filósofos empezaron a buscar unos nuevos cimientos sobre los que edificar el conocimiento humano. La matemática, con su acervo de hechos aparentemente ciertos, ofreció lo que parecía ser una base sólida para volver a empezar.

El hombre que se embarcó en la ambiciosa tarea de descubrir la «fórmula» que, en cierto modo, actuase como guía de todo el pensamiento racional y fuerza unifícadora de todo el conocimiento, la ciencia y la ética, era un joven oficial y caballero francés de nombre René Descartes.

FIGURA 21

Para muchos, Descartes (figura 21) fue el primer filósofo moderno y también el primer biólogo moderno. Si a estas impresionantes credenciales se añade el hecho de que el filósofo empirista inglés John Stuart Mill (1806-1873) describió uno de los logros de Descartes en matemáticas como «el paso más importante efectuado jamás en el progreso de las ciencias exactas»,[115] es fácil darse cuenta del colosal poder del intelecto de Descartes.

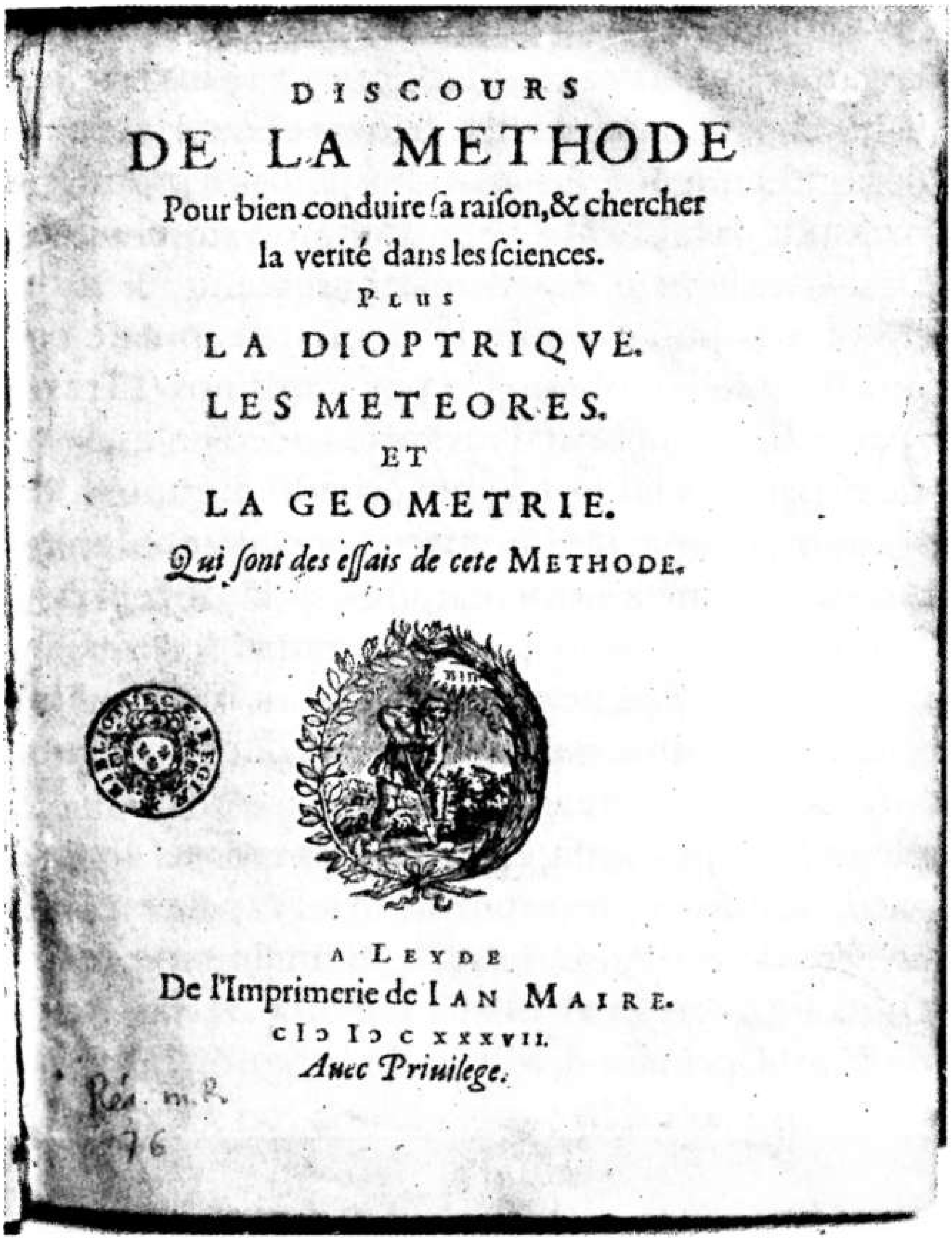
René Descartes nació el 31 de marzo de 1596 en La Haye, Francia.[116] En honor de su residente más célebre, la ciudad cambió su nombre por La Haye-Descartes en 1801 y, desde 1967, se conoce simplemente como Descartes. A la edad de ocho años, Descartes ingresó en el colegio jesuita de La Fleche, en donde estudió latín, matemáticas, los clásicos, ciencias y filosofía escolástica hasta 1612. Su salud relativamente frágil excusó a Descartes de tener que levantarse a la hora atroz de las cinco de la mañana, y se le permitía pasar en la cama las primeras horas del día. Siendo ya adulto, Descartes siguió dedicando estas horas a la contemplación, y una vez reveló al matemático francés Blaise Pascal que para él la única forma de mantenerse sano y productivo era no levantarse nunca antes de que le apeteciese hacerlo. Como veremos, esta declaración resultó ser trágicamente profética. Después de su paso por La Fleche, Descartes se graduó como abogado en la Universidad de Poitiers, pero nunca ejerció como tal. Descartes era una persona inquieta y ansiosa por ver mundo, de modo que decidió enrolarse en el ejército del príncipe Mauricio de Orange, que se encontraba destacado en Breda, en las Provincias Unidas (Países Bajos). En Breda tuvo lugar un encuentro accidental que iba a ser de importancia capital en el desarrollo intelectual de Descartes. Según la tradición, Descartes vio en un cartel un complejo problema matemático y pidió a una persona que pasaba por allí que se lo tradujese al francés o al latín.[117] Unas horas después, Descartes tenía el problema solucionado, y esto le convenció de que poseía aptitudes para las matemáticas. El traductor resultó ser nada menos que el matemático y científico holandés Isaac Beeckman (1588-1637), cuya influencia en las investigaciones «físico-matemáticas» de Descartes se dejó notar durante mucho tiempo.[118] En los nueve años siguientes, Descartes alternó entre el bullicio de París y el servicio militar en diversos ejércitos. En una Europa sumida en luchas políticas y religiosas y al inicio de la guerra de los Treinta Años, Descartes no tenía dificultad alguna para encontrar una batalla o un regimiento al que unirse, ya fuese en Praga, Alemania o Transilvania. Sin embargo, a lo largo de este período siguió, como él mismo decía, «sumergido de cabeza» en el estudio de la matemática.

El 10 de noviembre de 1619, Descartes tuvo tres sueños que, no sólo afectaron de forma drástica el resto de *su* propia vida, sino que marcaron quizá el principio de la era moderna.[119] Al describirlos tiempo después, Descartes decía en una de sus anotaciones: «Me hallé henchido de entusiasmo y descubrí los cimientos de una ciencia maravillosa». ¿Cuáles fueron esos sueños tan influyentes?

En realidad, dos de ellos eran pesadillas. En el primer sueño, Descartes se vio atrapado en un furioso torbellino que le hacía girar con violencia alrededor de su talón izquierdo. Además, una aterradora sensación de caída le invadía. Luego aparecía un anciano que intentaba regalarle un melón procedente de un lejano país. El segundo sueño era también una pavorosa visión. En él se hallaba atrapado en una sala en la que sonaban ominosos truenos y las centellas volaban a su alrededor. En marcado contraste con los dos primeros, el tercer sueño era una imagen de calma y meditación. Al pasar los ojos por la habitación, Descartes vio libros que aparecían y desaparecían de una mesa. Entre ellos se hallaba una antología poética denominada *Corpus Poetarum* y una enciclopedia. Abriendo la antología por una página al azar, Descartes pudo echarle un vistazo a la primera línea de un poema del autor romano del siglo IV Ausonio, que decía: *Quod vitae sectabor iterl* («¿Qué camino debo seguir en la vida?»). Un hombre se materializaba milagrosamente y citaba otro verso: *Est et non* («Sí y no» o «Lo es y no lo es»). Descartes quería mostrarle el verso de Ausonio, pero la visión entera desapareció en la nada.

Como suele suceder con los sueños, su significado no se halla en su contenido en sí, que suele ser desconcertante y extraño, sino en la interpretación que la persona que sueña decide asignarle. En el caso de Descartes, el efecto de estos tres enigmáticos sueños fue increíble. Para él, la enciclopedia significaba el conjunto del conocimiento científico y la antología de poemas, la filosofía, la revelación y el entusiasmo. El «sí y no» —los famosos opuestos de Pitágoras— los interpretó como la verdad y la falsedad [no es sorprendente que algunas interpretaciones psicoanalíticas hayan sugerido connotaciones sexuales acerca del melón]. Descartes estaba totalmente convencido de que los sueños le exhortaban a la *unificación de todo el conocimiento humano mediante la razón.* En 1621 abandonó el ejército, pero siguió viajando y estudiando matemáticas durante los cinco años siguientes. Los que conocieron a Descartes durante esa época, incluido el influyente líder espiritual cardenal Pierre de Bérulle (1575-1629), quedaron hondamente impresionados por su agudeza y claridad de pensamiento, y muchos de ellos le instaron a que publicase sus ideas. En el caso de cualquier otro joven, estas paternalistas «sabias palabras» hubiesen tenido el mismo efecto que tuvo el lacónico consejo «¡Plásticos!» en el personaje de Dustin Hoffman en *El graduado,* pero Descartes era distinto. Puesto que ya se había puesto como objetivo la búsqueda de la verdad, no fue difícil convencerlo. Se trasladó a Holanda, que en aquellos días parecía ofrecer un entorno intelectual más reposado, y pasó los siguientes veinte años produciendo un *tour de force* tras otro.

Descartes publicó su primera obra maestra sobre los fundamentos de la ciencia, el *Discurso del método para guiar bien la razón y buscar la verdad en las ciencias,* en 1637 (en la figura 22 se muestra la portada de la primera edición). Este tratado iba acompañado de tres notables apéndices (sobre óptica, meteorología y geometría).



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

FIGURA 22

A continuación vinieron su trabajo de filosofía, *Meditaciones sobre la primera filosofía,* en 1641, y en física, *Principios de filosofía,* en 1644. Por entonces, Descartes ya era célebre en toda Europa, y entre sus admiradores y corresponsales se hallaban la princesa Isabel de Bohemia (1618-1680), que estaba en el exilio. En 1649, Descartes fue invitado a instruir en filosofía a la pintoresca reina Cristina de Suecia (1626-1689). Descartes, que siempre había tenido una cierta debilidad por la realeza, accedió. De hecho, su carta a la reina estaba tan atiborrada de reverenciales expresiones de cortesía del siglo XVII que en nuestros días parece ridicula: «Permítame la osadía de declarar aquí ante Su Majestad que nada de lo que pueda ordenarme será tan complicado que no me inste a hacer todo lo posible para ejecutarlo, y que, aun siendo sueco o finés de nacimiento, no podría hallarme más dispuesto y lleno de celo de lo que lo estoy ahora». La joven reina, de voluntad de hierro, insistió en que Descartes impartiese sus lecciones a la infame hora de las cinco de la mañana. En un país tan frío en el que, tal como Descartes escribió a un amigo, «se hielan hasta los pensamientos», esta condición resultó letal.[120] «Me hallo fuera de mi elemento aquí», escribió Descartes, «y no deseo más que tranquilidad y reposo, algo que ni el más poderoso de los monarcas puede conceder a aquellos que no pueden obtenerlo por sí mismos». Tras sólo unos meses de hacer frente al brutal invierno sueco en esas oscuras horas de la madrugada a las que había evitado durante toda su vida, Descartes contrajo una neumonía y, posiblemente, encefalitis. Murió a la edad de cincuenta y tres años, el 11 de febrero de 1650, a las cuatro de la madrugada, quizá intentando evitar tener que despertarse de nuevo. El hombre cuya obra fue el heraldo de la era moderna cayó víctima de sus propias tendencias esnob y de los caprichos de unajoven reina.

Descartes fue enterrado en Suecia,[121] pero sus restos, o al menos una parte de ellos, se transportaron a Francia en 1667. Allí sufrieron numerosos traslados, hasta que finalmente recibieron sepultura el 26 de febrero de 1819 en una de las capillas de la catedral de Saint-Germain-des-Prés.

FIGURA 23

En la figura 23 me hallo junto a la sencilla placa negra que recuerda a Descartes. Un cráneo que, según se afirmaba, pertenecía a Descartes pasó de mano en mano en Suecia hasta que un químico de nombre Berzelius lo compró y lo llevó a Francia. Ese cráneo se halla ahora en el Museo de Ciencias, que forma parte del Musée de l'Homme. El cráneo suele mostrarse junto al del hombre de Neanderthal.

UN MODERNO

En una persona, la etiqueta «moderno» suele hacer referencia a los individuos que pueden mantener una conversación fluida con sus colegas profesionales del siglo XX (bueno, ya XXI). Lo que hace que Descartes sea un verdadero «moderno»[122] es el hecho de que se atrevió a *cuestionar* todas las afirmaciones filosóficas y científicas efectuadas antes de su época. En cierta ocasión, Descartes señaló que su educación sólo le sirvió para aumentar su perplejidad y para hacer que se diese cuenta de su propia ignorancia. En su famoso *Discurso,* escribía: «Nada diré de la filosofía sino que, al ver que ha sido cultivada por los más excelentes ingenios que han vivido desde hace siglos, y, sin embargo, nada hay en ella que no sea objeto de disputa y, por consiguiente, dudoso». Aunque el destino de muchas de las ideas filosóficas de Descartes no iba a ser muy distinto, en el sentido de que filósofos posteriores han señalado puntos flacos significativos en sus proposiciones, su refrescante escepticismo incluso acerca de los conceptos más básicos lo convierte en un verdadero moderno. Y lo que es más importante desde la perspectiva de este libro: Descartes admitió que los métodos y el proceso de razonamiento de la matemática generaban un tipo de *certidumbre* de la que la filosofía escolástica anterior a su época carecía.[123] Descartes afirmaba claramente:

> Esas largas cadenas compuestas de razonamientos muy sencillos, que los geómetras suelen utilizar para alcanzar sus demostraciones más complejas, me permitieron formular la hipótesis de que *todo lo que abarca el ámbito del conocimiento humano está interconectado del mismo modo.* Y pensé que, siempre que nos abstengamos de aceptar como cierta cualquier cosa que no lo sea, y que tengamos cuidado de mantener el orden necesario para deducir una cosa de otra, nada hay tan remoto que no pueda ser finalmente alcanzado o tan oculto que no pueda descubrirse. (Las cursivas son mías.)

Esta atrevida afirmación va, en cierto sentido, más allá de las opiniones de Galileo. No sólo el universo físico está escrito en el lenguaje de la matemática, sino que todo el conocimiento humano sigue la lógica matemática. En palabras del propio Descartes: «[El método matemático] es un instrumento de conocimiento más potente que cualquier otro que la acción de los hombres nos haya legado, puesto que es el origen de todos los demás». Así, Descartes se puso como uno de sus objetivos demostrar que el mundo de la física, que para él era una realidad que se podía describir en términos matemáticos, se podía representar sin necesidad de apoyarse en ninguna de nuestras percepciones sensoriales que a menudo nos inducen a error. Descartes propugnaba la idea de que la mente debe filtrar lo que ven los ojos y convertir las percepciones en idea. Después de todo, argumentaba, «no hay señales ciertas que nos permitan decidir si estamos despiertos o dormidos». Sin embargo, reflexionaba, si todo lo que percibimos como real podría de hecho no ser más que un sueño, ¿cómo podemos estar seguros de que incluso la tierra y el cielo no son más que «espejismos de sueños» imbuidos en nuestros sentidos por algún «demonio malicioso de poder infinito»? O, como dijo Woody Alien: «¿Y si todo es una ilusión y nada existe? En ese caso, no hay duda de que me han cobrado demasiado por la alfombra». Para Descartes, este aluvión de perturbadoras dudas[124] acabó por generar lo que se ha convertido en su razonamiento más célebre: *Cogito, ergo sum* («Pienso, luego existo»). En otras palabras, tras los pensamientos debe existir una mente consciente. Quizá de forma paradójica, ¡no se puede dudar del propio acto de la duda! Descartes intentó emplear este aparentemente sutil comienzo para construir una estructura completa de conocimientos fiables. Ya fuese filosofía, óptica, mecánica, medicina, embriología o meteorología, Descartes tocó todos los campos, y alcanzó logros significativos en cada una de estas disciplinas. Sin embargo, a pesar de su insistencia en la capacidad de razonamiento del ser humano, Descartes no creía que la lógica pudiese revelar verdades fundamentales *por sí sola*. Llegando así en esencia a la misma conclusión que Galileo, escribió: «En cuanto a la lógica, sus silogismos y la mayoría de sus demás preceptos resultan más útiles para comunicar aquello que ya conocemos… que para investigar lo desconocido». En cambio, en su heroica tarea de reinventar, o establecer, las bases de disciplinas enteras, Descartes intentó utilizar los principios que había extraído del método matemático para asegurarse de la solidez del terreno por el que avanzaba. Describió estas rigurosas «pautas» en sus *Reglas para la dirección del espíritu*. Empezando por certezas que no le ofrecían duda alguna (similares a los axiomas de la geometría de Euclides), intentaba fragmentar los problemas más complicados en otros más manejables, yendo de lo rudimentario a lo intrincado, comprobando con rigor todo el proceso para asegurarse plenamente de no haber pasado por alto solución alguna. Huelga decir que ni siquiera este proceso arduo y meticulosamente construido hacía que las conclusiones de Descartes fuesen inmunes a error. De hecho, a pesar de la fama de Descartes por sus decisivos avances en filosofía, sus contribuciones más *duraderas* se hallan en el campo de la matemática. Prestaré ahora atención a la idea simple y brillante que John Stuart Mill calificó como «el paso más importante efectuado jamás en el progreso de las ciencias exactas».

La matemática de un mapa de la ciudad de Nueva York

Echemos un vistazo al mapa parcial de Manhattan que se muestra en la figura 24.

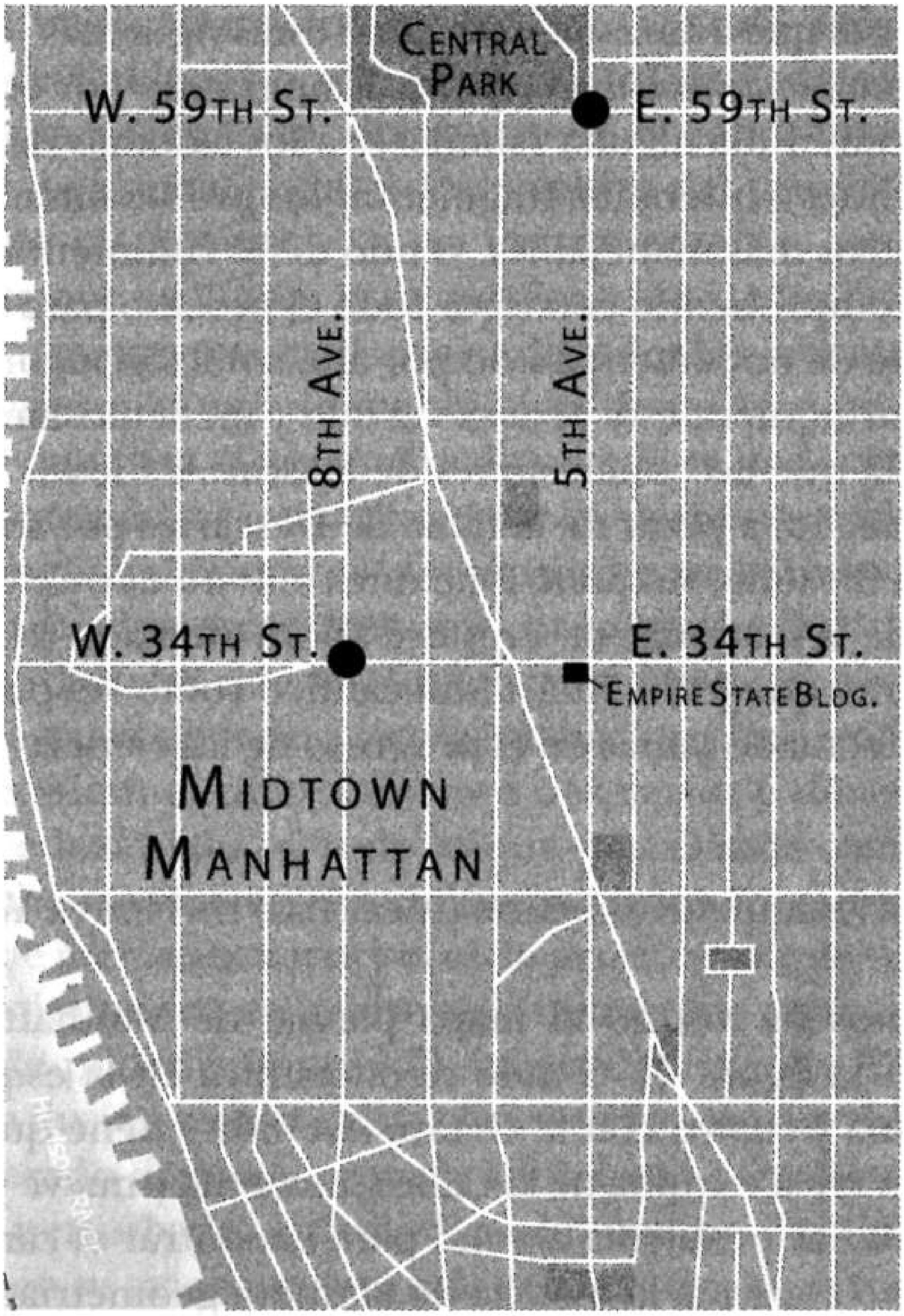


FIGURA 24

Si uno se encuentra en la esquina de la Calle Treinta y cuatro con la Octava Avenida y tiene que reunirse con alguien en la esquina de la Calle Cincuenta y nueve y la Quinta Avenida, no hay problema alguno para encontrar el camino, ¿verdad? En esto consistía la esencia de la nueva geometría de Descartes, que esbozó en un apéndice de 106 páginas titulado *La Géometrié* en su *Discurso del método*.[125] Por difícil de creer que resulte, este concepto notablemente simple revolucionó la matemática. Descartes empezó por el hecho casi trivial de que, tal como se puede ver en el mapa de Manhattan, una pareja de números pueden determinar sin ambigüedad la posición de un punto en el plano (por ejemplo, el punto A de la figura 25a).

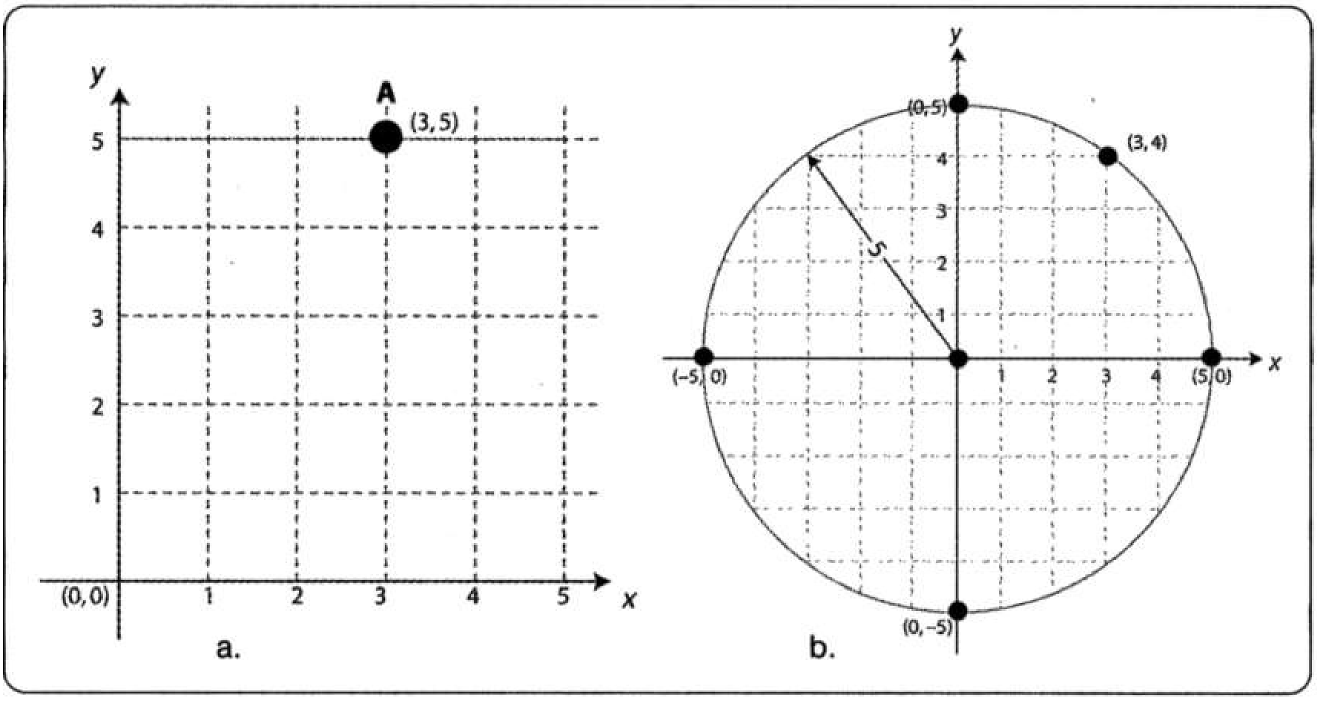


FIGURA 25

A continuación empleó este hecho para desarrollar una potente teoría de curvas: la *geometría analítica.* En honor a Descartes, la pareja de líneas rectas perpendiculares que nos proporcionan el sistema de referencia se denomina sistema de coordenadas «cartesiano». Tradicionalmente, la línea horizontal se llama «eje x», la vertical «eje y», y el punto de intersección «origen». El punto marcado como A en la figura 25a, por ejemplo, tiene 3 como coordenada *x* y 5 como coordenada);, lo que se denota simbólicamente como (3,5) [al origen se le asignan las coordenadas (0, 0)]. Supongamos que queremos clasificar de algún modo todos los cuerpos del plano que se hallan a una distancia exacta de 5 unidades del origen. Ésta es, precisamente, la definición geométrica de un círculo centrado en el origen, con un radio de 5 unidades (figura 25b). Si tomamos el punto (3, 4) de este círculo, se puede hallar que sus coordenadas cumplen la igualdad $3^2 + 4^2 = 5^2$. De hecho, es fácil demostrar (mediante el teorema de Pitágoras) que las coordenadas *(x, y)* de cualquier punto de este círculo cumplen $x^2 + y^2 = 5^2$. Es más, los puntos del círculo son los *únicos* puntos del plano que cumplen la igualdad $x^2 + y^2 = 5^2$. Pero eso significa que la ecuación algebraica $x^2 + y^2 = 5^2$ caracteriza este círculo de forma única y precisa. En otras palabras, Descartes descubrió una forma de representar una curva geométrica mediante una ecuación algebraica o de forma numérica, y viceversa.[126] No parece que esto sea demasiado emocionante para un simple círculo, pero cualquier gráfico, ya sea las fluctuaciones semanales de las bolsas, la temperatura del Polo Norte durante el último siglo o el ritmo de crecimiento del universo, se basa en esta ingeniosa idea de Descartes. De pronto, la geometría y el álgebra habían dejado de ser dos ramas independientes de la matemática para ser dos formas de representar los mismos hechos. La ecuación que describe una curva contiene de forma implícita cualquier propiedad imaginable de la curva, incluidos, por ejemplo, todos los teoremas de la geometría euclidiana. Y la cosa no acababa ahí. Descartes señaló que se podían dibujar varias curvas en el mismo sistema de coordenadas y que sus puntos de intersección se podían hallar simplemente hallando las soluciones comunes de sus respectivas ecuaciones algebraicas. De este modo, Descartes aprovechaba las virtudes del álgebra para corregir lo que se le antojaban alarmantes deficiencias de la geometría clásica. Por ejemplo, Euclides definía un punto como una entidad sin partes componentes ni magnitud. Esta vaga definición quedó para siempre obsoleta desde el momento en que Descartes definió un punto en el plano simplemente como un par ordenado de números (x, y). Pero estos novísimos puntos de vista no eran más que la punta del iceberg. Si se pueden relacionar dos cantidades x e y de modo que, a cada valor de x le corresponde un único valor de y, constituyen lo que se denomina *función,* y las funciones son entidades verdaderamente ubicuas. Tanto el seguimiento diario de su peso en una dieta, como la evolución de la altura de sus hijos en los consecutivos cumpleaños o la relación entre los kilómetros recorridos por su coche y la velocidad son funciones.

Las funciones son realmente el pan de cada día para los científicos, estadísticos y economistas modernos. Una vez que numerosos experimentos científicos u observaciones generan las mismas interrelaciones funcionales, éstas pueden alcanzar el estado de «leyes de la naturaleza» —descripciones matemáticas de un comportamiento que los fenómenos naturales obedecen—. Por ejemplo, la ley de la gravitación de Newton, a la que volveremos más adelante en este capítulo, establece que, cuando se duplica la distancia entre dos masas, la atracción gravitatoria entre ambas decrece siempre en un factor de cuatro. Las ideas de Descartes abrieron las puertas a una *matematización sistemática de casi todo,* la esencia de la noción «Dios es un matemático». Desde un punto de vista puramente matemático, el establecimiento de la *equivalencia* de dos perspectivas de la matemática (la algebraica y la geométrica) que se consideraban dispares, Descartes amplió el horizonte de la matemática y allanó el camino hacia la moderna disciplina del *análisis,* que permite a los matemáticos pasar de una subdisciplina de esta ciencia a otra con comodidad. En consecuencia, no sólo un gran número de fenómenos diversos pasaron a poder ser descritos mediante la matemática, sino que la matemática en sí misma se hizo más amplia, rica y unificada. En palabras del gran matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813): «Mientras el álgebra y la geometría seguían caminos propios, su progreso era lento y sus aplicaciones, limitadas. Pero cuando estas dos ciencias se unieron, cada una obtuvo frescura y vitalidad de la otra y, a partir de ese momento, caminaron juntas en veloz marcha hacia la perfección».

A pesar de la importancia de los logros de Descartes en matemática, su interés científico no se limitaba a esta disciplina. La ciencia, decía, es como un árbol en el que la metafísica es la raíz; la física, el tronco; y las tres principales ramas son la mecánica, la medicina y la moral. La selección de ramas de Descartes puede parecer sorprendente al principio, pero de hecho simbolizaban perfectamente las tres principales áreas en las que pretendía aplicar sus nuevas ideas: el universo, el cuerpo humano y la conducta. Descartes pasó los primeros cuatro años de su estancia en Holanda (de 1629 a 1633) escribiendo su tratado sobre cosmología y física, *Le Monde*.[127] Sin embargo, con el libro a punto de entrar en imprenta, Descartes recibió una perturbadora noticia que le conmocionó. En una carta a su amigo y crítico, el filósofo natural Marín Mersenne (1588-1648), se lamentaba:

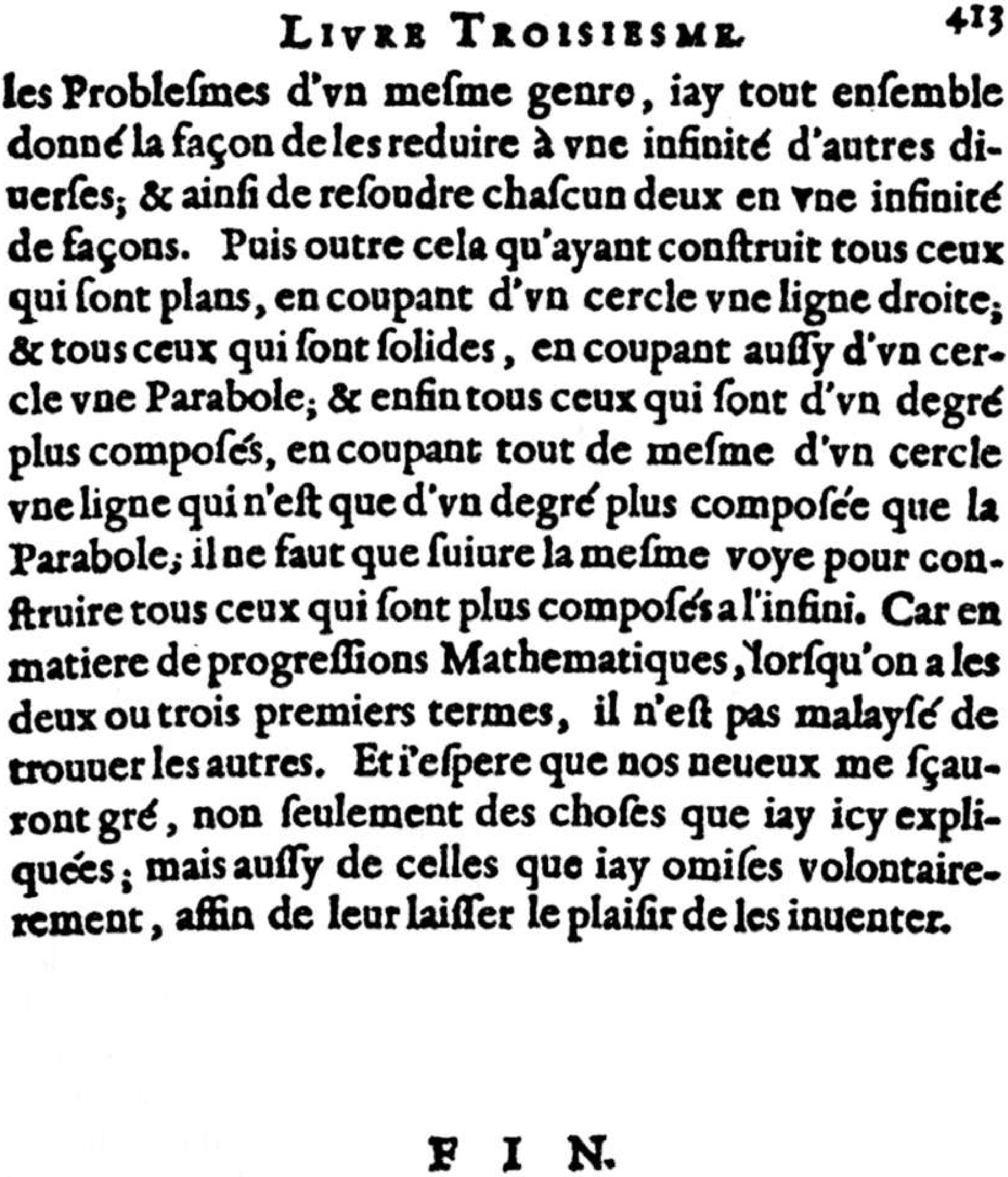
> Era mi intención enviarle mi *Mundo* como regalo de Año Nuevo, y hace tan sólo dos semanas estaba plenamente decidido a enviarle, como mínimo, una parte de él, si no hubiese sido posible copiar la totalidad de la obra. Pero, en el ínterin, consulté en Leiden y en Ámsterdam la disponibilidad del *Sistema del mundo* de Galileo, pues creía haber oído algo acerca de su publicación en Italia el año pasado. Me dijeron que, en efecto, se había publicado, pero que todas las copias habían sido inmediatamente quemadas en Roma, y que Galileo había sido condenado y multado. Quedé tan asombrado por la noticia que casi decidí quemar todas mis notas o, al menos, no dejar que nadie las viese. Pues no podía imaginar que él —italiano y, según tengo entendido, en buenas relaciones con el Papa— pudiese haber sido calificado de criminal por una razón que no fuese, como sin duda debía de ser el caso, establecer que la Tierra se movía. Tenía conocimiento de que ciertos cardenales habían censurado esta opinión, pero creía haber oído que de todos modos se enseñaba públicamente en Roma. *Debo admitir que, si esa aseveración resulta ser falsa, lo son también las bases todas de mi filosofía*, pues a partir de ellas se puede demostrar muy claramente. Y está tan entretejida con todas las partes de mi tratado que no podría prescindir de ella sin que la totalidad de la obra resultase defectuosa. Pero por nada del mundo querría publicar un discurso en el que una sola de sus palabras no fuese del agrado de la Iglesia; así que prefería suprimirlo antes que publicarlo en forma mutilada… (La cursiva es mía.)

En efecto, Descartes había abandonado *El mundo* (el manuscrito incompleto fue finalmente publicado en 1664), pero incorporó casi todos sus resultados en sus *Principios de filosofía*, que aparecieron en 1644. En este discurso sistemático, Descartes presentaba sus «leyes de la naturaleza» y su teoría de los vórtices. Dos de sus leyes son muy similares a las famosas primera y segunda leyes del movimiento de Newton,[128] pero las otras eran, de hecho, incorrectas. La teoría de vórtices tenía como hipótesis que el Sol se hallaba en el centro de un torbellino creado en el *continuum* de materia cósmica. Se suponía que este vórtice arrastraba a los planetas como hojas en un remolino de un río. A su vez, los planetas formaban sus propios vórtices secundarios que arrastraban los satélites a su alrededor. Aunque la teoría de los vórtices de Descartes resultó ser espectacularmente errónea (como señaló implacable Newton más adelante), era de todos modos interesante, ya que era el primer intento serio de formular una teoría del universo en su conjunto, basada en las mismas leyes que se aplican en la superficie de la Tierra. En otras palabras, para Descartes no había diferencia entre los fenómenos «terrestres» y «celestes»; la Tierra era parte de un universo que obedecía leyes físicas uniformes. Por desgracia, Descartes hizo caso omiso de sus propios principios al construir una detallada teoría que no se basaba ni en principios matemáticos coherentes ni en observaciones. Sin embargo, el escenario de Descartes, en el que el Sol y los planetas perturban en cierto modo la materia del universo que les rodea, contenía ciertos elementos que más tarde se convirtieron en piedras angulares de la teoría de la gravitación de Einstein. En la *relatividad general* de Einstein, la gravedad no es una fuerza misteriosa que actúa a través de las vastas distancias del espacio. En realidad, los cuerpos masivos como el Sol curvan el espacio en sus proximidades, igual que una pesada bola de bolos causa que una cama elástica se hunda. En consecuencia, los planetas se limitan a seguir los caminos más cortos posibles en este espacio curvado.

De forma deliberada he dejado fuera de esta extraordinariamente breve descripción de las ideas de Descartes casi toda su influyente obra filosófica, porque esto nos hubiese alejado demasiado de nuestro centro de atención, es decir, la naturaleza de la matemática (más adelante en este capítulo volveré sobre algunas de sus opiniones sobre Dios). Pero no puedo evitar incluir el siguiente agudo comentario escrito en 1908 por el matemático británico Walter William Rouse Ball (1850-1925):

> En lo que respecta a sus [de Descartes] teorías filosóficas, basta con decir que comentaba los mismos problemas que se han debatido durante los últimos dos mil años, y que probablemente se seguirán debatiendo con idéntico fervor durante dos mil años más. No es necesario destacar que los problemas en sí son de gran importancia e interés, pero por su naturaleza ninguna de las soluciones ha ofrecido nunca una prueba irrefutable en uno u otro sentido; lo único que puede lograrse es una explicación más probable que otra y, siempre que un filósofo como Descartes cree que ha resuelto de una vez por todas una cuestión, sus sucesores siempre han podido señalar alguna falacia en sus hipótesis. Una vez leí que la filosofía siempre ha estado muy interesada en las relaciones entre Dios, la Naturaleza y el Hombre. Los primeros filósofos eran griegos, y se ocupaban principalmente de las relaciones entre Dios y la Naturaleza, tratando al Hombre por separado. La Iglesia Cristiana estaba tan absorta con las interrelaciones entre Dios y el Hombre que descuidó por completo la Naturaleza. Por último, los filósofos modernos se ocupan sobre todo de las relaciones entre el Hombre y la Naturaleza. No voy a comentar aquí si ésta me parece una generalización histórica correcta de los sucesivos puntos de vista prevalentes, pero la afirmación sobre el ámbito de la filosofía moderna marca las limitaciones de los escritos de Descartes.

Descartes remató su libro sobre geometría con las siguientes palabras (en la figura 26 se muestra la última página): «Espero que la posteridad me juzgue con benevolencia, no sólo por lo que he explicado, sino por lo que he omitido de forma deliberada con el fin de ceder a otros el placer del descubrimiento». No podía saber que un hombre que cumplía ocho años el año en que Descartes murió llevaría un paso, un colosal paso, más allá sus ideas de la matemática como corazón de la ciencia. Este genio sin parangón tuvo más oportunidades de experimentar el «placer del descubrimiento» que, probablemente, cualquier otra persona en la historia de la humanidad.


LIVRE TROISIESME. 413

les Probleſmes d'vn meſme genre, iay tout enſemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerſes; & ainſi de reſoudre chaſcun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui ſont ſolides, en coupant auſſy d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui ſont d'vn degré plus composés, en coupant tout de meſme d'vn cercle vne ligne qui n'eſt que d'vn degré plus compoſée que la Parabole; il ne faut que ſuiure la meſme voye pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſés a l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas malayſé de trouuer les autres. Et i'eſpere que nos neueux me ſçauront gré, non ſeulement des choſes que iay icy expliquées; mais auſſy de celles que iay omiſes volontairement, affin de leur laiſſer le plaiſir de les inuenter.

FIN.

FIGURA 26

El gran poeta inglés del siglo XVIII Alexander Pope (1686-1744) tenía treinta y nueve años cuando murió Isaac Newton (1641-1727) (en la figura 27 se muestra la tumba de Isaac Newton en la catedral de Westminster).[129]

FIGURA 27

En su célebre epitafio, Pope intentó condensar los logros de Newton:

> La naturaleza y las leyes naturales yacían ocultas en la noche. Dijo Dios: «¡Hágase Newton!». Y se hizo la luz.

Casi cien años después de la muerte de Newton, Lord Byron (1788-1824) agregó las siguientes líneas en su poema épico *Don Juan:*

> Y éste es el único mortal, desde Adán, que se las tuvo que ver con una caída y con una manzana.

Para muchas generaciones de científicos posteriores, Newton fue y sigue siendo una figura de proporciones legendarias, incluso si se dejan de lado los mitos. La famosa cita de Newton «si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes», se suele presentar como modelo de la generosidad y humildad que se espera de los científicos acerca de sus mayores descubrimientos. En realidad, Newton podría haber escrito esta frase como una sutil y velada respuesta sarcástica[130] a una carta de aquel a quien consideraba su principal némesis en el campo científico, el prolífico físico y biólogo Robert Hooke (1635-1703). Hooke había acusado en varias ocasiones a Newton de robarle sus ideas, primero sobre la teoría de la luz y luego sobre la gravedad. El 20 de enero de 1676, Hooke adoptó un tono más conciliador y, en una carta personal a Newton, declaró: «Supongo que tanto los designios de vos como los míos [en la teoría de la luz] apuntan al mismo objetivo, que es la búsqueda de la verdad, y supongo que ambos podemos soportar las objeciones que se nos plantean».

Newton decidió jugar al mismo juego. En su respuesta a la carta de Hooke,[131] del 5 de febrero de 1676, escribió: «Lo que Des-Cartes [Descartes] hizo fue un buen paso [se refería a las ideas de Descartes sobre la luz]. Vos lo habéis ampliado en diversos sentidos, en especial al tomar en consideración filosófica los colores de las placas delgadas. Si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de Gigantes». Hooke, lejos de ser un gigante, era más bien bajo y sufría de un grave encorvamiento, es posible que el verdadero sentido de la cita más famosa de Newton sea que ¡no le debía nada a Hooke! El hecho de que Newton aprovechase la mínima oportunidad para insultar a Hooke, y su negativa a imprimir su propio libro, *Óptica*, hasta después de la muerte de Hooke sugieren que posiblemente esta interpretación de la cita no sea demasiado descabellada. La enemistad entre los dos científicos alcanzó cotas aún mayores en lo referido a la teoría de la gravedad.[132] Cuando Newton se enteró de que Hooke afirmaba ser el creador de la ley de la gravitación, se dedicó con meticulosidad y afán vengativo a eliminar de la última parte de su libro dedicado a esta cuestión todas las referencias al nombre de Hooke. El 20 de junio de 1686 escribió a su amigo, el astrónomo Edmund Halley (1656-1742):

> …más bien debería [Hooke] haber pedido disculpas por razón de su incapacidad. Ya que de sus palabras se puede deducir claramente que no sabía hacia dónde ir. No dirás que no tiene gracia. Resulta que los matemáticos que descubren, establecen y hacen todo el trabajo deben contentarse con ser sólo simples calculadores y bestias de carga, y otros que no hacen nada más que fingir y dar palos de ciego en todas direcciones deben llevarse el honor de todas las invenciones de los que les siguen y de los que les han precedido.

Newton deja aquí meridianamente claro el motivo por el que pensaba que Hooke no merecía consideración alguna: era incapaz de formular sus ideas en el lenguaje de la matemática. Es bien cierto que la cualidad que hizo destacar las teorías de Newton, la característica propia que las convirtió en inevitables *leyes de la naturaleza*, era precisamente que estaban expresadas en forma de relaciones matemáticas de perfecta claridad y coherencia interna. En comparación, las ideas teóricas de Hooke, por muy ingeniosas que pudiesen ser en muchos casos, no parecían más que una amalgama de presentimientos, conjeturas y especulaciones.[133]

Casualmente, las actas de la Royal Society entre 1661 y 1682, que se consideraban perdidas, salieron a la luz en febrero de 2006. El volumen de pergamino, que contiene más de 520 páginas de caligrafía escrita por el propio Robert Hooke, se halló en una casa de Hampshire, Inglaterra, en donde se cree que estuvo encerrado en un armario durante unos cincuenta años.

Volviendo al golpe maestro de Newton, éste tomó la concepción de Descartes de que el universo podía describirse en términos matemáticos y la convirtió en una realidad funcional. En el prólogo de su monumental obra, *Principios matemáticos de la filosofía natural (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocida como los *Principia)*, declaró:

> …proponemos estos nuestros como principios matemáticos de filosofía. Pues toda la dificultad de la filosofía parece consistir en que, a partir de los fenómenos del movimiento, investiguemos las fuerzas de la naturaleza y después desde estas fuerzas demostremos el resto de los fenómenos. A esto se refieren las proposiciones generales que tratamos en los Libros primero y segundo. En el Libro tercero proponemos un ejemplo de esto con la explicación del sistema del mundo. Pues allí, a partir de los fenómenos celestes, por medio de proposiciones demostradas matemáticamente en los libros anteriores, se deducen las fuerzas de la gravedad por las que los cuerpos tienden hacia el Sol y a cada uno de los planetas. Después, a partir de estas fuerzas, también por proposiciones matemáticas, se deducen los movimientos de los planetas, cometas, Luna y mar.[134]

Cuando se comprende que, en sus *Principia*, Newton logró realmente todo lo que promete en el prólogo, la única reacción posible es «¡Caray!». La insinuación de superioridad de Newton respecto del trabajo de Descartes es también inequívoca: el título que eligió para su obra fue *Principios matemáticos*, en contraste con los *Principios de filosofía* de Descartes. Newton adoptó también el mismo razonamiento y metodología matemáticos en otro libro más experimental, *Óptica*.[135] Empieza diciendo: «Mi designio en este libro no es dar explicación a las Propiedades de la Luz mediante Hipótesis, sino declararlas y demostrar mediante la Razón y la Experimentación. Para ello tomaré como premisa las siguientes definiciones y Axiomas». A continuación prosigue como si se tratase de un texto de geometría euclidiana, con definiciones y proposiciones concisas. En la conclusión de la obra, Newton, para mayor énfasis, agregó: «Como en la Matemática, también en la Filosofía Natural la Investigación de las Cuestiones difíciles por el Método del Análisis debería preceder siempre al Método de la Redacción».

Con las herramientas matemáticas de las que disponía, las proezas de Newton no pueden más que calificarse de milagrosas. Este genio, que por una coincidencia histórica nació el mismo año de la muerte de Galileo, formuló las leyes fundamentales de la mecánica, descifró las leyes que describen los movimientos de los planetas, erigió las bases teóricas de los fenómenos de la luz y el color, y fundó el estudio del cálculo diferencial e integral. Por sí solos, estos logros habrían bastado para valer a Newton un lugar de honor en la galería de los más insignes científicos. Pero fueron sus trabajos sobre la gravedad los que lo elevaron al punto más alto del podio de los «magos», el sitio reservado para el científico más grande de la historia. Este trabajo tendió, de forma literal, un puente entre los cielos y la tierra, combinó los campos de la astronomía y la física y puso el cosmos entero bajo el paraguas de la matemática. ¿Cómo nació esta obra maestra, los *Principia?*

Empecé a pensar en la gravedad que alcanzaba el orbe de la luna

William Stukeley (1687-1765), un anticuario y médico amigo de Newton (a pesar de la diferencia de edad de más de cuatro décadas) acabó siendo el primer biógrafo del gran científico. En sus *Memorias de la vida de Sir Isaac Neivton* podemos hallar un relato de una de las leyendas más célebres de la historia de la ciencia:[136]

> El 15 de abril de 1726 visité a Sir Isaac en su vivienda de los edificios Orbils en Kensington, en donde almorzamos y pasamos el día juntos, solos … Tras el almuerzo, él y yo salimos al jardín a tomar el té bajo la sombra de unos manzanos, para disfrutar del tiempo bonancible. Entre otros asuntos, me dijo que se hallaba en la misma situación que cuando antes [en 1666, cuando Newton volvió a su casa desde Cambridge a causa de la plaga] la idea de gravitación había acudido a su mente. Lo había ocasionado la caída de una manzana mientras se encontraba en un estado contemplativo. ¿Por qué caería siempre la manzana perpendicularmente al suelo?, pensó para sí. ¿Por qué no de lado o hacia arriba, sino constantemente hacia el centro de la tierra? Con seguridad, la razón es que la tierra la atrae. Debe de haber una fuerza de atracción en la materia, y la suma de esta fuerza de atracción en la materia de la tierra debe de hallarse en el centro de la tierra, no en uno de sus costados. Así, la manzana cae perpendicularmente, o hacia el centro. Si la materia atrae de este modo a la materia, debe de ser proporcionalmente a su cantidad, Así, la manzana atrae a la tierra, de igual modo que la tierra atrae a la manzana. Que hay una fuerza, como la que aquí llamamos gravedad, que se extiende por todo el universo … Así fue el nacimiento de esos sorprendentes descubrimientos sobre cuya robusta base construyó la filosofía, para asombro de toda Europa.

Ocurriera o no ese mítico incidente con la manzana en 1666,[137] la leyenda no da una medida justa del genio de Newton y la excepcional profundidad de su pensamiento analítico. Aunque no cabe duda de que Newton había escrito su primer manuscrito sobre la teoría de la gravedad antes de 1669, no tenía necesidad alguna de ver una manzana que caía para saber que la Tierra atraía los objetos hacia su superficie. Tampoco pudo surgir su increíble inspiración en la formulación de una ley de gravitación *universal* de la simple visión de una manzana cayendo. De hecho, ciertas indicaciones sugieren que algunos de los conceptos esenciales que Newton necesitaba para poder enunciar una fuerza gravitatoria de acción universal no se concibieron hasta 1684-1685. Las ideas de tal magnitud son tan inusuales en los anales de la ciencia que incluso alguien con una mente extraordinaria como Newton sólo podía llegar a ella a través de una larga serie de etapas intelectuales.

Todo pudo haber empezado en los años jóvenes de Newton[138] con su, digamos, imperfecto encuentro con el colosal tratado de geometría de Euclides, *Elementos.* Según palabras del propio Newton, al principio sólo leyó «los títulos de las proposiciones», porque las halló tan fáciles de entender que se preguntó «por qué alguien iba a entretenerse en demostrarlas». La primera proposición que le hizo detenerse y agregar unas cuantas líneas al libro fue la que establecía que «en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a los cuadrados de los otros dos lados», el Teorema de Pitágoras. Sorprendentemente, aunque Newton había leído algunos libros de matemáticas mientras estaba en el Trinity College, no había leído muchas de las obras de las que ya se disponía en aquellos días. ¡Está claro que no le hacía falta! El libro que resultó más influyente en cuanto a la guía que proporcionó al pensamiento científico y matemático de Newton, fue precisamente *La Géometrié* de Descartes. Newton lo leyó en 1664 y lo releyó varias veces hasta que «gradualmente llegó a dominarlo por entero». La flexibilidad que permitía el uso de la noción de funciones y de sus variables libres abrió a Newton una infinidad de posibilidades. La geometría analítica no sólo allanó el camino para que Newton desarrollase el *cálculo,* con la exploración de las funciones, sus tangentes y sus curvaturas, sino que actuó como catalizador de su espíritu científico. Atrás quedaban las aburridas construcciones con regla y compás, sustituidas por curvas arbitrarias que se podían representar mediante expresiones algebraicas. Entonces, entre 1665 y 1666, una espantosa plaga asoló Londres. Cuando el número semanal de muertos alcanzó los millares, las facultades de Cambridge se vieron obligadas a cerrar sus puertas. Newton tuvo que dejar su puesto y volver a su casa en el distante poblado de Woolsthorpe. Allí, en el tranquilo ambiente campestre, llevó a cabo su primer intento de demostrar que la fuerza que mantenía la Luna en órbita alrededor de la Tierra y la gravedad de la Tierra (la misma fuerza que hacía caer las manzanas) eran, en realidad, *la misma.* Newton describió estos y otros empeños en un informe escrito alrededor de 1714:

> Ese mismo año [1666] empecé a pensar que la gravedad se extendía hasta la órbita de la Luna y, habiendo hallado la forma de calcular la fuerza con la que [un] globo que gira dentro de una esfera presiona la superficie de la esfera, a partir de la Regla de períodos de los Planetas de Kepler, estando en proporción sesquiáltera de sus distancias desde los centros de sus Órbitas, deduje que *las fuerzas que mantienen los Planetas en sus Órbitas deben [ser] recíprocamente como los cuadrados de las distancias de los centros alrededor de los que giran:* y de ese modo comparé la fuerza requisita para mantener la Luna en su Órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra y hallé que las respuestas eran muy próximas. Todo esto tuvo lugar en los dos años de la plaga de 1665 y 1666, y desde entonces presté más atención que nunca a la Matemática y a la Filosofía. (La cursiva es mía.)[139]

Newton habla aquí de su importante deducción (a partir de las leyes del movimiento planetario de Kepler) de que la atracción gravitatoria entre dos cuerpos esféricos varía de forma inversa al cuadrado de la distancia entre ellos. En otras palabras, si la distancia entre la Tierra y la Luna se triplicase, la fuerza gravitatoria experimentada por la Luna sería nueve (tres al cuadrado) veces menor.

Por motivos no del todo claros,[140] Newton abandonó toda investigación sobre temas de gravitación y movimiento planetario hasta 1679. Entonces recibió dos cartas de su acérrimo rival Robert Hooke que renovaron su interés en la dinámica en general y, en particular, en el movimiento planetario. Los resultados de esta curiosidad renovada fueron espectaculares: a partir de las leyes de la mecánica que había formulado, Newton demostró la segunda ley del movimiento planetario de Kepler. En concreto, demostró que, a medida que el planeta se mueve en su órbita elíptica alrededor del Sol, la línea que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (figura 28).

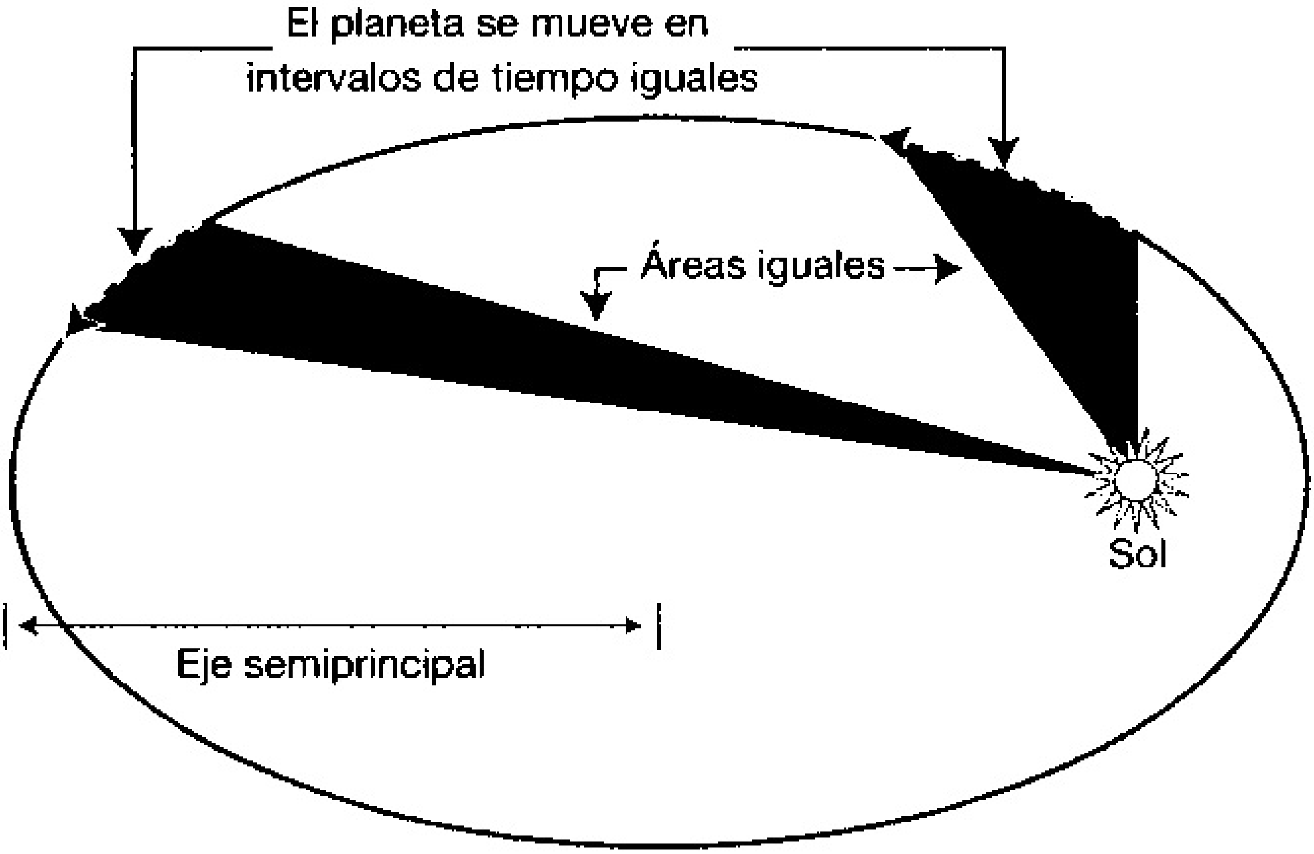


FIGURA 28

También demostró que «para un cuerpo que gira describiendo una elipse … la ley de la atracción dirigida al foco de la elipse … es inversa al cuadrado de la distancia». Estas afirmaciones representan importante hitos en el camino hacia los *Principia.*

«PRINCIPIA»

Halley visitó a Newton en Cambridge en primavera o verano de 1684. Halley llevaba un tiempo comentando las leyes del movimiento planetario de Kepler con Hooke y con el célebre arquitecto Christopher Wren (1632-1723). En estas conversaciones informales, tanto Hooke como Wren afirmaban haber deducido la ley del inverso de los cuadrados unos años antes, pero ninguno de los dos fue capaz de construir una teoría matemática completa a partir de su deducción. Halley decidió formular la pregunta crucial a Newton: ¿sabía cuál sería la forma de la órbita de un planeta afectado por una fuerza de atracción variable según una ley de cuadrados inversos? Para su sorpresa, Newton le respondió que hacía varios años que había demostrado que la órbita sería una elipse.

* joy & amazement asked him how he knew it,
why saith he I have calculated it, Whereupon
Dr Halley asked him for his calculation without
any farther delay, Sr Isaac looked among his
papers but could not find it, but he promised
him to renew it, & then to send it him, Sr
Isaac in order to make good his promise fell to
work again, but he could not come to that conclusion
wch he thought he had before examined with care,
however he attempted a new way which tho longer
than the first, brought him again to his former
conclusion, then he examined carefully what
might be the reason why the calculation he had
undertaken before did not prove right, & he
found that having drawn an Ellipsis coursorily
with his own hand, he had drawn the two Axes
of the Curve, instead of drawing two Diameters
somewhat inclined to one another, whereby he
might have fixed his imagination to any two
conjugate diameters, which was requisite he
should do, that being perceived, he made both
his calculations agree together.

After this Dr Halley was (I think)
sent down to Cambridge by the Royal
Society to prevail with Sr Isaac to
print his discoveries wch gave rise
to the Principia.

Dr Halley has often valued himself thus
for having been the Ulysses who produced that
Achilles.

FIGURA 29

El matemático Abraham de Moivre (1667-1754) relata esta historia en uno de sus escritos (del que se muestra una página en la figura 29):

> En 1684, Halley fue a visitarlo [a Newton] a Cambridge; al cabo de un tiempo de estar juntos, el doctor le preguntó qué curva pensaba que describirían los planetas suponiendo que la fuerza de atracción hacia el Sol fuese recíproca al cuadrado de la distancia de él. Sir Isaac replicó de inmediato que sería una Elipsis [elipse]; el Doctor, impresionado y pletorico, le preguntó cómo lo sabía, a lo que él [Newton] repuso que lo había calculado. El doctor Halley le pidió que le mostrase sus cálculos sin demora; sir Isaac, después de buscar entre sus papeles, no pudo encontrarlos, pero le prometió que los volvería a hacer y se los enviaría. [141]

Halley volvió a visitar a Newton en noviembre de 1684. Entre ambas visitas, Newton trabajó como un poseso. De Moivre nos ofrece esta breve descripción:

> A fin de cumplir su promesa, sir Isaac se puso de nuevo al trabajo, pero no pudo alcanzar la conclusión que creía haber examinado meticulosamente antes; sin embargo, probó una nueva forma que, aunque en más tiempo que la primera, le llevó de nuevo a su antigua conclusión, y luego examinó con atención cuál podría haber sido la razón por la que los cálculos que había realizado no demostraron ser correctos, y … hizo que ambos cálculos coincidiesen.

Este árido resumen no ofrece siquiera una remota idea de lo que Newton había logrado en realidad en los meses transcurridos entre las visitas de Halley. Escribió todo un tratado, *De Motu Corporum in Gyrum*, en el que demostraba casi todos los aspectos de los cuerpos que se mueven en órbitas circulares o elípticas, demostró todas las leyes de Kepler e incluso resolvió el problema para una partícula que se mueve en un medio con resistencia (como el aire). Halley quedó abrumado. Para su satisfacción, se las arregló para convencer a Newton de que publicase todos estos asombrosos descubrimientos; por fin, el momento de los *Principia* se aproximaba.

Al principio, Newton había concebido el libro como una versión ampliada y más detallada de su tratado *De Motu*. No obstante, cuando empezó a trabajar, se dio cuenta de que algunos de los temas requerían de una más profunda reflexión. Dos aspectos en particular inquietaban a Newton. Uno de ellos consistía en que Newton había formulado originalmente su ley de atracción gravitatoria como si el Sol, la Tierra y los planetas fuesen *masas puntuales* matemáticas, sin dimensiones. Por descontado, sabía que esto no era cierto, por lo que consideraba que sus resultados eran sólo una aproximación cuando se aplicaban al sistema solar. Algunos especulan incluso que el motivo de que abandonase su investigación sobre la gravedad en 1679 fue su descontento con este estado de cosas.[142] Con respecto a la fuerza sobre la manzana, la situación era aún peor. En este caso, está claro que la parte de la Tierra que se encuentra justo debajo de la manzana está a una distancia muy inferior a la de la parte que está al otro lado del planeta. ¿Cómo se podía calcular la atracción neta? El astrónomo Herbert Hall Turner (1861-1930) describía así la lucha interna de

Newton en un artículo que apareció el 19 de marzo de 1927 en el *Times* de Londres:

> En aquella época se le ocurrió la idea general de la atracción variable como el cuadrado inverso de la distancia, pero vio graves obstáculos en su aplicación completa, obstáculos de los que otras mentes menos preclaras no eran conscientes. La más importante de estas dificultades no pudo superarla hasta 1685 … Se trataba de relacionar la atracción de la Tierra sobre un cuerpo tan lejano como la Luna y la atracción que ejerce sobre una manzana situada a corta distancia de su superficie. En el primer caso, las diversas partículas que componen la Tierra (a la que Newton esperaba ampliar su ley, haciéndola así universal) se encuentran a distancias no muy distintas de la Luna en cuanto a magnitud o dirección; pero sus distancias con respecto a la manzana diferían de forma conspicua, tanto en tamaño como en dirección. ¿Cómo se podrían combinar o sumar las diversas atracciones del segundo caso para obtener una única resultante? ¿Y en qué «centro de gravedad», en su caso, se concentrarían?

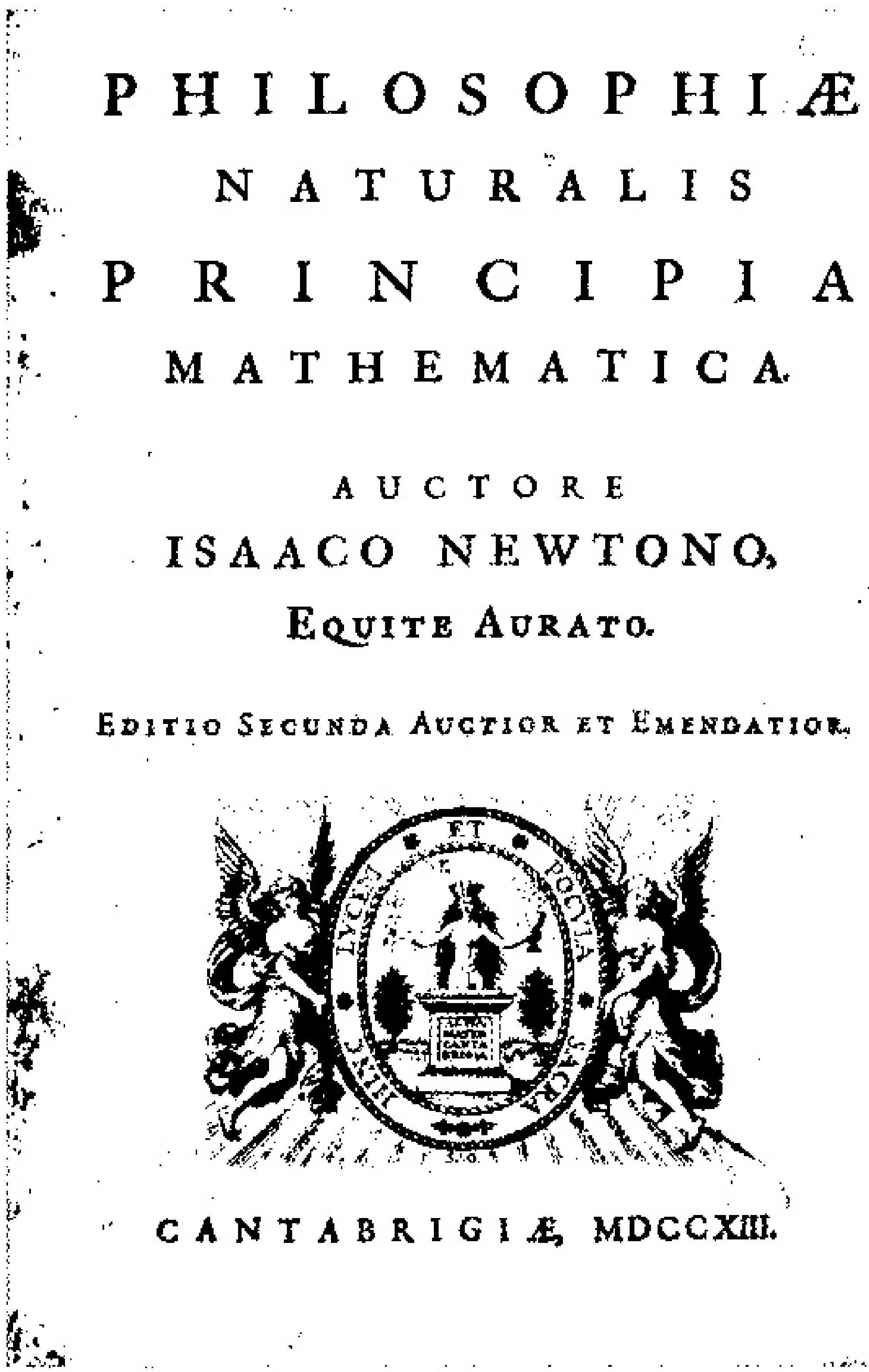
El avance decisivo llegó finalmente en la primavera de 1685. Newton logró demostrar un teorema esencial: para dos cuerpos esféricos, «toda la fuerza con que una de estas esferas atrae a la otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros». ¡Es decir, *para la gravitación, los cuerpos esféricos actúan como si fuesen masas puntuales concentradas en sus centros!* El matemático James Whitbread Lee Glaisher (1848-1928) destacaba la importancia de esta bella demostración. En su parlamento durante la celebración del bicentenario de los *Principia* de Newton, Glaisher afirmó:

> En cuanto Newton pudo demostrar su soberbio teorema —y por sus palabras sabemos que no tenía esperanzas de obtener un resultado tan bello hasta que éste surgió de su investigación matemática—, todo el mecanismo del universo se mostró de repente ante él. ¡Qué distintas debieron aparecer estas proposiciones a los ojos de Newton cuando se dio cuenta de que sus resultados, que había tomado por aproximados al aplicarlos al sistema solar, eran en realidad exactos! … Podemos imaginar el efecto que esta súbita transición de aproximación a exactitud tuvo para estimular la mente de Newton a la consecución de logros aún mayores. Ahora tenía en sus manos la capacidad de aplicar con total precisión el análisis matemático a las cuestiones reales de la astronomía.[143]

El otro aspecto que al parecer seguía irritando a Newton cuando escribió el primer borrador de *De Motu* era el haber despreciado la influencia de las fuerzas con las que los planetas atraían al Sol. En otras palabras, en su formulación original, Newton redujo al Sol a un mero papel de centro de fuerza *inamovible* que, usando las palabras del propio Newton, «apenas existe» en el mundo real. Este esquema se contradecía con la propia *tercera ley del movimiento* de Newton, según la cual «las acciones de cuerpos que atraen y que son atraídos son siempre mutuas e iguales». Cada planeta atrae al Sol con la misma fuerza con la que el Sol atrae al planeta. Por consiguiente, agregó, «si hay dos cuerpos [como la Tierra y el Sol], ni el cuerpo que atrae ni el cuerpo que es atraído pueden estar en reposo». El darse cuenta de este aspecto aparentemente poco importante fue en realidad un paso fundamental hacia el concepto de gravitación universal. Podemos intentar adivinar por dónde transcurrió la línea de pensamiento de Newton: si el Sol tira de la Tierra, la Tierra debe también tirar del Sol, y con idéntica fuerza. Es decir, la Tierra no se limita a orbitar alrededor del Sol, sino que ambos giran alrededor de su centro de gravedad común. Pero eso no es todo: el resto de los planetas atraen también al Sol, y de hecho cada planeta sufre la atracción, no sólo del Sol, sino también de los demás planetas. Esa misma lógica puede aplicarse a Júpiter y sus satélites, a la Tierra y la Luna, e incluso a la manzana y la Tierra. La conclusión es de una increíble simplicidad: *sólo hay una fuerza de gravitación, y actúa sobre cualquier par de masas, en cualquier lugar del universo.* Esto era cuanto Newton necesitaba. Los *Principia* —510 densas páginas en latín— se publicaron en julio de 1687.

Newton realizó observaciones y experimentos cuya precisión no superaba el 4 por 100, y estableció a partir de ellos una ley matemática de la gravitación cuya precisión resultó ser mejor que una parte por millón. Por primera vez combinó *explicaciones* de los fenómenos naturales con el poder de *predicción* de los resultados de observaciones. La física y la matemática quedaron unidas para siempre, mientras que el divorcio entre la ciencia y la filosofía se hizo inevitable.

La segunda edición de los *Principia*, con exhaustivas modificaciones de Newton y, en especial, del matemático Roger Cotes (1682-1716), vio la luz en 1713 (en la figura 30 se puede ver la portada).



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.

EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.

CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

FIGURA 30

Newton, que no se caracterizaba precisamente por ser una persona afectuosa, ni siquiera se molestó en dar las gracias a Cotes por su fabuloso trabajo en el prólogo del libro. Sin embargo, cuando Cotes falleció a los treinta y tres años debido a unas violentas fiebres, Newton mostró un cierto reconocimiento: «Si hubiese vivido más tiempo habríamos oído hablar de él».

Curiosamente, algunos de los más notables comentarios de Newton acerca de Dios sólo aparecieron como observaciones de último momento en la segunda edición. En una carta a Cotes fechada el 28 de marzo de 1713, menos de tres meses antes de la finalización de la segunda edición de los *Principia*, Newton incluía la frase: «Sin duda es cometido de la filosofía natural el disertar sobre Dios a partir de los fenómenos [de la Naturaleza]». En efecto, Newton expresó sus ideas acerca de un Dios «eterno e infinito, omnipotente y omnisciente» en el *General Scholium*, el apartado que, a su juicio, daba el toque final a los *Principia*.

¿Cambió acaso el papel de Dios en este universo cada vez más matemático? ¿O era quizá percibido cada vez más como un matemático? Después de todo, hasta la formulación de la ley de la gravitación, los movimientos de los planetas se consideraban de forma inequívoca como obras de Dios. ¿Cómo vieron los ojos de Newton y Descartes este cambio de punto de vista hacia una explicación científica de la naturaleza?

El Dios matemático de Newton y Descartes

Como la mayoría de las personas de su época, Newton y Descartes eran religiosos. El escritor francés de seudónimo Voltaire (1694-1778), que escribió ampliamente sobre Newton, dijo en una famosa cita: «Si Dios no existiese, sería necesario inventarlo».

Para Newton, la existencia misma del mundo y la regularidad matemática del cosmos observado eran pruebas de la presencia de Dios.[144] Este tipo de razonamiento causal fue utilizado por vez primera por el teólogo Tomás de Aquino (ca. 1225-1274), y sus argumentos se pueden clasificar con las etiquetas filosóficas generales de *argumento cosmológico* y *argumento teleológico*. En términos sencillos, el argumento cosmológico afirma que, puesto que el mundo físico debe de haber empezado a existir de algún modo, tiene que haber una Causa Primera, concretamente un Dios creador. El argumento teleológico o *argumento de diseño* intenta proporcionar pruebas de la existencia de Dios a partir de la apariencia de que el mundo ha sido diseñado. Esta es la opinión de Newton, tal como aparece en los *Principia:* «Este sistema de singular belleza del sol, los planetas y los cometas sólo puede originarse en el consejo y el dominio de un Ser poderoso e inteligente. Y, si las estrellas fijas son el centro de otros tantos sistemas similares, estos sistemas, formados por similar consejo, deben todos estar sometidos al dominio de Uno». La validez de los argumentos cosmológico, teleológico y otros similares como «demostraciones» de la existencia de Dios ha sido objeto de debate entre filósofos durante siglos.[145] Mi opinión personal siempre ha sido que los teístas no necesitan de estos argumentos para estar convencidos, y que no hay duda de que a los ateos no les convencen.

Newton agregó una vuelta de tuerca adicional a la universalidad de estas leyes. Consideraba que el hecho de que todo el cosmos estuviese gobernado por las *mismas* leyes y pareciera ser estable era una prueba más de la presencia de la mano de Dios: «Especialmente siendo que la luz de las estrellas fijas es de la *misma naturaleza* que la del Sol, y de todos los sistemas la luz pasa a todos los demás sistemas: y para que los sistemas de las estrellas fijas no caigan, por su gravedad, mutuamente unos sobre otros, él ha situado estos sistemas a inmensas distancias entre sí». (La cursiva es mía.)

En su libro *Óptica*, Newton dejó claro que no creía que las leyes de la naturaleza bastasen por sí mismas para explicar la *existencia* del universo; Dios era el creador y el soporte de todos los átomos que constituían la materia cósmica. «Porque a Él [Dios], que los creó [los átomos], le pareció apropiado ponerlos en orden. Y, si Él lo hizo, no es propio de la filosofía buscar otro Origen del Mundo, o pretender que puede surgir de un Caos por la mera acción de las Leyes de la Naturaleza.» En otras palabras, para Newton, Dios era matemático (entre otras cosas), y no sólo era una forma de hablar, sino que lo era de forma casi literal; el Dios Creador dio existencia a un mundo físico gobernado por leyes matemáticas.

Descartes, con una mayor inclinación que Newton hacia la filosofía, estaba absorto en la idea de *demostrar* la existencia de Dios. Para él, el camino desde la certidumbre de nuestra propia existencia («Pienso, luego existo») a nuestra capacidad de tejer un tapiz de ciencia objetiva debía pasar por una demostración irrefutable de la existencia de un Dios de suprema perfección. Este Dios, afirmaba, era el origen último de toda verdad, y el único garante de la Habilidad del razonamiento humano. Este argumento de sospechoso aspecto circular (conocido como *Círculo cartesiano)* fue criticado incluso en la época de Descartes, especialmente por parte del perspicaz filósofo Antoine Arnauld (1612-1694). Arnauld planteó una pregunta de una devastadora simplicidad: si necesitamos demostrar la existencia de Dios para *garantizar* la validez del proceso de razonamiento humano, ¿cómo podemos confiar en tal demostración, que es a su vez un producto de la mente humana? Descartes hizo varios intentos desesperados de huir de este círculo vicioso, pero muchos de los filósofos posteriores no pensaron que sus esfuerzos fuesen demasiado convincentes. La «prueba adicional» de Descartes para la existencia de Dios también era cuestionable. Desde un punto de vista filosófico general se puede denominar un *argumento ontológico.* El teólogo y filósofo san Anselmo de Canterbury (1033-1109) fue el primero en formular un argumento de este tipo en 1078, y desde entonces ha vuelto a aparecer en distintas encarnaciones. El constructo lógico tiene un aspecto similar a éste: por definición, Dios es tan perfecto que es el *mayor ente que se puede concebir.* Pero, si no existiese, se podría concebir un ente mayor aún que, además de estar dotado de todas las perfecciones de Dios, existiese también. Esto representaría una contradicción a la definición de Dios como mayor ente concebible; por todo ello, Dios debe existir. En palabras de Descartes: «La existencia no puede separarse de la esencia de Dios, de igual modo que no se puede separar de la esencia de un triángulo el hecho de que sus ángulos suman dos ángulos rectos».

Este tipo de estratagema lógica no resulta convincente para un buen número de filósofos;[146] su argumento es que *la lógica por sí sola no basta* para establecer la *existencia* de cualquier cosa que tenga consecuencias en el mundo físico, en particular un ente de la grandiosidad de Dios.

Curiosamente, Descartes fue acusado de fomentar el ateísmo, y sus obras entraron en el índice de libros prohibidos de la Iglesia Católica en 1667. A la luz de la insistencia de Descartes en plantear que Dios era el garante definitivo de la verdad, no deja de ser una acusación estrambótica.

Dejando aparte las cuestiones puramente filosóficas, el punto de más interés para nuestros objetivos es la perspectiva de Descartes de que Dios era el creador de todas las «verdades eternas». En particular, declaró que «las verdades matemáticas que llamáis eternas han sido establecidas por Dios y dependen por completo de Él, de igual modo que el resto de sus criaturas». Así, el Dios cartesiano era *más que un matemático*, en el sentido de que era tanto el creador de la matemática como de un mundo físico basado por completo en la matemática. Según esta visión del mundo, está claro que los humanos se limitan a *descubrir* la matemática, no a inventarla.

Las obras de Galileo, Descartes y Newton cambiaron profundamente la relación entre la matemática y las ciencias. En primer lugar, los explosivos desarrollos en ciencias se convirtieron en poderosas motivaciones para la investigación matemática. Además, a través de las leyes de Newton, incluso los campos más abstractos de la matemática —como el cálculo— se convirtieron en la *esencia* de las explicaciones físicas. Por último, y quizá más importante, los límites entre la matemática y la ciencia quedaron desdibujados hasta ser irreconocibles, llegando prácticamente a una fusión entre los conceptos matemáticos y amplias franjas de la exploración científica. Estos acontecimientos crearon un entusiasmo por la matemática que no sucedía desde el tiempo de los antiguos griegos. Los matemáticos sentían que el mundo era matemático y que ofrecía un ilimitado potencial de descubrimiento.

5
Estadísticos y probabilistas: la ciencia de la incertidumbre

El mundo no se está quieto. La mayor parte de los objetos que nos rodean están en movimiento o cambian continuamente. Incluso la Tierra bajo nuestros pies, que parece tan firme, está de hecho rotando sobre su eje, girando alrededor del Sol y viajando (junto con éste) alrededor del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea. El aire que respiramos se compone de billones de moléculas que se mueven sin cesar de forma aleatoria. Al mismo tiempo, las plantas crecen, los materiales radiactivos se desintegran, la temperatura de la atmósfera sube y baja de forma cotidiana —además de con cada estación— y la expectativa de vida humana no deja de aumentar. Sin embargo, esta agitación cósmica no amilanó a la matemática. Newton y Leibniz introdujeron la rama denominada *cálculo*[147] específicamente para poder efectuar un análisis riguroso y una modelización precisa del movimiento y del cambio. En nuestros días, la potencia de esta increíble herramienta que lo abarca todo permite utilizarla para examinar problemas tan dispares como el movimiento de la lanzadera espacial o la propagación de una enfermedad infecciosa. De igual modo que las películas capturan el movimiento fraccionándolo en secuencias de fotogramas, el cálculo puede medir el cambio mediante una retícula tan fina que permite determinar cantidades cuya existencia es extremadamente efímera, como la velocidad, la aceleración o el ritmo de cambio *instantáneos.*

Guiados por los gigantescos avances de Newton y Leibniz, los matemáticos de la «Era de la Razón» (finales del siglo XVII y siglo XVIII) desarrollaron el cálculo hasta crear la poderosa rama de las *ecuaciones diferenciales,* de innumerables aplicaciones. Esta nueva arma permitió a los científicos presentar detalladas teorías matemáticas de fenómenos que iban desde la música que produce una cuerda de violín al transporte del calor, desde el movimiento de una peonza al flujo de líquidos y gases. Durante un tiempo, las ecuaciones diferenciales se convirtieron en la herramienta favorita del progreso en física.

Entre los primeros que exploraron las nuevas perspectivas abiertas por las ecuaciones diferenciales se hallaban algunos miembros de la legendaria familia Bernoulli.[148] Entre mediados del siglo XVII y mediados del siglo XIX, esta familia produjo nada menos que ocho matemáticos destacados. Estos talentosos individuos se hicieron tan conocidos por sus disputas familiares como por su sobresaliente habilidad para la matemática.[149] Aunque los conflictos de los Bernoulli tenían siempre relación con su competencia por la supremacía en el terreno matemático, algunos de los problemas que abordaron pueden no parecer muy significativos desde un punto de vista actual. Sin embargo, con frecuencia la solución a estos intrincados enigmas allanó el camino para la consecución de logros matemáticos más destacados. En conjunto, no cabe duda que los Bernoulli tuvieron un papel fundamental en el establecimiento de la matemática como el lenguaje de los procesos físicos.

Como ejemplo de la complejidad de las mentes de dos de los Bernoulli más brillantes —los hermanos Jakob (1654-1705) y Johann (1667-1748)—, valga la siguiente historia. Jakob Bernoulli fue uno de los pioneros de la *teoría de las probabilidades,* y volveremos a mencionarlo en este capítulo. Sin embargo, en 1690, Jakob estaba ocupado desempolvando un problema que el renacentista por antonomasia —Leonardo da Vinci— había examinado hacía dos siglos: ¿Qué forma adopta una cadena elástica pero inextensible suspendida de dos puntos fijos (como se muestra en la figura 31)?

FIGURA 31

En sus cuadernos de notas, Leonardo había esbozado algunas cadenas como la descrita. El problema fue presentado también a Descartes por su amigo Isaac Beeckman, pero no hay constancia de que Descartes intentase nunca resolverlo. Históricamente, el problema acabó adoptando la denominación de *problema de la catenaria*[150] (de la palabra latina *catena*, cadena). Galileo creyó que la forma debía de ser una parábola, pero el jesuita francés Ignatius Pardies (1636-1673) demostró que se equivocaba. Sin embargo, Pardies no daba la talla para resolver matemáticamente cuál era la forma correcta.

Sólo un año después de que Jakob Bernoulli plantease el problema, su hermano Johann lo resolvió (mediante una ecuación diferencial). Leibniz y el físico matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) lo resolvieron también, pero la solución de Huygens utilizaba un método geométrico más críptico. El hecho de que Johann lograse resolver un problema que había frustrado los intentos de su hermano y maestro, Jakob, seguía suponiendo una tremenda satisfacción para el joven Bernoulli hasta trece años después de la muerte de Jakob. En una carta que Johann escribió al matemático francés Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), no podía ocultar su complacencia:

> Dice que mi hermano planteó este problema, y es cierto, pero ¿puede acaso colegirse que disponía de una solución para él? En absoluto. Cuando planteó el problema después de que yo se lo sugiriese (ya que yo fui el primero que pensó en él), ninguno de los dos fuimos capaces de encontrar la solución y, perdida la esperanza, lo calificamos de insoluble, hasta que el Sr. Leibniz publicó en el boletín de Leipzig de 1690, p. 360, que había resuelto el problema, pero no publicó la solución para dar tiempo a otros analistas; y esto fue lo que nos animó a mi hermano y a mí a volver a él con un nuevo enfoque.[151]

Después de atribuirse con todo descaro la propiedad incluso de la *sugerencia* del problema, Johann prosigue con mal disimulado deleite:

> Los esfuerzos de mi hermano no se vieron premiados por el éxito; yo, por mi parte, fui más afortunado, ya que hallé la habilidad (y lo digo sin presunción; ¿por qué habría de ocultarlo?) de resolverlo en su totalidad … Es cierto que su estudio me robó el sueño durante una noche entera … pero, a la mañana siguiente, lleno de júbilo, fui al encuentro de mi hermano, que seguía batallando miserablemente con este nudo gordiano sin llegar a ninguna parte, pensando como Galileo que la catenaria era una parábola. «¡Detente! ¡Detente!», exclamé, «¡deja de torturarte para intentar demostrar la identidad de la catenaria con la parábola, puesto que es falsa …» Yahora me asombro al ver que concluye que mi hermano halló un método para resolver este problema … Y yo le pregunto, ¿cree en realidad que, si mi hermano hubiese resuelto el problema en cuestión, habría sido tan atento conmigo como para no aparecer en la lista de los que lo solucionaron, con el fin de cederme la gloria de aparecer en solitario en escena como el primero que lo resolvió, junto con los Sres. Huygens y Leibniz?

Por si era necesaria alguna prueba de que los matemáticos son, después de todo, humanos, he aquí esta historia. Sin embargo, esta rivalidad familiar no quita mérito alguno a los logros de los Bernoulli. Durante los años posteriores al episodio de la catenaria, Jakob, Johann y Daniel Bernoulli (1700-1782) no sólo resolvieron otros problemas similares de cuerdas que cuelgan, sino que lograron un progreso general de la teoría de ecuaciones diferenciales y resolvieron el problema del movimiento de proyectiles con un medio con resistencia.

La historia de la catenaria ilustra otra faceta de la potencia de las matemáticas: incluso los problemas físicos de apariencia más trivial poseen soluciones matemáticas. A propósito, la propia forma de la catenaria sigue haciendo las delicias de los millones de visitantes del famoso Gateway Arch en Saint Louis, Missouri. El arquitecto finés-americano Eero Saarinen (1910-1961) y el ingeniero de estructuras germano-americano Hannskarl Bandel (1925-1993) diseñaron esta icónica estructura con una forma similar a la de una catenaria invertida.

El increíble éxito de las ciencias físicas en el descubrimiento de las leyes matemáticas que gobiernan el cosmos en general planteó de forma inevitable la pregunta de si los procesos biológicos, sociales o económicos podían basarse en principios similares. Los matemáticos se preguntaban si la matemática era únicamente el idioma de la *naturaleza, o* también lo era de la *naturaleza humana.* Aunque no existan principios realmente universales, ¿pueden las leyes matemáticas utilizarse, como mínimo, para modelar y ofrecer explicaciones de los comportamientos sociales? Al principio, muchos matemáticos estaban convencidos de que ciertas «leyes» basadas en una u otra versión del cálculo serían capaces de predecir con precisión cualquier acontecimiento futuro, grande o nimio. Esta era la opinión, por ejemplo, del gran físico matemático Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Los cinco volúmenes de la *Mécanique celeste* de Laplace ofrecieron la primera solución prácticamente completa (si bien de un modo aproximado) de los movimientos del sistema solar. Además, Laplace dio respuesta a una pregunta que intrigó incluso al gigante Newton: ¿Por qué el sistema solar es estable en su estado actual? Newton pensó que, debido a sus atracciones mutuas, los planetas debían caer hacia el Sol o salir despedidos hacia el espacio, y atribuyó a la mano de Dios la responsabilidad de mantener intacto el sistema solar. El punto de vista de Laplace era bastante distinto. En lugar de confiar en el trabajo de Dios, se limitó a *demostrar* matemáticamente que el sistema solar es estable a lo largo de períodos de tiempo mucho más prolongados que los previstos por Newton. Laplace introdujo además otro formalismo matemático denominado *teoría de perturbaciones* que le permitió calcular el efecto acumulado de muchas perturbaciones reducidas sobre la órbita de un planeta. Como remate, Laplace propuso uno de los primeros modelos del *origen* del sistema solar: su influyente «hipótesis nebular», en la que el sistema solar se formaba a partir de la contracción de una nebulosa gaseosa.

Tras estas impresionantes proezas, no es extraño que Laplace afirme con audacia en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades:*

> Todos los acontecimientos, incluso aquellos que por su pequeñez parece que escapan a las grandes leyes naturales, forman un encadenamiento tan necesario como las revoluciones del Sol. En la ignorancia de las relaciones que guardan con el sistema total del universo, se los ha supeditado a causas finales o al azar … Hay, pues, que considerar el estado actual del universo como efecto de su estado precedente y como causa del que lo sucederá. Una inteligencia que en un determinado instante pudiera conocer todas las fuerzas que impulsan la naturaleza y la respectiva posición de los seres que la componen y que, además, tuviera la suficiente amplitud para someter esos datos al análisis, incluiría en una sola fórmula los movimientos de los mayores cuerpos del universo y los más ínfimos átomos; nada le escaparía y tanto el pasado como el futuro estarían en su presencia. El espíritu humano brinda un atisbo de tal inteligencia que se manifiesta en la perfección la que ha sabido llevar la astronomía.[152]

Si se están preguntando si, cuando Laplace hablaba de esta «inteligencia» suprema hipotética, se refería a Dios, la respuesta es no. A diferencia de Newton y

Descartes, Laplace no era una persona religiosa. Al entregar una copia de su *Mecánica celeste* a Napoleón Bonaparte, éste, que había oído que en la obra no se hacía referencia a Dios, observó: «M. Laplace, me han dicho que en este inmenso libro que ha escrito sobre el sistema del universo no se menciona siquiera a su creador». Laplace repuso de inmediato: «No tuve necesidad de esa hipótesis». Napoleón, divertido, comentó esta respuesta al matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), y éste exclamó: «¡Ah! Es una bella hipótesis, que explica multitud de cosas». Pero la anécdota no acaba ahí. Al tener noticia de la reacción de Lagrange, Laplace comentó con sequedad: «Esta hipótesis, sir, lo explica en realidad todo, pero no permite *predecir* nada. Como estudioso, mi deber es proporcionarle obras que permitan efectuar predicciones». (La cursiva es mía.)

El desarrollo de la mecánica cuántica —la teoría del mundo subatómico— en el siglo XX ha demostrado que las expectativas de un universo totalmente determinista pecan de exceso de optimismo. De hecho, la física moderna ha demostrado que no es posible predecir el resultado de todos los experimentos, ni siquiera en principio. La teoría puede únicamente predecir las *probabilidades* de distintos resultados. En las ciencias sociales, la situación es aún más compleja debido a la multiplicidad de elementos interrelacionados, muchos de los cuales son, como mínimo, inciertos. Los investigadores sociales del siglo XVII pronto se dieron cuenta de que su búsqueda de principios universales del tipo de la ley de gravitación de Newton estaba condenada al fracaso de entrada. Durante un tiempo parecía que, al introducir las complejidades de la naturaleza humana en la ecuación, es virtualmente imposible llegar a predicción segura alguna. La situación aún parecía más desesperada si se tomaba en cuenta el pensamiento de toda una población. Sin embargo, en lugar de desesperar, algunos astutos pensadores desarrollaron un innovador arsenal de herramientas matemáticas: la *estadística* y la *teoría de probabilidades*.

Probabilidades en la muerte y en los impuestos

El novelista inglés Daniel Defoe (1660-1731), célebre por su obra de aventuras *Robinson Crusoe*, es también el autor de una obra de temática sobrenatural titulada *Historia política del diablo*. Defoe, que veía por todas partes pruebas de la acción del maligno, escribió: «Cosas tan seguras como la muerte y los impuestos se pueden creer más firmemente». Benjamín Franklin (1706-1790) parece ser del mismo parecer en lo que respecta a esa seguridad. En una carta que escribió a los ochenta y tres años, dirigida al físico francés Jean Baptiste LeRoy, decía: «Nuestra Constitución ya está en funcionamiento. Todo parece indicar que será duradera, pero en este mundo nada se puede afirmar con certeza salvo la muerte y los impuestos.» En efecto, nuestras trayectorias vitales parecen seguir caminos impredecibles, somos propensos a desastres naturales, susceptibles a errores humanos y nos afecta la pura casualidad. Frases como «así es la vida» se han inventado especialmente para expresar nuestra vulnerabilidad a lo inesperado y nuestra incapacidad para controlar el azar. A pesar de estos obstáculos, o quizá debido a ellos, los matemáticos, los científicos sociales y los biólogos han intentado desde el siglo XVI enfrentarse seriamente a la incertidumbre. Tras la fundación de la mecánica estadística y la comprensión de que la base misma de la física —en forma de mecánica cuántica— se basa en la incertidumbre, los físicos del siglo XX se han unido a la batalla con entusiasmo. Los investigadores del sector del armamento utilizan, para combatir el indeterminismo, su capacidad para calcular las *probabilidades* de un resultado determinado, que es lo mejor que podemos esperar una vez establecido que no podemos predecir el resultado real. Las herramientas —la teoría de probabilidades y la estadística— creadas para mejorar la simple especulación constituyen no sólo los cimientos de una buena parte de la ciencia moderna, sino también de numerosas actividades sociales, de la economía a los deportes.

Todos nosotros utilizamos las probabilidades y la estadística en casi todas las decisiones que tomamos, aunque sea de forma inconsciente. Por ejemplo, quizá no sepa que el número de muertes en accidentes de automóvil en 2004 en Estados Unidos fue de 42.636. Sin embargo, si esa cifra fuese de, pongamos, tres millones, estoy convencido de que la conocería. Es más, es probable que esa información hubiese hecho que se lo pensase dos veces antes de entrar en su coche por la mañana. ¿Por qué precisamente estos datos sobre muertes por accidente nos ofrecen una cierta confianza para decidirnos a conducir? Como veremos enseguida, uno de los ingredientes esenciales de su Habilidad es que se basan en *números muy grandes*. El número de accidentes mortales en Frio Town, Texas, con una población de 49 personas en 1969, no sería tan convincente. La teoría de probabilidades y la estadística son una extraordinaria munición para las armas de los economistas, consultores políticos, genetistas, compañías de seguros y, en general, cualquiera que quiera extraer conclusiones significativas de una gran cantidad de datos. Cuando decimos que la matemática penetra incluso las disciplinas que no se hallan dentro del grupo original de las ciencias exactas, esta penetración suele ser a través de ventanas abiertas por la teoría de probabilidades y la estadística. ¿Cómo surgieron estos provechosos campos?

La palabra estadística [del italiano *stato* (estado) y *statista* (persona que se encarga de asuntos del estado)] se refería en primer lugar simplemente a la recopilación de datos por parte de los funcionarios gubernamentales. El primer trabajo importante en estadística en el sentido moderno lo llevó a cabo un insólito investigador: un tendero del Londres del siglo XVII. John Graunt (1620-1674) vendía botones, agujas y telas, y lo hacía bien.[153] Como su trabajo le dejaba una considerable cantidad de tiempo libre, Graunt estudió latín y francés por su cuenta y empezó a interesarse por las *Listas de mortalidad* (cifras semanales de los fallecimientos, parroquia por parroquia) publicadas en Londres desde 1604. El proceso de emisión de estos informes surgió principalmente con el fin de disponer de una señal de alarma rápida ante devastadoras epidemias. A partir de estas cifras en bruto, Graunt empezó a efectuar interesantes observaciones que acabó publicando en un pequeño volumen de 85 páginas al que tituló *Observaciones naturales y políticas mencionadas en un índice anexo y efectuadas a partir de las listas de mortalidad.*

(9)

The Diſeaſes, and Caſualties this year being 1632.

Abortive, and Stilborn	445	Jaundies	43
Affrighted	1	Jawfaln	8
Aged	628	Impoſtume	74
Ague	43	Kil'd by ſeveral accidents	46
Apoplex, and Meagrom	17	King's Evil	38
Bit with a mad dog	1	Lethargie	2
Bleeding	3	Livergrown	87
Bloody flux, ſcowring, and flux	348	Lunatique	5
Bruſed, Iſſues, ſores, and ulcers,	28	Made away themſelves	15
Burnt, and Scalded	5	Meaſles	80
Burſt, and Rupture	9	Murthered	7
Cancer, and Wolf	10	Over-laid, and ſtarved at nurſe	7
Canker	1	Palſie	25
Childbed	171	Piles	1
Chriſomes, and Infants	2268	Plague	8
Cold, and Cough	55	Planet	13
Colick, Stone, and Strangury	56	Pleuriſie, and Spleen	36
Conſumption	1797	Purples, and ſpotted Feaver	38
Convulſion	241	Quinſie	7
Cut of the Stone	5	Riſing of the Lights	98
Dead in the ſtreet, and ſtarved	6	Sciatica	1
Dropſie, and Swelling	267	Scurvey, and Itch	9
Drowned	34	Suddenly	62
Executed, and preſt to death	18	Surfet	86
Falling Sickneſs	7	Swine Pox	6
Fever	1108	Teeth	470
Fiſtula	13	Thruſh, and Sore mouth	40
Flocks, and ſmall Pox	531	Tympany	13
French Pox	12	Tiſſick	34
Gangrene	5	Vomiting	1
Gout	4	Worms	27
Grief	11		

Chriſtened	Males — 4994	Buried	Males — 4932	Whereof,
	Females - 4590		Females — 4603	of the
	In all — 9584		In all — 9535	Plague - 8

Increaſed in the Burials in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year 993

Decreaſed of the Plague in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year, 266

C 7 In

FIGURA 32

En la figura 32 se muestra un ejemplo de una tabla del libro de Graunt en la que se enumeran alfabéticamente nada menos que 63 enfermedades y fallecimientos. En una dedicatoria al presidente de la Royal Society, Graunt señala que, puesto que su trabajo concierne «el aire, comarcas, estaciones, fertilidad, salud, enfermedades, longevidad y la proporción entre el sexo y las edades de la humanidad», se trata en realidad de un tratado de historia natural. Efectivamente, Graunt fue mucho más allá de la simple recopilación y presentación de datos. Por ejemplo, al examinar los promedios de bautismos y entierros de hombres y mujeres en Londres y en la parroquia rural de Romsey, en Hampshire, demostró por primera vez la estabilidad de la proporción de sexos en el nacimiento. En particular, halló que en Londres nacían 13 mujeres por cada 14 hombres y en Romsey, 15 mujeres por cada 16 hombres. Graunt, con notable capacidad de previsión, expresaba el deseo de que «los viajeros se informasen de si la situación era la misma en otros países». También indicó que «es una bendición para la humanidad que este exceso de *Hombres* sea un obstáculo natural para la *Poligamia:* pues, en tal estado, las Mujeres no podrían vivir en la paridad e igualdad de expensas con sus Esposos en que lo hacen aquí y ahora». En la actualidad, la proporción esperada entre niños y niñas en el momento del nacimiento es de aproximadamente 1,05. Tradicionalmente, la explicación de esta diferencia es que la Madre Naturaleza favorece los nacimientos masculinos debido a la mayor fragilidad de los fetos y bebés de ese sexo. A propósito, por razones que no están del todo claras, en Estados Unidos y en Japón, la proporción de bebés de sexo masculino sufre un descenso paulatino desde los años setenta.

Graunt fue también pionero en la construcción de una distribución de edades o «Tabla de vida» de la población viva a partir de las cifras de muertes y sus causas, cuya trascendencia política fue considerable, ya que ofrecía datos acerca del número de «hombres capaces para el combate» —hombres entre dieciséis y cincuenta y seis años de edad— en la población. En un sentido estricto, Graunt no poseía información suficiente para deducir la distribución de edades, y en este aspecto es precisamente donde dio muestras de su ingenio y creatividad. He aquí la forma en que describe su estimación de la mortalidad infantil:

> Nuestra primera observación acerca de los fallecimientos debe ser que, en veinte años, de los 229.250 que han muerto de todas las enfermedades y desgracias, 71.124 han perecido a la fiebre aftosa, convulsiones, raquitismo, males de los dientes y gusanos, y como abortos, bautizados, infantes, hígado hinchado y sofocación; lo que es decir que cerca de 1/3 de todos ellos murieron de estos males, que suponemos que cayeron sobre niños de menos de cuatro o cinco años de edad. Murieron también de la viruela, fiebre porcina, sarampión y gusanos sin convulsiones 12.210, cifra de la que suponemos que 1/2 pueden ser niños de menos de seis años de edad. Si tenemos en cuenta que 16 de los mencionados 229 mil murieron de esa extraordinaria y gran desgracia, la plaga, hallaremos que alrededor del 36 por 100 de todas las concepciones murieron antes de los seis años de edad.

En otras palabras, la estimación de Graunt era que la mortalidad antes de los seis años era de (71.124 + 6.105) / (229.250-16.000) = 0,36. Mediante argumentos similares y suposiciones razonables, Graunt pudo hacer una estimación de la mortalidad en edad avanzada. Finalmente, completó el espacio entre los seis y los setenta y seis años de edad mediante una hipótesis matemática acerca del comportamiento de la tasa de mortalidad con la edad. Aunque muchas de las conclusiones de Graunt no eran demasiado sólidas, su estudio sirvió para dar inicio a la ciencia de la estadística tal como la conocemos. Su observación de que los porcentajes de determinados eventos que antes se consideraban simples coincidencias (como las muertes causadas por las diversas enfermedades) mostraban en realidad una notable regularidad introdujo el pensamiento científico y cuantitativo en las ciencias sociales.

Los investigadores que siguieron los pasos de Graunt adoptaron algunos aspectos de su metodología, pero desarrollaron también una mejor comprensión matemática del uso de la estadística. Puede resultar sorprendente saber que la persona que efectuó las mejoras más significativas en la «Tabla de vida» de Graunt fuese el astrónomo Edmond Halley, la misma persona que logró persuadir a Newton para que publicase sus *Principia. ¿A* qué se debía este interés por las tablas de vida? En parte, la razón era que éstas constituían (y aún constituyen) la información básica para los seguros de vida. Las compañías de seguros de vida (¡y, desde luego, los cazafortunas que se casan por dinero!) están interesadas en cuestiones tales como: si una persona llega a los sesenta años, ¿cuál es la probabilidad de que viva hasta los ochenta?

Para construir su tabla de vida, Halley utilizó registros detallados que se conservaban en la ciudad de Breslau, Silesia, desde finales del siglo XVI. El Dr. Caspar Newmann, un párroco local de Breslau, utilizaba estas listas para luchar en su parroquia contra la superstición de que la salud se ve afectada por las fases de la Luna o por las edades que eran divisibles por siete o por nueve. El documento de Halley, cuyo extenso título era: *Un cálculo de los grados de mortalidad de la humanidad, deducido de curiosas tablas de los nacimientos y fallecimientos de la ciudad de Breslau, con un intento de establecer el precio de las anualidades sobre vidas,* se convirtió en la base de la matemática de los seguros de vida.[154] Para hacerse una idea de la forma en que las compañías de seguros evalúan sus probabilidades, examinemos la tabla de vida de Halley en la página siguiente.

Tabla de vida de Halley					
Edad actual	Personas	Edad actual	Personas	Edad actual	Personas
1	1.000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	634	24	573
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
33	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272
38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252
40	445	50	346	60	242
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

En la tabla se puede ver, por ejemplo, que, de las 710 personas que estaban vivas a los seis años de edad, 346 seguían vivas a los cincuenta años. Se puede pues tomar la proporción de 346/710, o 0,49, como cálculo estimativo de la probabilidad de que una persona de seis años de edad viva hasta los cincuenta. De forma similar, de las 242 personas de sesenta años de edad, 41 seguían vivas a los ochenta años. La probabilidad de llegar de sesenta a ochenta años puede entonces estimarse en 41/242, o alrededor de 0,17. El razonamiento subyacente es simple: se basa en experiencias pasadas para determinar la probabilidad de diversos acontecimientos futuros. Si la muestra en la que se basa la experiencia es de un tamaño suficiente (la tabla de Halley se construyó para una población de unas 34.000 personas) y si se cumplen determinadas hipótesis (como una tasa de mortalidad constante en el tiempo), la fiabilidad de las probabilidades calculadas es notable. Jakob Bernoulli describió el mismo problema de este modo:[155]

> ¿Qué mortal, me pregunto, podría determinar el número de enfermedades, contando todos los casos posibles, que afligen al cuerpo humano en cada una de sus muchas partes y en cada edad, y decir en qué medida una enfermedad es más mortal que otra y, basándose en ello, efectuar una predicción sobre la relación entre la vida y muerte en las generaciones futuras?

Después de llegar a la conclusión de que este y otros pronósticos similares «dependen de factores confusos y que constantemente engañan a nuestros sentidos por la complejidad sin fin de sus interrelaciones», Bernoulli sugería también un punto de vista estadístico/probabilístico:

> Existe, no obstante, otro método que nos conducirá a aquello que buscamos y nos permitirá cuanto menos averiguar a posteriori aquello que no podemos determinar a priori, esto es, averiguarlo a partir de los resultados observados en numerosos casos similares. En tal sentido, debemos asumir que, en condiciones similares, la incidencia (o no incidencia) de un determinado acontecimiento en el futuro seguirá el mismo patrón observado para acontecimientos como éste en el pasado. Por ejemplo, si se ha observado que, de 300 personas de la misma edad y constitución que un tal Tito, 200 han muerto al cabo de diez años mientas que los demás han sobrevivido, podemos llegar a la razonable conclusión de que existe el doble de posibilidades de que Tito vaya a pagar en la década subsiguiente su deuda con la naturaleza que de que viva más allá de ese tiempo.

Tras sus artículos matemáticos sobre la mortalidad, Halley escribió un interesante artículo con un trasfondo más filosófico. Uno de sus pasajes es especialmente emocionante:

> Aparte de los usos mencionados en anteriores escritos, podría ser admisible inferir de las mismas Tablas con qué escasa justicia nos atribulamos por la brevedad de nuestras vidas y nos sentimos engañados si no llegamos a la edad anciana; mientras que, por lo que podemos ver aquí, la mitad de los nacidos han muerto antes de llegar a los diecisiete años, pues 1.238 se ven reducidos a 616. Así, en lugar de quejarnos por lo que llamamos una muerte a destiempo, deberíamos someternos con paciencia y despreocupación a la disolución que forma necesaria parte de la condición de nuestros perecederos materiales y de nuestra bella y frágil estructura y composición: y considerar una bendición que hayamos sobrevivido, quizá muchos años, ese período de la vida que la mitad de la raza humana no puede alcanzar.

Aunque la situación en la mayoría del mundo moderno ha mejorado de forma significativa en comparación con las lúgubres estadísticas de Halley, por desgracia no se puede decir lo mismo de todos los países. En Zambia, por ejemplo, la mortalidad antes de los cinco años en 2006 se ha calculado en unas pasmosas 182 muertes por cada mil nacidos vivos. La esperanza de vida en Zambia sigue estando en unos desgarradores treinta y siete años.

Sin embargo, la estadística no es sólo una cuestión de muertes. Esta disciplina penetra en todos los aspectos de la vida, desde los rasgos físicos a los productos del intelecto. Una de las primeras personas que reconoció el poder de la estadística para, potencialmente, crear «leyes» para las ciencias sociales fue el erudito belga Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet (1796-1874). Quetelet fue el principal responsable de la introducción del concepto estadístico del «hombre medio» o, como diríamos actualmente, «la persona media».

La persona media

Adolphe Quetelet nació el 2 de febrero de 1796 en la antigua ciudad belga de Gante. [156] Su padre, funcionario municipal, murió cuando Adolphe contaba tan sólo siete años de edad. Obligado a buscar su propio sustento, Quetelet empezó a enseñar matemáticas a la joven edad de diecisiete años. Cuando no estaba ejerciendo de profesor, componía poesía; también escribió el libreto de una ópera, fue coautor de dos obras de teatro y tradujo diversas obras literarias. Sin embargo, su tema favorito seguían siendo las matemáticas, y fue la primera persona que obtuvo el grado de Doctor en Ciencias por la Universidad de Gante. En 1820, Quetelet fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias de Bruselas, y no tardó en convertirse en su asociado más activo. Los años posteriores los dedicó especialmente a la enseñanza y a la publicación de diversos tratados de matemáticas, física y astronomía.

Quetelet solía empezar su curso de historia de la ciencia con la siguiente perspicaz observación: «Cuanto más avanzan las ciencias, más invaden el dominio de la matemática, que actúa como una especie de punto de convergencia. Podemos juzgar el grado de perfección al que ha llegado una ciencia por la mayor o menor facilidad con la que se le pueden aplicar cálculos».

En diciembre de 1823, Quetelet fue a París enviado por el estado con el fin de que estudiase técnicas de observación en astronomía. Sin embargo, esta visita de tres meses a la que entonces era la capital matemática del mundo hizo que Quetelet fijase su atención en algo completamente distinto: la teoría de probabilidades. El principal responsable en despertar el entusiasmo de Quetelet en este tema fue el propio Laplace. Más adelante, Quetelet hablaría de este modo de su experiencia con la estadística y la probabilidad:

> El azar, ese misterioso vocablo del que tanto se ha abusado, se debe considerar nada más que como un velo para nuestra ignorancia; es un espectro que domina de forma absoluta la mente común, acostumbrada a considerar los acontecimientos de un modo aislado, pero que queda reducido a nada ante el filósofo, cuyo ojo abarca largas series de eventos y cuya lucidez no se extravía en variaciones, que desaparecen cuando adquiere una perspectiva suficiente para aprehender las leyes de la naturaleza.[157]

La importancia de esta conclusión es fundamental. En esencia, Quetelet negaba el papel del azar y lo sustituía por la audaz (aunque no del todo demostrada) inferencia de que incluso los fenómenos sociales poseen causas y que las regularidades que presentan los resultados estadísticos se pueden emplear para desentrañar las reglas que subyacen al orden social.

Con la intención de probar la validez de su punto de vista estadístico, Quetelet puso en marcha un ambicioso proyecto de recopilación de miles de medidas relacionadas con el cuerpo humano. Estudió, por ejemplo, la distribución de medidas de pecho de 5.738 soldados escoceses, y de altura de 100.000 reclutas franceses, y representó gráficamente la *frecuencia* de aparición de cada rasgo humano. En otras palabras, representó el número de reclutas cuya altura estaba entre, por ejemplo, 150 y 155 centímetros, luego entre 155 y 160 centímetros, etc. Luego construyó curvas similares incluso para aquellos rasgos «morales» (según él los denominaba) de los que poseía suficientes datos. Entre estas cualidades se hallaba la propensión al comportamiento criminal, los suicidios y los matrimonios. Para su sorpresa, Quetelet descubrió que todas las características humanas siguen lo que ahora se denomina una distribución de frecuencias *normal* (o *gaussiana*, por el nombre del «príncipe de la matemática» Carl Friedrich Gauss, aunque no está demasiado justificado el porqué de esta denominación), con forma de campana (figura 33).

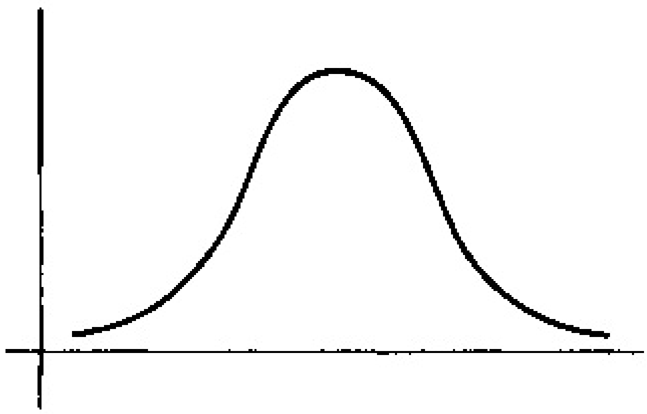


FIGURA 33

Ya se tratase de alturas, pesos, longitudes de extremidades o incluso cualidades intelectuales determinadas a través de los antepasados de los tests psicológicos, una y otra vez aparecía el mismo tipo de curva. La curva no era desconocida para Quetelet; los matemáticos y los físicos la conocían desde mediados del siglo XVIII, y Quetelet estaba familiarizado con ella por su trabajo en astronomía; lo asombroso fue la asociación de esta curva con características humanas. Anteriormente, se la solía denominar curva de error, porque solía aparecer en cualquier tipo de errores de medida.

Imaginemos, por ejemplo, que debe medir con mucha precisión la temperatura de un líquido en un recipiente. Puede utilizar un termómetro de alta precisión y tomar mil medidas a lo largo de un período de una hora. Debido a errores aleatorios y posiblemente a fluctuaciones en la temperatura, hallará que no todas las mediciones dan exactamente el mismo valor, sino que tienden a agruparse alrededor de un valor central; algunas mediciones dan un valor superior y otras, uno inferior. Si representa el número de veces que aparece cada medida en función de la temperatura, obtendrá el mismo tipo de curva en forma de campana que Quetelet halló para las características humanas. De hecho, cuanto mayor sea el número de mediciones efectuadas de cualquier magnitud física, más se aproximará la distribución de frecuencias a la *curva normal*. La influencia inmediata de este hecho en la cuestión de por qué las matemáticas son tan extraordinariamente eficaces es bastante espectacular: *¡incluso los errores humanos obedecen leyes matemáticas estrictas!*

Quetelet llegó incluso más allá en sus conclusiones: consideró que el hecho de que las características humanas siguiesen la curva de error era indicativo de que el «hombre medio» era lo que la naturaleza estaba tratando de generar.[158] Según Quetelet, igual que los errores de fabricación crearían una distribución de longitudes alrededor de la longitud promedio (correcta) de un clavo, de igual modo los errores de la naturaleza estaban distribuidos alrededor de un tipo biológico preferible, y afirmó que las personas de una nación estaban agrupadas alrededor de su promedio «de igual modo que los resultados de mediciones efectuadas sobre una misma persona, pero con instrumentos imprecisos que justificasen el tamaño de la variación».

No hay duda de que Quetelet llevó sus especulaciones demasiado lejos. Aunque su descubrimiento de que las características biológicas (físicas o mentales) están distribuidas según la curva de frecuencias normal fue excepcionalmente importante, este factor no podía interpretarse como una prueba de las *intenciones* de la naturaleza, ni juzgar como meros errores las características individuales. Por ejemplo, Quetelet halló que la altura media de los reclutas franceses era de 163 centímetros. Sin embargo, en el extremo inferior halló un hombre que medía 43 centímetros. ¡Es obvio que uno no se puede equivocar en más de 120 centímetros al medir la altura de un hombre de 163 centímetros!

De todos modos, aunque no hagamos mucho caso de las ideas de Quetelet acerca de las «leyes» para fabricar seres humanos a partir de un mismo molde, el hecho de que las distribuciones de los diversos rasgos, desde pesos a niveles de cociente intelectual, sigan la curva normal es notable por sí mismo. Y por si eso fuera poco, incluso la distribución de los promedios de bateo en la liga de primera división de béisbol es bastante próximo a la normal, como lo es el rendimiento anual de los índices bursátiles (que se componen de numerosos valores individuales). De hecho, a veces vale la pena examinar con atención las distribuciones que se desvían de la curva normal. Por ejemplo, si se hallase que la distribución de las notas de inglés de un determinado colegio no sigue la curva normal, esto podría provocar una investigación en las prácticas de calificación de ese colegio. Esto no significa que todas las distribuciones sean normales. La distribución de la longitud de las palabras utilizadas por Shakespeare en sus obras no es normal. Shakespeare utilizaba muchas más palabras de tres y cuatro letras que de once o doce. Los ingresos anuales por familia en Estados Unidos están representados también por una distribución muy alejada de la normal. El pico se halla en unos ingresos de entre 10.000 y 20.000 USD, que corresponde al 13 por 100 de las familias, pero la gráfica posee también un pico significativo (que corresponde aproximadamente a un 10 por 100 de las familias) en el intervalo de entre 100.000 y 150.000 USD, lo que suscita una interesante pregunta: si tanto las características físicas como las intelectuales de los seres humanos (que, es de suponer, determina el potencial de ingresos) están distribuidas según la curva normal, ¿por qué no lo están los ingresos? Pero la respuesta a estas cuestiones socioeconómicas va más allá del ámbito de este libro. Desde nuestra limitada perspectiva actual, el hecho sorprendente consiste en que prácticamente todos los detalles mesurables de los seres humanos (de una etnia determinada) están distribuidos según un solo tipo de función matemática.

Históricamente, los rasgos humanos no sólo sirvieron como base para el estudio de las *distribuciones de frecuencia* estadísticas, sino también para establecer el concepto matemático de *correlación*. La correlación mide el grado en que los cambios en el valor de una variable están acompañados por cambios en otra. Por ejemplo, es de esperar que las mujeres altas lleven zapatos más grandes. De forma similar, los psicólogos hallaron una correlación entre la inteligencia de los padres y el éxito escolar de los hijos.

El concepto de correlación resulta especialmente útil en las situaciones en que no hay una dependencia *funcional* precisa entre las dos variables. Imaginemos, por ejemplo, que una variable es la temperatura diurna máxima en el sur de Arizona, y la otra, el número de incendios forestales en esa región. Para un determinado valor de temperatura, no es posible predecir con exactitud el número de incendios que ocurrirán, ya que esto depende de otras variables como la humedad y el número de incendios provocados. En otras palabras, para un valor específico de temperatura podría haber muchos valores correspondientes de incendios forestales y viceversa. Sin embargo, el concepto matemático denominado *coeficiente de correlación* nos permite medir de forma cuantitativa la intensidad de la relación entre dos variables.

La persona que introdujo por vez primera la herramienta del coeficiente de correlación fue el geógrafo, meteorólogo, antropólogo y estadístico victoriano sir Francis Galton (1822-1911).[159] Galton —que, por cierto, era primo lejano de Charles Darwin— no era un matemático profesional. Como era una persona de extraordinaria versatilidad y gran sentido práctico, solía dejar las sutilezas matemáticas de sus innovadores conceptos a otros matemáticos, en especial al estadístico Karl Pearson (1857-1936). Galton explicaba así el concepto de correlación:

> La longitud del cúbito [el antebrazo] está correlacionada con la estatura, ya que un cúbito largo implica en general un hombre alto. Si la correlación entre ellas es muy próxima, un cubito muy largo implicaría una gran estatura; en cambio, si no lo es tanto, un cúbito muy largo estaría asociado en promedio con una estatura simplemente alta, pero no muy alta; mientras que, si la correlación fuese *nula*, un cubito muy largo no estaría asociado con ninguna estatura en particular y, por consiguiente, en promedio, con la mediocridad.

Pearson formuló una definición matemática precisa del coeficiente de correlación. El coeficiente se define de modo que, cuando la correlación es muy alta, es decir, cuando una variable sigue de cerca las subidas y bajadas de la otra, el valor del coeficiente es de 1. Cuando dos cantidades presentan *correlación inversa*, es decir, cuando una aumenta la otra disminuye y viceversa, el coeficiente es igual a -1. Cuando una variable se comporta como si la otra no existiese y viceversa, el coeficiente de correlación es 0. (Por desgracia, el comportamiento de algunos gobiernos muestra una correlación cercana a cero con los deseos de las personas a las que supuestamente representan.)

La investigación médica moderna y las previsiones económicas dependen esencialmente de la identificación y cálculo de correlaciones. Los vínculos entre el tabaco y el cáncer de pulmón y entre la exposición al sol y el cáncer de piel, por ejemplo, se establecieron inicialmente mediante el descubrimiento y evaluación de correlaciones. Los analistas del mercado de valores se estrujan continuamente el cerebro para hallar y cuantificar las correlaciones entre el comportamiento del mercado y otras variables, un descubrimiento que potencialmen te puede reportarles pingües beneficios.

Los primeros estadísticos pronto se dieron cuenta de que la recogida de datos estadísticos y su interpretación pueden ser asuntos delicados, y deben llevarse a cabo con una exquisita atención. Un pescador que utilice una red con agujeros de 25 centímetros de lado podría llegar a la conclusión de que todos los peces miden más de 25 centímetros, por el simple hecho de que los menores se libran de su red. Se trata de un ejemplo de los *efectos de selección,* sesgos que se introducen en los resultados debido al procedimiento utilizado para recoger los datos o a la metodología. El muestreo presenta otro problema. Por ejemplo, las actuales encuestas de opinión no entrevistan más que a unos cuantos miles de personas. ¿Cómo pueden los encuestadores estar seguros de que los puntos de vista expresados por los miembros de su muestra representan correctamente la opinión de cientos de millones de personas? Otro de los aspectos que se debe tener en cuenta es que *correlación* no necesariamente implica *causalidad.* Las ventas de tostadoras pueden elevarse al mismo tiempo que crece el número de personas que asisten a conciertos de música clásica, pero eso no implica que la presencia de una nueva tostadora en una casa mejore la capacidad de apreciar la música. Posiblemente, ambos efectos están causados por una mejora en la economía.

A pesar de estos importantes riesgos, la estadística se ha convertido en uno de los instrumentos más eficaces de la sociedad moderna, al elevar las ciencias sociales al rango de ciencias, precisamente. Pero en realidad, ¿por qué funciona la estadística? La respuesta la tenemos en la matemática de la *probabilidad,* que domina numerosos aspectos de la vida moderna. Desde los ingenieros que deciden los mecanismos que se deben instalar en un vehículo tripulado de exploración para garantizar la seguridad de los astronautas a los físicos de partículas que analizan el resultado de los experimentos en aceleradores, los psicólogos que califican tests de inteligencia de niños, las empresas que evalúan la eficacia de nuevos fármacos o los genetistas que estudian la herencia humana, todos ellos deben utilizar la teoría de probabilidades.

Juegos de azar

Los inicios del estudio serio de la probabilidad fueron muy modestos:[160] se trataba de jugadores que intentaban ajustar sus apuestas a sus posibilidades de éxito. En particular, a mediados del siglo XVII, un noble francés —el caballero de Méré—, que era también un celebrado jugador, dirigió varias preguntas sobre juegos y apuestas al famoso matemático y filósofo francés Blaise Pascal (1623-1662). En 1654, Pascal mantuvo abundante correspondencia acerca de estas cuestiones con el otro gran matemático francés de la época: Pierre de Fermat (1601-1665). Se puede afirmar que la teoría de probabilidades nació en este intercambio epistolar. Vamos a examinar uno de los fascinantes casos comentados por Pascal en una carta de fecha 29 de julio de 1654.[161] Imaginemos que dos nobles están enfrascados en un juego en el que lanzan un único dado. Cada jugador ha puesto sobre la mesa 32 monedas de oro. El primer jugador elige el número 1 y el segundo jugador, el 5. Cada vez que aparece el número que ha elegido uno de los jugadores, éste obtiene un punto. El ganador es el primero que consiga tres puntos. Supongamos, sin embargo, que, después de jugar durante un rato, el número 1 ha aparecido dos veces (de modo que el jugador que lo había elegido tiene dos puntos) mientras que el número 5 sólo ha aparecido una vez (de modo que su oponente tiene únicamente un punto). Si, por cualquier razón, el juego tuviera que interrumpirse en ese momento, ¿cómo deberían repartirse los dos jugadores las 64 monedas de la mesa? Pascal y Fermât hallaron la respuesta matemáticamente lógica. Si el jugador con dos puntos ganase la siguiente tirada, las 64 monedas serían suyas. Si la perdiese, ambos jugadores tendrían dos puntos, así que cada uno de ellos obtendría 32 monedas. Por tanto, si los jugadores se separan sin efectuar la siguiente tirada del dado, el primer jugador podría argumentar correctamente: «Poseo con seguridad 32 monedas, aunque perdiese la siguiente tirada; por lo que respecta a las otras 32, puede que las tenga o puede que no, las posibilidades son iguales. Vamos entonces a dividir estas 32 monedas a partes iguales, y me llevo también las 32 monedas que tengo seguras». En otras palabras, el primer jugador debería quedarse con 48 monedas y el segundo, con 16. Parece increíble que una nueva disciplina matemática de gran profundidad haya podido surgir de un tipo de discusión aparentemente trivial como éste, ¿verdad? Sin embargo, ésta es precisamente la razón de la «inexplicable» y misteriosa eficacia de la matemática.

La esencia de la teoría de probabilidades se puede deducir de los hechos simples siguientes.[162] Nadie puede predecir con certeza qué cara de una moneda no manipulada quedará hacia arriba cuando caiga al suelo. Aunque la moneda acabe de caer diez veces seguidas en cara, eso no mejora ni un ápice nuestra capacidad para predecir con certeza la siguiente tirada. Sin embargo, sí podemos predecir con certeza que, si se tira la moneda diez millones de veces, prácticamente la mitad de las tiradas serán caras y la otra mitad serán cruces. De hecho, a finales del siglo XIX, el estadístico Karl Pearson tuvo la paciencia de tirar una moneda 24.000 veces. Obtuvo cara en 12.012 de las tiradas. En cierto modo, esto es, en esencia, la teoría de la probabilidad. Esta disciplina nos proporciona información precisa acerca de los resultados recogidos en *un gran número* de experimentos;[163] no es capaz de predecir el resultado de un experimento específico. Si un experimento puede tener *n* resultados posibles, cada uno de ellos con la *misma* posibilidad de ocurrir, entonces la probabilidad de cada resultado es *1/n.* Si se tira un dado no cargado, la probabilidad de obtener el número 4 es 1/6, porque el dado tiene seis caras, y cada una de ellas es un resultado igualmente posible. Supongamos que se tira el dado siete veces seguidas y se saca un 4 cada vez; ¿cuál es la probabilidad de sacar un 4 en la siguiente tirada? La respuesta de la teoría de probabilidades es de una claridad meridiana: la probabilidad seguirá siendo de 1/6; el dado no tiene memoria; las nociones de «buena racha» o de que la tirada siguiente compensará el desequilibrio de las anteriores no son más que mitos. Lo único que es cierto es que, si lanzásemos el dado un millón de veces, los resultados se compensarían y, en promedio, el 4 aparecería 1/6 parte de las veces.

Vamos a examinar una situación un poco más complicada. Supongamos que lanzamos tres monedas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cruces y una cara? Podemos hallar la respuesta con sólo enumerar todos los resultados posibles. Si indicamos las caras con «C» y las cruces con «X», tenemos ocho resultados posibles: XXX, XXC, XCX, XCC, CXX, CXC, CCX, CCC. De éstos, como se puede comprobar, tres son favorables al suceso «dos cruces y una cara». Así, la probabilidad de este evento es de 3/8. O, para generalizar, si de *n* resultados con la *misma probabilidad,* ra son favorables al suceso que nos interesa, la probabilidad de que ese suceso ocurra es de *m/n.* Observe que eso se traduce en que el valor de la probabilidad está siempre entre cero y uno. Si el suceso que nos interesa es, en realidad, imposible, entonces $m = 0$ (ningún resultado es favorable) y la probabilidad sería cero. Si, por el contrario, el suceso es totalmente seguro, eso significa que los *n* casos son favorables ($m = n$) y que la probabilidad es simplemente $n/n = 1$. Los resultados de los tres lanzamientos de moneda demuestran además otro importante resultado de la teoría de probabilidades: si tenemos varios sucesos completamente *independientes* entre sí, *la probabilidad de que todos ellos sucedan es el producto de las probabilidades individuales.* Por ejemplo, la probabilidad de sacar tres caras es de 1/8, es decir, el producto de las tres probabilidades de sacar cara en cada una de las tres monedas: 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8.

Uno puede pensar ahora: de acuerdo pero, aparte de en los casinos y en otros juegos de azar, ¿qué otros usos podemos dar a estos conceptos básicos de probabilidades? Aunque cueste de creer, estas leyes de la probabilidad de aspecto inocuo se hallan en la base de la genética moderna, la ciencia de la herencia de caracteres biológicos.

La persona que unió la probabilidad con la genética fue un monje de Moravia.[164] Gregor Mendel (1822-1884) nació en un pueblo cercano a la frontera entre Moravia y Silesia (actualmente Hyncice, en la República Checa). Tras entrar en la abadía agustiniana de Santo Tomás, en Brno, estudió zoología, botánica y física y química en la Universidad de Viena. A su regreso a Brno, Mendel inició un activo período de experimentación con plantas de guisantes, con el entusiasta apoyo del abad de su monasterio. Mendel centró sus investigaciones en los guisantes porque eran de cultivo fácil, y también porque poseían órganos reproductivos masculinos y femeninos. De este modo, las plantas de guisantes podían autopolinizarse o cruzarse con otras plantas. Mediante la polinización cruzada de plantas que sólo producían semillas verdes con otras que sólo las producían amarillas, Mendel obtuvo resultados muy desconcertantes a primera vista (figura 34).

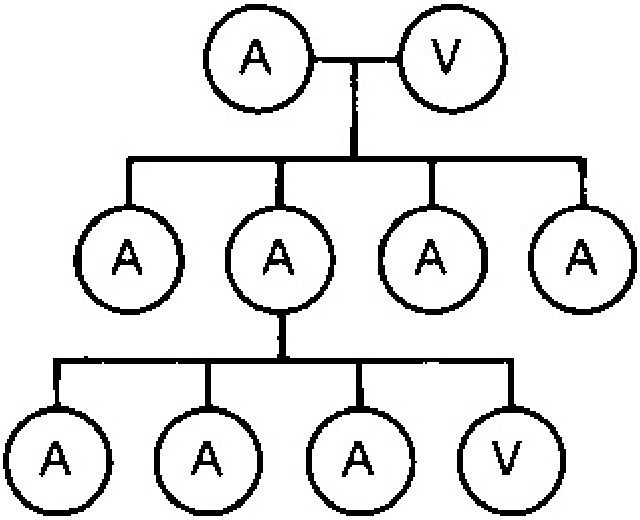


FIGURA 34

La primera generación de descendientes *sólo* tenía semillas amarillas. ¡Sin embargo, de forma constante la generación siguiente tenía una proporción de 3 a 1 entre semillas amarillas y verdes! A partir de estos asombrosos resultados, Mendel pudo extraer tres conclusiones que se convirtieron en importantes hitos de la genética:

(i) La herencia de una característica implica la transmisión de determinados «factores» (actualmente los llamamos genes) de padres a hijos.

(ii) Cada hijo hereda uno de estos «factores» de cada padre (para un rasgo determinado).

(iii) Aunque una característica específica no se manifieste en un descendiente, se puede transmitir a la siguiente generación.

Pero ¿cómo se pueden explicar los resultados *cuantitativos* del experimento de Mendel? Mendel propuso que cada una de las plantas padre tenía dos alelos (variedades de un gen) idénticos, ya fuesen dos amarillos (A) o dos verdes (V) (como en la figura 35).

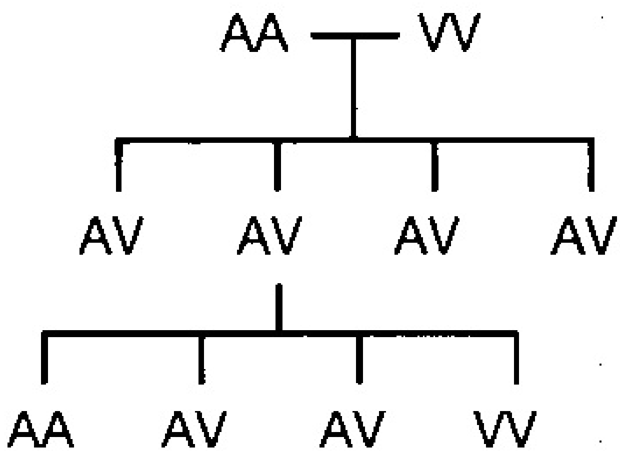


FIGURA 35

Al aparearse entre sí, cada descendiente heredaba dos alelos distintos, uno de cada padre [según la regla (ii) mencionada]. Es decir, la semilla de cada descendiente contenía un alelo amarillo y uno verde. Entonces, ¿por qué los guisantes de esta generación eran todos amarillos? Según la explicación de Mendel, el amarillo era el color dominante y enmascaraba la presencia del alelo verde en esta generación [según la regla (iii)]. Sin embargo [siguiendo con la regla (iii)], el amarillo dominante no impedía que el verde recesivo pasase a la siguiente generación. En la siguiente ronda de apareamiento, cada planta con un alelo amarillo y uno verde era polinizada con otra planta que contenía la misma combinación de alelos. Puesto que el descendiente contenía un alelo de cada padre, las semillas de la generación siguiente podían contener una de las combinaciones siguientes (figura 35): verde-verde, verde-amarillo, amarillo-verde o amarillo-amarillo. Todas las semillas con un alelo amarillo se convertían en guisantes amarillos, porque el amarillo es dominante. Así, como todas las combinaciones de alelos tienen la misma probabilidad, la proporción entre guisantes amarillos y verdes debe ser 3:1.

No es difícil darse cuenta de que todo el ejercicio de Mendel es, en esencia, idéntico a lanzar dos monedas. Asignar cara a verde y cruz a amarillo y preguntar qué fracción de los guisantes serán amarillos (sabiendo que el amarillo es dominante para determinar el color) es exactamente lo mismo que preguntar cuál es la probabilidad de obtener *al menos* una cruz al tirar dos monedas. Obviamente, es 3/4, ya que tres de los cuatro posibles resultados (cruz-cruz, cruz-cara, cara-cruz, cara-cara) contienen una cruz. Eso significa que la proporción entre el número de tiradas que contienen al menos una cruz y el número de tiradas que no la contienen debería ser (a la larga) 3:1, como en los experimentos de Mendel.

A pesar de que Mendel publicó su artículo «Experimentos sobre hibridación de plantas» en 1865[165] (también presentó los resultados en dos congresos científicos), su obra pasó en general inadvertida hasta su redescubrimiento, a principios del siglo XX. Aunque han surgido algunas dudas acerca de la exactitud de sus resultados,[166] se le sigue considerando la primera persona que estableció las bases matemáticas de la genética moderna. Tras los pasos de Mendel, el influyente estadístico británico Ronald Aylmer Fisher[167] (1890-1962) estableció el campo de la genética de poblaciones (la rama matemática que se centra en la modelización de las distribuciones de genes dentro de una población y el cálculo de la variación temporal de las frecuencias de genes). Los actuales genetistas pueden utilizar muestreos estadísticos combinados con estudios de ADN en el pronóstico de las características más probables de un descendiente no nacido. Pero ¿cuál es realmente la relación entre probabilidad y estadística?

Hechos y pronósticos

Los científicos que intentan desentrañar la evolución del universo suelen atacar el problema desde ambos extremos. Están los que empiezan por las minúsculas fluctuaciones en el tejido cósmico del universo primordial, y los que estudian hasta el más nimio detalle en el estado actual del universo. Los primeros utilizan enormes simulaciones informáticas con el fin de hacer evolucionar el universo hacia adelante. Los segundos se embarcan en el detectivesco trabajo de tratar de deducir el pasado del universo a partir de una multitud de datos sobre su estado actual. La relación entre la teoría de probabilidades y la estadística es similar. En teoría de probabilidades, las variables y el estado inicial son conocidos, y el objetivo consiste en predecir el resultado final más probable. En estadística, el resultado es conocido, pero las causas pasadas no lo son.

Vamos a examinar un ejemplo sencillo para ver de qué modo ambos campos se complementan y, por así decirlo, se encuentran a medio camino. Podemos empezar por el hecho de que los estudios estadísticos muestran que las mediciones de una amplia variedad de magnitudes físicas, e incluso muchas características humanas, se distribuyen siguiendo la *curva de frecuencias normal*. Para ser más exactos, la normal no es una curva, sino una familia de curvas que se pueden describir mediante una misma función general y que quedan caracterizadas mediante dos únicas cantidades matemáticas. La primera de ellas —la *media*— es el valor central y eje de simetría de la distribución. El valor real de la media depende, claro está, del tipo de variable medida (por ejemplo, peso, altura o CI). Incluso para una misma variable, la media puede ser distinta en diferentes poblaciones. Por ejemplo, la media de la altura de los hombres en Suecia es probablemente distinta que la de Perú. La segunda cantidad que define la curva normal se denomina *desviación estándar,* y mide cómo están agrupados los datos alrededor de la media.

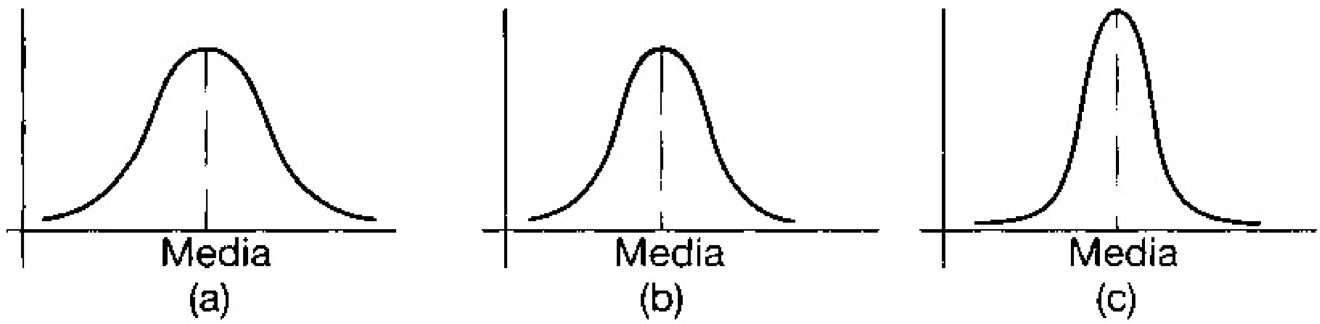


FIGURA 36

En la figura 36, la curva normal (a) es la que tiene la mayor desviación estándar, ya que los valores en ella están más dispersos.

Pero aquí viene lo interesante: si utilizamos el cálculo integral para calcular las áreas bajo la curva, se puede demostrar matemáticamente que, *independientemente* de los valores de la media o de la desviación estándar, el 68,2 por 100 de los datos se hallan entre los valores que abarca una desviación estándar a cada lado de la media (como se muestra en la figura 37).

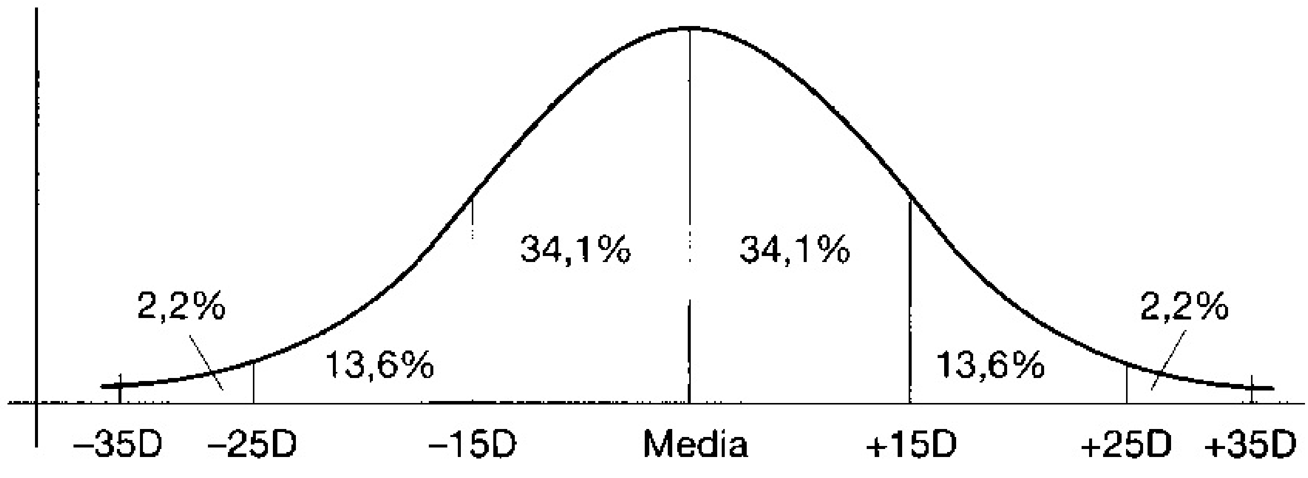
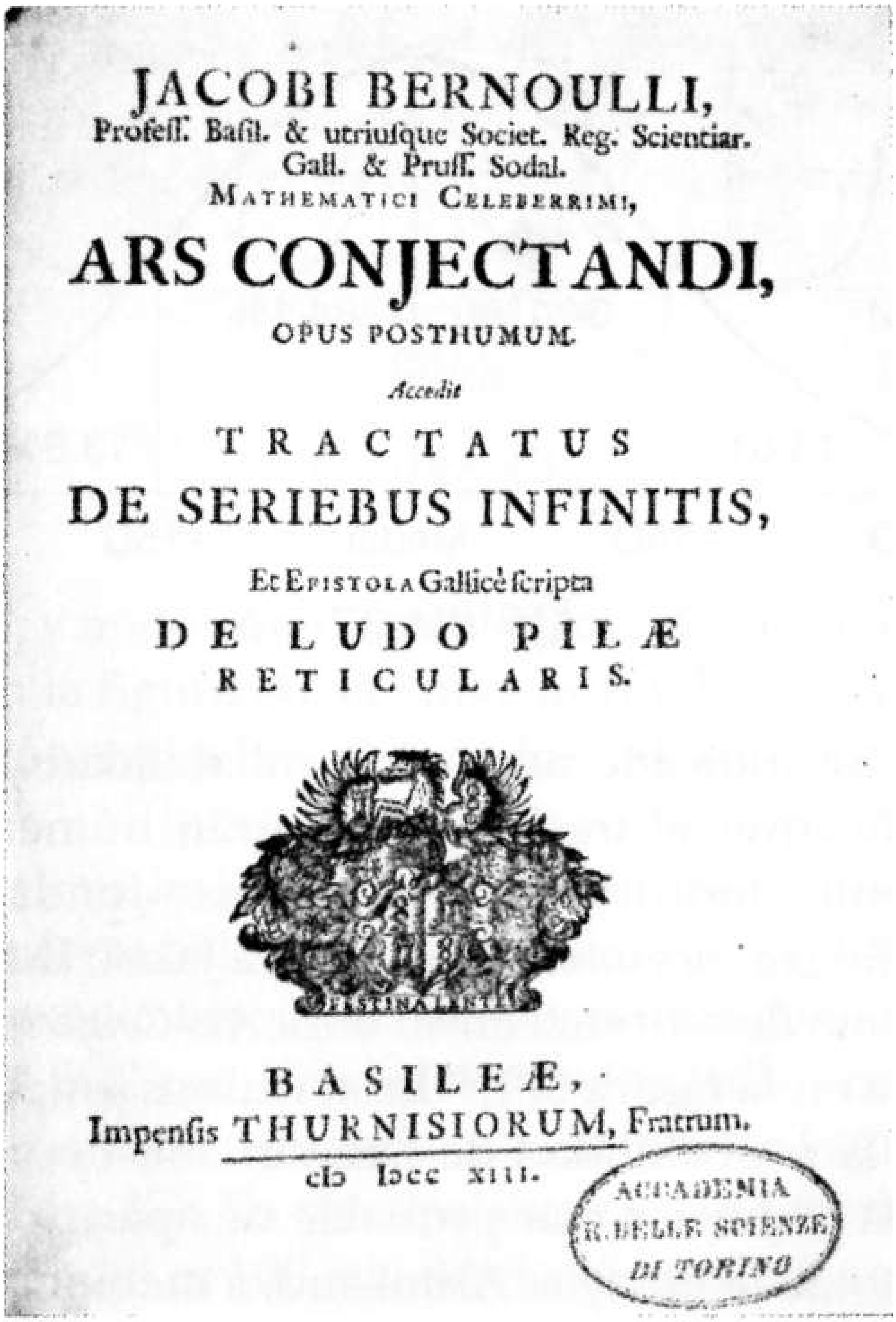


FIGURA 37

En otras palabras, si el CI medio de una cierta población (grande) es 100, y la desviación estándar es 15, entonces el 68,2 por 100 de las personas de esa población tienen un CI entre 85 y 115. Aún hay más: para todas las curvas de frecuencia normal, el 95,4 por ciento de todos los casos se hallan a dos desviaciones estándar de la media, y el 99,8 por 100, a tres (figura 37). Esto implica que, en el ejemplo anterior, el 95,4 por 100 de la población tiene valores de CI entre 70 y 130, y el 99,8 por 100, entre 55 y 145.

Supongamos ahora que queremos predecir la probabilidad de que una persona de esa población elegida al azar tenga un valor de CI entre 85 y 100. La figura 37 nos indica que sería de 0,341 (o 34,1 por 100), ya que, según las leyes que la gobiernan, esa probabilidad consiste simplemente en el número de casos favorables dividido por el total de casos posibles. Pongamos que ahora nos interesa saber la probabilidad de que una persona elegida al azar en esa población tenga un valor de CI superior a 130. Basta una ojeada a la figura 37 para averiguar que esa probabilidad es sólo de alrededor de 0,022, o el 2,2 por 100. De forma parecida, a partir de las propiedades de la distribución normal y la herramienta del cálculo integral (para calcular áreas), se puede calcular la probabilidad de que el valor de CI se encuentre dentro de cualquier intervalo. En otras palabras, la teoría de probabilidades y su compañera y complemento, la estadística, se combinan para darnos la respuesta.

Como ya he indicado antes, la probabilidad y la estadística sólo son significativas al tratar con un gran número de sucesos, nunca con eventos individuales. Este aspecto fundamental, denominado *Ley de los grandes números,* se debe a Jakob Bernoulli, que lo formuló en forma de teorema en su obra *Ars Conjectandi* (cuya portada se muestra en la figura 38).[168]


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
ɔIɔ Iɔcc xiii.

FIGURA 38

En términos simples, el teorema afirma que, si la probabilidad de la aparición de un suceso es *p*, entonces *p* es la *proporción* más probable de apariciones del suceso en el número total de ensayos. Asimismo, a medida que el número de ensayos tiende a infinito, la proporción de éxitos se convierte en *p* con certeza. Así presentó Bernoulli la Ley de los grandes números en su *Ars Conjectandi:* «Aún está pendiente de investigación si, con el aumento del número de observaciones, seguimos aumentando la probabilidad de que la proporción registrada entre casos favorables y desfavorables se acerque a la verdadera proporción, de modo que esta probabilidad exceda finalmente cualquier grado de certeza que le exijamos». A continuación pasó a explicar el concepto mediante un ejemplo específico:

> Tenemos un tarro que contiene 3.000 guijarros blancos y 2.000 negros, y queremos determinar de forma empírica la proporción —que desconocemos— entre unos y otros a base de extraer un guijarro tras otro y anotar con qué frecuencia extraemos un guijarro blanco y con cuál uno negro. (Me permito recordar que es un requisito importante de este proceso devolver el guijarro al tarro después de tomar nota del color y antes de extraer el siguiente, de modo que el número de guijarros en el tarro permanezca constante.) La pregunta es, ¿es posible ampliar el número de ensayos para hacer que sea 10, 100, 1.000, etc., veces más probable (y, a la larga, más «moralmente cierto») que la proporción de guijarros blancos extraídos respecto de la de guijarros negros adquiera el mismo valor (3:2) que la proporción real de guijarros blancos y negros en la urna, que no que adquiera un valor distinto? Si la respuesta es no, admitiré entonces que probablemente seamos incapaces de averiguar el número de instancias de cada caso (esto es, el número de guijarros blancos y negros) mediante observación. En cambio, si es cierto que este método nos permite alcanzar una certeza moral* [*Jakob Bernoulli demuestra en el capítulo siguiente de *Ars Conjectandi*, que es así (*N. del a.*)]… entonces podemos determinar el número de ejemplos a posteriori casi con la misma precisión que si los conociésemos a priori.[169]

Bernoulli dedicó veinte años al perfeccionamiento de este teorema, que se ha convertido en uno de los pilares básicos de la estadística. Concluía afirmando su creencia en la existencia de leyes fundamentales, incluso en las situaciones que parecen estar gobernadas por el azar:

> Si observásemos de forma continua todos los eventos desde este momento hasta la eternidad (convirtiendo de este modo la probabilidad en certeza), hallaríamos que todo lo que ocurre en el mundo lo hace por razones determinadas y de conformidad con leyes, y que de este modo nos vemos constreñidos, incluso en situaciones que parecen accidentales, a asumir una cierta necesidad y, por así decirlo, fatalidad. Porque todo cuanto sé es aquello en lo que Platón pensaba cuando, en la doctrina del ciclo universal, sostenía que, tras el paso de incontables centurias, todo regresaría a su estado original.

La conclusión de este relato científico de la incertidumbre es simple: la matemática se puede aplicar incluso en las áreas menos «científicas» de nuestras vidas, incluso en las que parecen estar dominadas por el puro azar. Así, al intentar explicar la «inexplicable eficacia» de la matemática, no podemos limitarnos *solamente* a las leyes de la física; en algún momento tendremos que intentar resolver el enigma de la omnipresencia de la matemática.

El increíble poder de la matemática no pasó desapercibido para el célebre dramaturgo y ensayista George Bernard Shaw (1856-1950). Shaw, cuya fama no se debía precisamente a su talento matemático, escribió una vez un ingenioso artículo sobre estadísticas y probabilidad titulado «The Vice of Gambling and the Virtue of Insurance».[170] En él, Shaw admite que, en su opinión, los seguros «se basan en hechos inexplicables y riesgos que sólo puede calcular un matemático profesional». Sin embargo, ofrece la siguiente astuta observación:

Imaginemos una conversación de negocios entre un ambicioso mercader que quiere comerciar con el exterior pero está aterrorizado de que su barco naufrague o de que se lo coman los salvajes, y un capitán que lo que quiere es un cargamento y pasajeros. El capitán responde al mercader que sus bienes estarán totalmente a salvo, igual que él mismo si decide acompañarle. Pero el mercader, que tienen la cabeza hinchada con las aventuras de Jonás, san Pablo, Ulises y Robinson Crusoe, no se atreve a correr el riesgo. Su conversación sería más o menos así:

Capitán: ¡Venid conmigo! Os apuesto tropecientas libras a que, si navegáis conmigo, estaréis sano y salvo en este mismo día dentro de un año.

Mercader: Pero, si acepto la apuesta, estaré apostando que voy a morir durante ese año.

Capitán: ¿Y por qué no, si vais a perder la apuesta, con toda seguridad?

Mercader: Pero, si me ahogo, vos también os ahogaréis; ¿qué será entonces de nuestra apuesta?

Capitán: Cierto. Entonces, encontraré a alguien en tierra que haga la apuesta con vuestra esposa y vuestra familia.

Mercader: Eso lo cambia todo, pero ¿qué hay de mi cargamento?

Capitán: ¡Bah! Podemos extender la apuesta al cargamento. O convertirla en dos apuestas: una por vuestra vida y la otra, por el cargamento. Ambos estarán a salvo, os lo aseguro. Nada sucederá, y podréis disfrutar de las maravillas de tierras lejanas.

Mercader: Pero, si yo y mi mercancía hacemos el viaje con seguridad, tendré que pagaros el valor de mi vida y de Jos bienes. Si no me ahogo, me arruinaré.

Capitán: Eso también es cierto. Pero yo no salgo tan beneficiado como pensáis. Si os ahogáis, yo me ahogaré primero, pues tengo la obligación de ser el último hombre que abandone el barco cuando se vaya a pique. Pero dejadme que ejerza mi persuasión. Os haré una apuesta diez a uno. ¿Es eso tentación suficiente?

Mercader: Bueno, en tal caso…

El capitán ha descubierto los seguros, igual que los orfebres descubrieron el negocio bancario.

Es notable que alguien como Shaw, que se lamentaba de que, durante su educación, «nadie mencionó una palabra sobre el significado o la utilidad de la matemática», escribiese este relato jocoso sobre la «historia» de la matemática de los seguros.

Con la excepción del texto de Shaw, hasta ahora hemos seguido el desarrollo de la matemática a través de los ojos de matemáticos profesionales. Para estas personas, y para muchos filósofos racionalistas como Spinoza, el platonismo era evidente. No había discusión posible: las verdades matemáticas existían en un mundo propio y la mente humana podía acceder a ellas sin necesidad de observaciones, simplemente a través de la facultad de la razón. Los primeros signos de una posible discrepancia entre la percepción de la geometría euclidiana como conjunto de verdades universales y otras ramas de la matemática fueron revelados por el filósofo irlandés George Berkeley (el obispo Berkeley) (1685-1753). En un panfleto titulado *El analista, o un discurso dirigido a un matemático infiel*[171] (que se supone que era Edmond Halley), Berkeley criticaba los mismos fundamentos del cálculo y el análisis presentados por Newton (en *Principia)* y Leibnitz. Específicamente, Berkeley demostraba que el concepto de «fluxiones» o tasas instantáneas de cambio de Newton adolecía de una definición poco rigurosa, lo que, según el punto de vista de Berkeley, bastaba para poner en duda toda la disciplina:

> El método de fluxiones es la clave general de cuya ayuda se valen los matemáticos modernos para desentrañar los secretos de la Geometría y, en consecuencia, de la Naturaleza … Lo que me propongo es investigar, con la máxima imparcialidad, si este método es claro o confuso, sistemático o espurio, demostrativo o precario, coherente, y someto mis investigaciones a vuestro propio juicio y al de todo lector sincero.

No se puede negar que Berkeley tenía algo de razón, y el hecho es que no se formuló una teoría del análisis totalmente coherente hasta los años sesenta del siglo XX, pero la matemática estaba a punto de sufrir una crisis más drástica en el siglo XIX.

6
Geómetras: el shock del futuro

En su famosa obra *El shock del futuro*,[172] el autor Alvin Toffler (1928-) definía el término del título como «la terrible tensión y desorientación que inducimos en las personas al someterlas a un exceso de cambio en un tiempo demasiado breve». En el siglo XIX, los matemáticos, científicos y filósofos sufrieron un shock así. De hecho, la antiquísima creencia de que la matemática ofrece verdades eternas e inmutables quedó destruida. Esta inesperada convulsión intelectual fue debida a la aparición de nuevos tipos de geometrías, denominadas actualmente *geometrías no euclidia-nas.* Aunque la mayor parte de las personas que no son especialistas no han oído hablar nunca de estas geometrías, la magnitud de esta revolución se ha comparado con la que provocó la teoría de la evolución de Darwin.

Para poder apreciar en toda su dimensión este drástico cambio en la visión del mundo, deberemos antes examinar el escenario histórico-matemático.

Hasta principios del siglo XIX, la geometría euclidiana, esto es, la geometría tradicional que aprendemos en la escuela, se consideraba una apoteosis de verdad y certidumbre. En consecuencia, no es sorprendente que el gran filósofo judío holandés Baruch Spinoza (1632-1677) llamase *Ética demostrada en orden geométrico* a su intento de unificar la ciencia, la religión, la ética y la razón. Es más, a pesar de la clara distinción entre el mundo platónico ideal de las formas matemáticas y la realidad física, casi todos los científicos consideraban que los objetos de la geometría euclidiana no eran más que abstracciones destiladas de sus homólogos físicos. Incluso los empiristas más acérrimos como David Hume (1711-1776), que se empeñaban en afirmar que los propios cimientos de la ciencia eran más inseguros de lo que cualquiera pudiese sospechar, concluían que la geometría euclidiana era tan sólida como el Peñón de Gibraltar. En su *Investigación sobre el entendimiento humano*, Hume identificaba dos tipos de «verdades»:

> Todos los objetos de la razón o el entendimiento humano se pueden dividir por naturaleza en dos clases, a saber: Relaciones entre ideas y Hechos en sí. A la primera clase corresponden … las afirmaciones ciertas por intuición o por demostración … Las proposiciones de esta clase pueden descubrirse con el simple pensamiento, sin depender de ninguna cosa existente en el universo. Aunque no existiese en la naturaleza un círculo o un triángulo, *las verdades demostradas por Euclides mantendrían siempre su certeza y evidencia.* Los hechos en sí … no quedan establecidos de la misma forma, ni es nuestra evidencia de su verdad, por grande que sea, de una naturaleza comparable a la anterior. El opuesto de cada hecho en sí sigue siendo posible, porque no implica contradicción alguna … «El Sol no saldrá mañana» no es una proposición menos inteligible, ni implica más contradicción, que la afirmación de que sí saldrá. Es, por tanto, tarea vana tratar de demostrar su falsedad. (Las cursivas son mías.)[173]

En otras palabras, aunque Hume y los empiristas sostenían que todo el conocimiento surge de la *observación,* la geometría y sus «verdades» seguían gozando de un estatus privilegiado.

El ilustre filósofo alemán Immanuel Kant (1729-1804) no siempre estaba de acuerdo con Hume, pero también elevaba la geometría euclidiana a un estado de certeza absoluta y validez incuestionable. En su inmortal *Crítica de la razón pura,* Kant intentó en cierta forma dar la vuelta a la relación entre la mente y el mundo físico. En lugar de ser la realidad física la que causa impresiones en una mente puramente pasiva, Kant asignó a esta última la función de «construir» o «procesar» el universo percibido. Kant decidió mirar hacia el interior y no preguntar *qué* podemos saber sino *cómo* podemos saber lo que sabemos.[174] Explicaba Kant que, aunque nuestros ojos detectan partículas de luz, éstas no forman una imagen en nuestra consciencia hasta que nuestros cerebros procesan y organizan la información. En este proceso de construcción tenía un papel preponderante la percepción del espacio intuitiva o *sintética* a priori del ser humano, que a su vez consideraba basada en la geometría euclidiana. Kant era de la opinión que la geometría euclidiana ofrecía la *única* vía para procesar y concep-tualizar el espacio, y que esta relación intuitiva y universal con el espacio se hallaba en el núcleo de nuestra experiencia del mundo natural. En sus propias palabras:

> El espacio no es un concepto empírico extraído de experiencias externas … El espacio es una representación a priori necesaria, que constituye la misma base de todas las intuiciones externas … Sobre esta necesidad de una representación a priori del espacio reposa la certeza apodíctica de todos los principios geométricos y la posibilidad de su construcción a priori. Porque, si la intuición del espacio fuese un concepto obtenido a posterior, prestado de la experiencia externa general, los principios primeros de la definición matemática no serían más que percepciones y, como tales, estarían expuestos a todos los accidentes de la percepción, y la afirmación «entre dos puntos sólo se puede trazar una línea recta» no sería una necesidad, sino sólo algo que la experiencia dictaría en cada caso.[175]

Para simplificar, según Kant, si percibimos un objeto, necesariamente se trata de un objeto espacial y *euclidiano.*

Las ideas de Hume y Kant ponen de manifiesto dos aspectos muy distintos, pero de comparable importancia, asociados históricamente con la geometría de Euclides. El primero es la afirmación de que la geometría euclidiana representa la *única* descripción exacta del espacio físico. El segundo es la identificación de la geometría euclidiana con una estructura firme, robusta e infalible. En conjunto, estas dos supuestas propiedades ofrecían a los matemáticos, científicos y filósofos lo que consideraban como la evidencia más sólida de la existencia de verdades reveladoras e inexorables acerca del universo. Hasta el siglo XIX, estas afirmaciones se daban por descontadas. Pero ¿eran realmente ciertas?

Las bases de la geometría euclidiana las estableció el matemático griego Euclides de Alejandría alrededor del año 300 a.C. En una monumental obra de trece volúmenes denominada *Los elementos*, Euclides intentó edificar la geometría sobre una base lógica bien definida. Empezó por establecer diez axiomas de certeza indiscutible y trató de demostrar un inmenso número de proposiciones a partir de esos postulados, a base únicamente de deducciones lógicas.

Los primeros cuatro axiomas de Euclides eran extremadamente simples y de una exquisita concisión.[176] El primer axioma, por ejemplo, decía: «Entre dos puntos se puede trazar una línea recta». El cuarto afirmaba: «Todos los ángulos rectos son iguales». En contraste, el quinto axioma, denominado «postulado de las paralelas», era de formulación más complicada y bastante menos evidente por sí mismo: «Si dos rectas de un plano intersectan una tercera de forma que la suma de los ángulos internos de un lado es menor que dos ángulos rectos, inevitablemente estas rectas se intersecarán si se prolongan lo suficiente por ese lado».

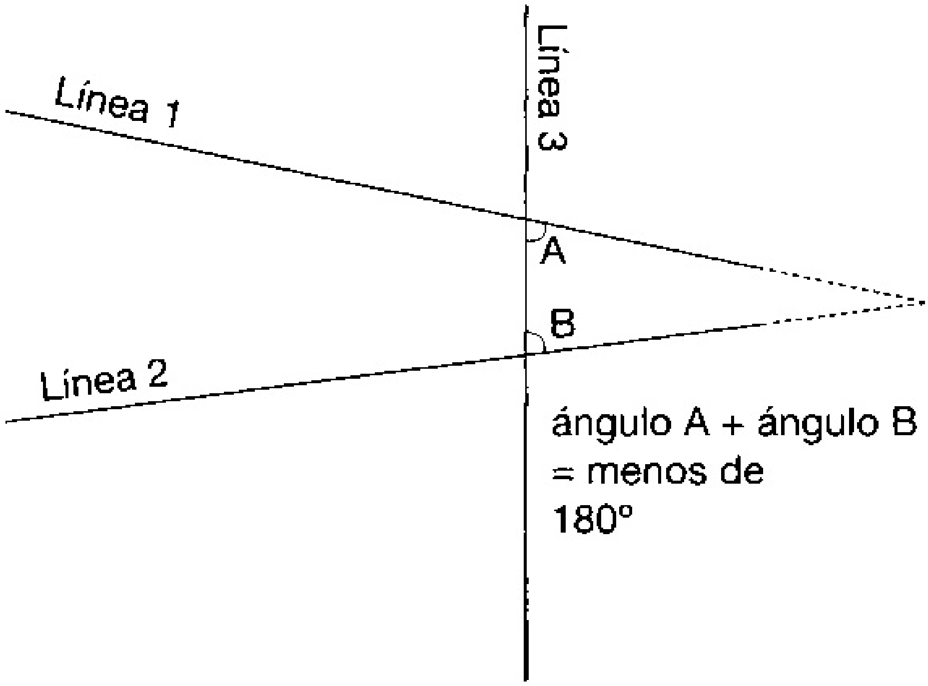


FIGURA 39

La figura 39 muestra gráficamente el contenido de este axioma. Aunque nadie dudaba de su certeza, esta afirmación carecía de la persuasiva simplicidad de los otros axiomas. Todo parece indicar que ni siquiera el propio Euclides estaba demasiado contento con su quinto postulado; las demostraciones de las primeras veintiocho proposiciones de *Los elementos* no hacen uso de él.[177]

La versión equivalente del «Quinto» más citada en la actualidad apareció en primer lugar en los comentarios del matemático griego Proclo en el siglo V d.C, pero se le suele llamar «axioma de Playfair» (por el matemático escocés John Playfair [1748-1819]). Dice: «Dados una recta y un punto exterior a ella, es posible trazar exactamente una recta paralela a la recta dada que pase por ese punto» (véase figura

40).

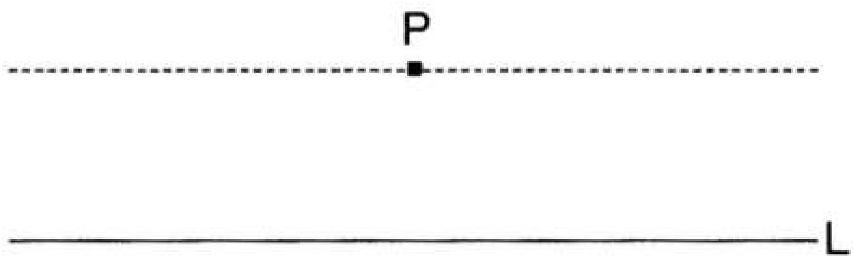


FIGURA 40

Las dos versiones del axioma son «equivalentes» en el sentido de que el axioma de Playfair (junto con los demás axiomas) implica necesariamente el Quinto original de Euclides y viceversa.

A lo largo de los siglos, el cada vez mayor descontento con el «Quinto» ha tenido como resultado un número creciente de intentos infructuosos de *demostrarlo* a partir de los otros nueve axiomas o sustituirlo por un postulado más evidente. Con el fracaso de esos intentos, otros geómetras se plantearon dar respuesta a una enigmática pregunta: ¿Y si se demostrase que el quinto axioma es, en realidad, falso? Algunos de estos empeños empezaron a plantear molestas dudas sobre si los axiomas de Euclides eran verdaderamente evidentes o estaban, en realidad, basados en la *experiencia*.[178] El veredicto final, un tanto sorprendente, se materializó en el siglo XIX: era posible crear nuevos tipos de geometría con sólo *elegir* un axioma distinto del quinto de Euclides. Es más, ¡estas geometrías «no euclidianas» podrían, en principio, describir el espacio físico con la misma precisión que la geometría euclidiana!

Vamos a hacer una pausa para reflexionar sobre el sentido de la palabra «elegir». Durante milenios, se había considerado que la geometría euclidiana era la única e *inevitable* descripción verdadera del espacio. El hecho de poder elegir los axiomas y obtener una descripción igualmente válida supuso un cambio radical de concepción. El esquema deductivo verdadero y cuidadosamente construido se convirtió de pronto en algo parecido a un juego, en el que los axiomas hacían el papel de reglas. Bastaba con cambiar los axiomas para jugar a un juego distinto. Es difícil hacerse una idea del tremendo impacto de este nuevo punto de vista en la comprensión de la naturaleza de la matemática.

Una serie de matemáticos creativos prepararon el terreno para lanzar el último asalto a la geometría de Euclides. Entre ellos son especialmente dignos de mención el sacerdote jesuita Gerola-mo Saccheri (1667-1733), que investigó las consecuencias de la sustitución del quinto postulado por una afirmación distinta, y los matemáticos alemanes Georg Klügel (1739-1812) y Johann Hein-rich Lambert (1728-1777), que fueron los primeros en darse cuenta de la posibilidad de la existencia de geometrías alternativas a la euclidiana. Pero alguien tuvo que dar el tiro de gracia a la idea de la exclusividad de la geometría euclidiana como representación del espacio. Este honor lo compartieron tres matemáticos: uno ruso, otro húngaro y un tercero alemán.

Nuevos y extraños mundos

El primero en publicar un tratado completo sobre un nuevo tipo de geometría —que se podía construir en una superficie con forma de silla de montar (figura 41a)— fue el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856; figura 42).[179]

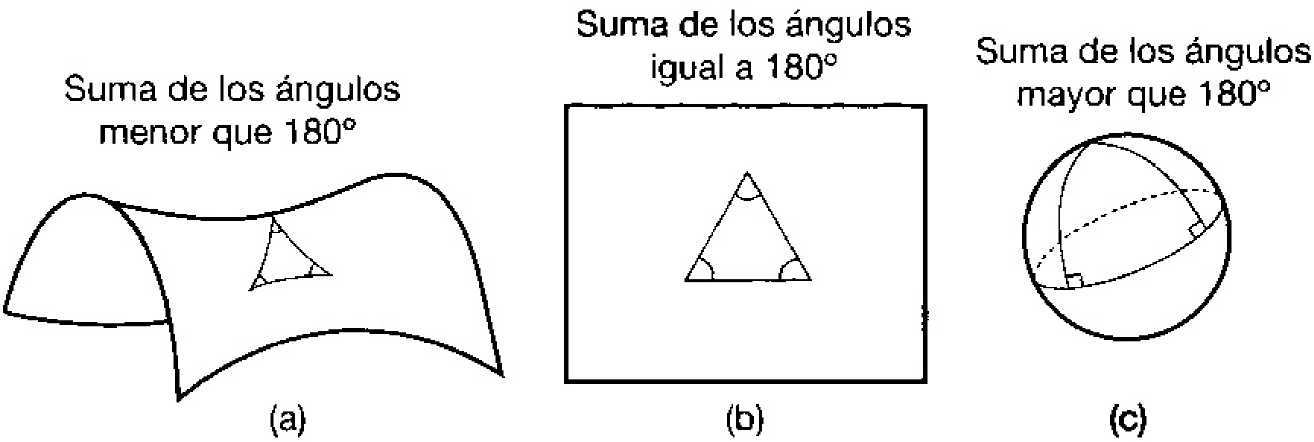


Figura 41

FIGURA 42

En este tipo de geometría (que en la actualidad se denomina *geometría hiperbólica),* el quinto postulado de Euclides queda sustituido por la afirmación de que, dada una línea en un plano y un punto exterior a esta línea, existen *al menos* dos líneas que pasan por el punto y son paralelas a la línea dada. Otra diferencia crucial entre la geometría de Lobachevsky y la de Euclides es que, mientras en la de este último, los ángulos de un triángulo siempre sumaban 180 grados (figura 41 b), en la del primero la suma es siempre inferior a 180 grados. La aparición de la obra de Lobachevsky en el oscuro *Mensajero de Kazan* pasó casi por completo desapercibida hasta la aparición de sus traducciones en francés y alemán a finales de los años 1830.

El joven matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860),[180] desconocedor de la obra de Lobachevsky, formuló una geometría similar durante la década de 1820. Con juvenil entusiasmo, en 1823 escribía a su padre (el matemático Farkas Bolyai; figura 43): «Lo que hallé fue tan magnífico que me dejó estupefacto … He creado un mundo distinto de la nada».

FIGURA 43

En 1825, Janos estuvo listo para presentar al padre Bolyai el primer borrador de su nueva geometría. El título del manuscrito era *La ciencia del espacio absoluto*.[181] A pesar de la euforia del joven, su padre no quedó totalmente convencido de la solidez de las ideas déjanos. Sin embargo, decidió publicar la nueva geometría como apéndice de su tratado de dos volúmenes sobre los fundamentos de la geometría, el álgebra y el análisis (cuyo supuestamente atractivo título era *Ensayo sobre elementos de matemática para jóvenes estudiosos).*

FIGURA 44

En junio de 1831, Farkas envió una copia del libro a su amigo Cari Friedrich Gauss (figura 44), que no sólo era el matemático más importante de su época, sino que está considerado por muchos como uno de los tres más grandes de la historia. Por desgracia, el libro se extravió en el caos provocado por una epidemia de cólera y Farkas tuvo que enviar una segunda copia. Gauss envió una respuesta el 6 de marzo de 1832, y sus comentarios no eran exactamente los que el joven Janos esperaba:

> Si empezase por decir que no puedo elogiar este trabajo, quizá eso te sorprendiese momentáneamente. Pero no puedo decir otra cosa, porque elogiarlo supondría elogiarme a mí mismo. El contenido de la obra, el camino que ha tomado tu hijo, los resultados a los que ha llegado, coinciden de modo casi literal con las meditaciones que han ocupado mi mente durante los últimos treinta o treinta y cinco años. De modo que me he quedado anonadado. En lo que respecta a mi propio trabajo, que hasta ahora apenas he publicado en papel, mi intención era no permitir que se publicase mientra viviese.

Déjenme comentar entre paréntesis que, al parecer, Gauss temía que los filósofos kantianos, a los que Gauss llamaba «los boecios» (sinónimo de estúpidos en la antigua Grecia), considerasen esta geometría radicalmente nueva como una herejía filosófica. Gauss proseguía así:

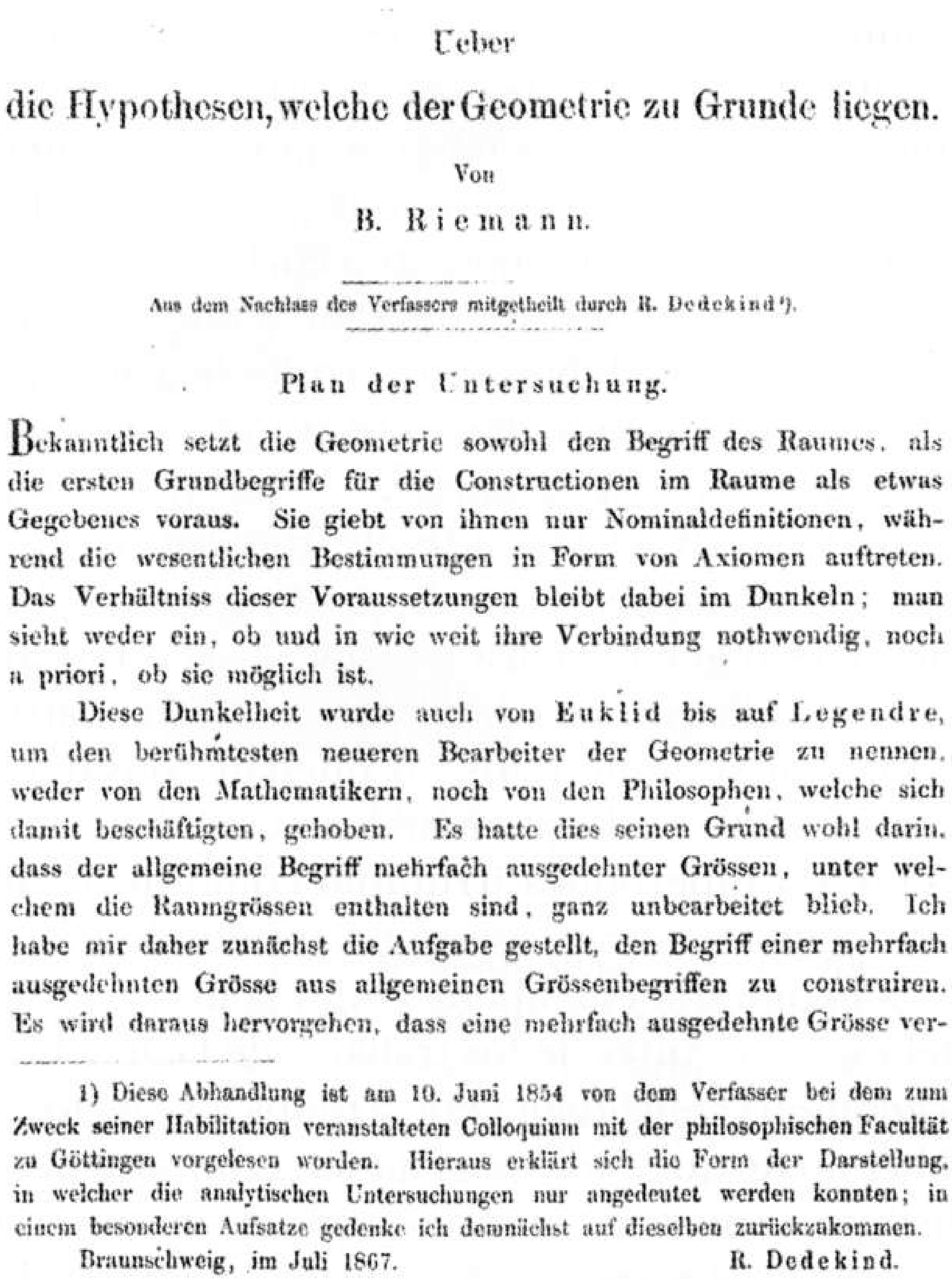
> Por otra parte, tenía pensado dejar escrito todo esto más adelante para que, como mínimo, no pereciese conmigo. Así, es para mí una agradable sorpresa poder ahorrarme la molestia, y me complace sobremanera que sea el hijo de mi viejo amigo quien se adelante a mí de este modo tan notable.

Mientras que Farkas quedó gratamente satisfecho por los elogios de Gauss, que le parecieron «espléndidos», para Janos supusieron un golpe devastador. Durante casi una década se negó a creer en la afirmación de Gauss sobre su supuesta «meditación previa» acerca de esta geometría, y la relación con su padre (de quien sospechaba que había comunicado con anterioridad sus resultados a Gauss) quedó gravemente afectada. Cuando finalmente se dio cuenta de que Gauss había empezado a trabajar en el problema nada menos que en 1799, el carácter de Janos se amargó, y su obra matemática posterior (a su muerte dejó unas veinte mil páginas manuscritas) quedó deslucida en comparación.

Sin embargo, apenas cabe duda de que Gauss había reflexionado en profundidad sobre la geometría no euclidiana.[182] En una anotación de su diario, en septiembre de 1799, escribía: *In principiis geometriae egregios progressus fecimus* («Logramos avances maravillosos en los principios de la geometría»). Más adelante, en 1813, señalaba: «En la teoría de las líneas paralelas no estamos más allá de donde estaba Euclides. Esta es la *partie honteuse* (parte bochornosa) de la matemática, que antes o después tendrá que adquirir una forma muy distinta». Años después, en una carta fechada el 28 de abril de 1817, afirmaba: «Cada vez estoy más convencido de que no es posible demostrar la necesidad de nuestra geometría [euclidiana]». Finalmente, y de forma opuesta a las tesis de Kant, Gauss llegó a la conclusión de que la geometría euclidiana no podía considerarse una verdad universal, sino más bien que «habría que considerar la geometría [euclidiana], no como la aritmética, que es válida a priori, sino aproximadamente como la mecánica». Conclusiones similares fueron alcanzadas de forma independiente por Ferdinand Schweikart (1780-1859), profesor de jurisprudencia, que hizo llegar noticia de su trabajo a Gauss entre 1818 y 1819. No obstante, puesto que ni Gauss ni Schweikart publicaron sus resultados, el mérito de primera publicación se suele atribuir a Lo-bachevsky y Bolyai, aunque éstos no puedan considerarse como los únicos «creadores» de la geometría no euclidiana.

La geometría hiperbólica irrumpió como un relámpago en el mundo de la matemática y asestó un tremendo golpe a la percepción de la geometría euclidiana como la única e infalible descripción del espacio. Antes de los trabajos de Gauss, Lobachevsky y Bolyai, la geometría euclidiana era, a todos los efectos, el mundo natural. El hecho de que fuese posible seleccionar un conjunto de axiomas distinto y construir un nuevo tipo de geometría hizo surgir por primera vez la sospecha de que, después de todo, la matemática era una invención humana, en lugar de un descubrimiento de realidades que existían fuera del cerebro de las personas. Al mismo tiempo, el derrumbamiento de la conexión inmediata entre la geometría euclidiana y el espacio físico real puso de manifiesto lo que, al parecer, eran deficiencias fundamentales en la idea de que la matemática era el lenguaje del universo.

El estatus privilegiado de la geometría euclidiana aún empeoró más cuando uno de los alumnos de Gauss, Bernhard Riemann (1826-1866), demostró que la geometría hiperbólica no era la única geometría no euclidiana posible. El 10 de junio de 1854, Riemann dio en Göttingen una espléndida conferencia[183] (en la figura 45 se muestra la primera página de su versión editada) en la que presentaba sus puntos de vista: «Acerca de las hipótesis fundamentales de la geometría».



Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

FIGURA 45

En ella empezaba diciendo: «La geometría da por supuesto el concepto de espacio y los principios básicos para construir en él. Sólo ofrece definiciones nominales de estos elementos, y sus especificaciones esenciales aparecen en forma de axiomas».

Sin embargo, señalaba: «La relación entre estas suposiciones es borrosa; no es posible ver si existe alguna conexión necesaria entre ellos y, en caso afirmativo, hasta qué punto, ni saber a priori si es siquiera posible que exista una conexión entre ellas». Entre las posibles construcciones geométricas, Riemann comentó la *geometría elíptica,* como la que podría darse sobre la superficie de una esfera (figura 41c). Cabe destacar que, en esa geometría, la distancia más corta entre dos puntos no es una línea recta, sino un segmento de un círculo máximo cuyo centro coincide con el centro de la esfera. Las líneas aéreas sacan provecho de esta característica: los vuelos entre Europa y Estados Unidos no siguen una trayectoria que aparecería como una recta en un mapa, sino que siguen un círculo máximo orientado hacia el norte. Es fácil comprobar que cualquier pareja de círculos máximos se cortan en dos puntos opuestos. Por ejemplo, dos meridianos de la Tierra, que parecen paralelos en el Ecuador, se cortan en los dos polos. En consecuencia, a diferencia de lo que ocurre en la geometría euclidiana, en la que sólo pasa una paralela por un punto externo a una línea, y de la hiperbólica, en la que hay al menos dos paralelas, en la geometría elíptica sobre una esfera no hay paralelas en absoluto. Riemann llevó los conceptos no euclidianos un paso más allá y planteó geometrías en espacios curvos de tres, cuatro y más dimensiones. Uno de los conceptos fundamentales que Riemann amplió fue el de *curvatura*, el ritmo al que se curva una superficie o una línea curvada. Por ejemplo, la superficie de una cáscara de huevo se curva con más suavidad a lo ancho que a lo largo de una curva que pase por uno de sus más estrechos extremos. Riemann dio una definición matemática precisa de curvatura en espacios de cualquier número de dimensiones, y con ello intensificó la unión entre el álgebra y la geometría iniciada por Descartes. En la obra de Riemann, ecuaciones con un número arbitrario de variables hallaron su homólogo geométrico, y los nuevos conceptos de las geometrías avanzadas quedaron asociados a las ecuaciones.

No fue sólo el prestigio de la geometría euclidiana la víctima de los nuevos horizontes abiertos para la geometría en el siglo XIX. Las ideas de Kant acerca del espacio no tardaron mucho en seguir los mismos pasos. Recordemos que Kant afirmaba que la información de nuestros sentidos se organiza exclusivamente según modelos euclidianos antes de quedar registrada en nuestro consciente. Los geómetras del siglo XIX desarrollaron rápidamente su intuición en las geometrías no euclidianas y aprendieron a percibir el mundo a través de ellas. La percepción euclidiana del espacio resultó ser, después de todo, aprendida, no intuitiva. A la vista de estos espectaculares acontecimientos, el gran matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) llegó a la conclusión de que los axiomas de la geometría «no son intuiciones sintéticas a priori ni datos experimentales. Se trata de *convenciones.* Nuestra elección entre todas las posibles convenciones, aunque guiada por los hechos experimentales, es libre». En otras palabras, Poincaré consideraba los axiomas como simples «definiciones disfrazadas». (La cursiva es mía.)

El punto de vista de Poincaré no acusaba únicamente la influencia de las geometrías no euclidianas que hemos descrito,[184] sino también la proliferación de otras nuevas geometrías, que a finales del siglo XIX parecía casi fuera de control. Por ejemplo, en *geometría proyectiva*(como la que se obtiene al proyectar en una pantalla una imagen sobre una película de celuloide) se podía literalmente intercambiar el papel de los «puntos» y las «líneas», de modo que los teoremas sobre puntos y líneas (por este orden) se convertían en teoremas sobre líneas y puntos. En *geometría diferencial*, los matemáticos empleaban el cálculo para estudiar las propiedades geométricas locales de diversos espacios matemáticos, como la superficie de una esfera o la de un toro. A primera vista, estas y otras geometrías tenían el aspecto de ingeniosas invenciones de imaginativas mentes matemáticas, más que de descripciones precisas del espacio físico. ¿Acaso era posible seguir defendiendo el concepto de Dios como matemático? Después de todo, si «el propio Dios geometriza» (una frase atribuida a Platón por el historiador Plutarco), ¿cuál de estas geometrías posee la preferencia divina?

El reconocimiento cada vez más patente de las carencias de la geometría euclidiana clásica forzó a los matemáticos a examinar con rigor los propios fundamentos de la matemática en general, y en particular la relación entre matemática y lógica. Volveremos sobre este importante tema en el capítulo 7. Aquí mencionaré simplemente que la propia noción de la evidencia de los axiomas por sí mismos había quedado destruida. En consecuencia, aunque el siglo XIX fue testigo de otros importantes desarrollos en álgebra y en análisis, probablemente es la revolución de la geometría la que supuso la mayor influencia en la visión de la naturaleza de la matemática.

Del espacio, los números y los humanos

Sin embargo, antes de que los matemáticos pudiesen examinar el tema fundamental de las bases de la matemática, tuvieron que dedicar su atención a algunas cuestiones «menores». En primer lugar, el hecho de que se hubiesen formulado y publicado geometrías no euclidianas no implicaba necesariamente que se tratase de derivaciones legítimas de la matemática. Por ejemplo, el miedo a la incoherencia —la posibilidad de que, al llevar estas geometrías a sus últimas consecuencias lógicas se generasen contradicciones irresolubles— estaba presente de forma permanente. En la década de 1870, el italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) y el alemán Felix Klein (1849-1925) habían demostrado que, dado que la geometría euclidiana era coherente, también lo eran las no euclidianas. Esto, no obstante, seguía dejando abierta la cuestión de la solidez de las bases de la geometría euclidiana. Y luego estaba el importante asunto de la relevancia. La mayoría de los matemáticos se tomaban las nuevas geometrías, en el mejor de los casos, como entretenidas curiosidades. Mientras que el peso histórico de la geometría euclidiana derivaba sobre todo de su consideración como descripción del espacio real, las geometrías no euclidianas no parecían, en principio, tener conexión alguna con la realidad física. Así, muchos matemáticos trataban estas nuevas geometrías como a los parientes pobres de la geometría de Euclides. Incluso Henri Poincaré, que era más complaciente que la mayoría, insistía en que, aunque los humanos nos viésemos transportados a un mundo en el que la geometría aceptada fuese no euclidiana, estaba «convencido de que no sería más práctico para nosotros cambiar» [de la geometría euclidiana a la no euclidiana]. Dos cuestiones dominaban, pues, el panorama: (i) ¿Podía la geometría (en particular) y otras ramas de la matemática (en general) establecerse sobre cimientos axiomáticos sólidos? (ii) ¿Cuál era la relación, si es que la había, entre la matemática y el mundo físico?

Algunos matemáticos adoptaron una postura pragmática con respecto a la validación de las bases de la geometría. Decepcionados tras comprender que aquello que consideraban verdades absolutas habían resultado estar basadas más en la experiencia que en el rigor, fijaron su atención en la aritmética, la matemática de los números. La geometría analítica de Descartes, en la que los puntos del plano se identificaban con pares ordenados de números; los círculos, con pares que satisfacían una determinada ecuación (véase el capítulo 4), etcétera, ofrecía las herramientas precisas para volver a edificar los fundamentos de la geometría sobre la base de los números. Posiblemente el matemático alemán Jacob Jacobi (1804-1851) pretendía expresar este cambio de paradigma cuando sustituyó la frase de Platón «el propio Dios geometriza» por su lema: «El propio Dios aritmetiza». Pero en cierto sentido, estos esfuerzos se limitaban a trasladar el problema a una rama distinta de la matemática. Aunque el gran matemático alemán David Hilbert (1862-1943) sí fue capaz de demostrar que la geometría euclidiana era coherente siempre que lo fuese la aritmética, la coherencia de esta última no estaba de ningún modo establecida sin ambigüedad en aquellos momentos.

En el campo de las relaciones entre la matemática y el mundo físico había hecho su aparición un nuevo aspecto sensacional. Durante muchos siglos, la interpretación de la matemática como una forma de ver el cosmos se había ampliado de forma continua y espectacular. La matematización de las ciencias por parte de Gali-leo, Descartes, Newton, los Bernoulli, Pascal, Lagrange, Quetelet y otros se consideraba una prueba sólida del diseño matemático subyacente de la naturaleza. Claramente, se podía argumentar que, si la matemática no era el lenguaje del cosmos, ¿por qué funcionaba tan bien para explicarlo, desde las leyes básicas de la naturaleza a las características humanas?

Es cierto que los matemáticos se daban cuenta de que la matemática trataba sólo con formas platónicas más bien abstractas, pero estas formas se consideraban como idealizaciones razonables de los objetos físicos reales. De hecho, la sensación de que el libro de la naturaleza estaba escrito en el lenguaje de la matemática estaba tan arraigada que muchos matemáticos rechazaban de plano la posibilidad de que los conceptos y las estructuras matemáticas no estuviesen directamente relacionadas con el mundo físico. Era el caso, por ejemplo, del pintoresco Gerolamo Cardano (1501-1576). Cardano era un matemático de talento, un médico de renombre y un jugador compulsivo. En 1545 publicó uno de los libros más influyentes de la historia del álgebra: el *Ars Magna*. En este exhaustivo tratado, Cardano investigaba en gran detalle las soluciones de las ecuaciones algebraicas, desde la simple ecuación cuadrática (en la que la incógnita aparece elevada al cuadrado, x^2) hasta innovadoras soluciones de las ecuaciones cúbicas (con la incógnita elevada al cubo, x^3) y cuál ticas (elevada a la cuarta potencia, X^4). Sin embargo, en la matemática clásica, las cantidades se solían interpretar como elementos geométricos. Por ejemplo, el valor de la incógnita x se identificaba con un segmento de recta de esa misma longitud, la segunda potencia, x^2, era un área y la tercera, x^3, era un sólido con el volumen correspondiente. Así, en el primer capítulo del *Ars Magna*, Cardano explica:[185]

> Finalizamos nuestra detallada consideración con la cúbica, mencionando otras de paso, aunque sea de modo general. Porque, así como *positio* [la primera potencia] se refiere a una línea, *quadra-tum* [el cuadrado] a una superficie y *cubum* [el cubo] a un cuerpo sólido, sería insensato por nuestra parte ir más allá. La naturaleza no lo permite. Entonces, como se verá, todas las cuestiones hasta el cúbico incluso están perfectamente demostradas, pero en el caso de las otras que añadiremos, sea por necesidad o por curiosidad, nos limitaremos simplemente a formularlas.

En otras palabras, Cardano razona que, puesto que nuestros sentidos perciben el mundo físico sólo con tres dimensiones, sería una tontería que los matemáticos se preocupasen por un número superior de dimensiones o con ecuaciones de un grado mayor.

El matemático inglés John Wallis (1616-1703), de cuya obra *Arithmetica Infinitorum* aprendió Newton métodos de análisis, expresaba una opinión similar. En otro importante libro, *Tratado de álgebra*,[186] Wallis declaraba: «La Naturaleza, en propiedad del lenguaje, no admite más de *tres* dimensiones (locales)». Y a continuación entraba en detalles:

> Una línea trazada sobre una línea hará un Plano o Superficie; ésta, trazada en una línea, hará un sólido. Pero, si este sólido se pudiese trazar sobre una línea, o este plano sobre un plano, ¿qué generaría? ¿Un planiplano? Eso es un monstruo de la Naturaleza, y no más posible que una Quimera [un monstruo de la mitología griega que exhalaba fuego, mezcla de serpiente, león y cabra] o un Centauro [otro ser mitológico griego con el torso de un hombre y el cuerpo y patas de un caballo]. Porque la Longitud, la Anchura y el Grosor ocupan ya todo el espacio, y nuestra Fantasía no es capaz de imaginar cómo podría existir una Cuarta Dimensión Local más allá de estas Tres.

De nuevo, la lógica de Wallis era perfectamente clara: no tenía sentido siquiera imaginar una geometría que no describiese el espacio real.

Las opiniones, sin embargo, empezaron a cambiar.[187] Los matemáticos del siglo XVIII fueron los primeros en considerar el tiempo como una posible cuarta dimensión. En un artículo titulado «Dimensión»,[188] publicado en 1754, el físico Jean D'Alembert (1717-1783) escribía:

> Decía antes que es imposible concebir más de tres dimensiones. Un hombre de diversos talentos, conocido mío, sostiene que la duración se puede contemplar como una cuarta dimensión, y que el producto del tiempo y la solidez es, en cierto modo, un producto de cuatro dimensiones. Es posible estar en desacuerdo con esta idea, pero a mí me parece que su mérito va más allá de la simple novedad.

El gran matemático Joseph Lagrange iba un paso más allá; en 1797 afirmaba:[189]

> Puesto que una posición en el espacio depende de tres coordenadas rectangulares, en los problemas de mecánica estas coordenadas se conciben como funciones de t [tiempo]. Así, podemos contemplar la mecánica como una geometría de cuatro dimensiones, y el análisis mecánico como una extensión del análisis geométrico.

Estas audaces ideas abrieron la puerta a una extensión de la matemática que, hasta ese momento, se había tomado como inconcebible: geometrías de cualquier número de dimensiones, sin tener en cuenta su relación con el espacio físico.

Kant podía equivocarse al creer que nuestros sentidos de la percepción espacial siguen exclusivamente patrones euclidianos, pero no cabe duda de que nuestra percepción sólo funciona de forma natural e intuitiva en tres o menos dimensiones. Podemos imaginar con relativa facilidad el aspecto de nuestro mundo tridimensional en el universo de sombras de dos dimensiones de Platón, pero pasar de las tres hacia un número mayor de dimensiones requiere realmente la imaginación de un matemático.

El trabajo más innovador sobre el tratamiento de la *geometría n-dimensional*—geometría en un número de dimensiones arbitrario— se lo debemos en parte a Hermann Gunther Grassmann (1809-1877). Grassmann, que tenía once hermanos y que fue padre de once hijos, era un maestro de escuela sin formación matemática universitaria.[190] Durante su vida fue más reconocido por su trabajo en lingüística (en particular por sus estudios sobre el sánscrito y el gótico) que por sus logros matemáticos. Uno de sus biógrafos escribió: «Al parecer, es el destino de Grassmann que lo redescubran de vez en cuando, y cada vez es como si hubiese sido prácticamente olvidado desde su muerte». Ysin embargo, Grassmann fue responsable de la creación de una ciencia abstracta de «espacios», en la cual la geometría habitual no era más que un caso especial. Grassmann publicó sus pioneras ideas (que dieron origen a una rama de la matemática denominada álgebra lineal) en 1844, en un libro al que se suele llamar *Ausdehnungsle-hre* (que significa *Teoría de la extensión*, el título completo es: *Teoría de extensión lineal: una nueva rama de la matemático).*

En el prólogo de su libro, Grassmann escribía: «… la geometría no puede en modo alguno verse … como una rama de la matemática; la geometría está relacionada con algo que ya existe en la naturaleza, a saber, el espacio. También me di cuenta de que debe de haber una rama de la matemática que, de un modo puramente abstracto, genere leyes similares a las de la geometría».

Este punto de vista sobre la naturaleza de la matemática era radicalmente novedoso. Para Grassmann, la geometría tradicional —herencia de los antiguos griegos— trata del espacio físico, así que no se puede considerar una verdadera rama de la matemática abstracta. Según él, la matemática es un constructo más bien abstracto del cerebro humano, que no tiene por qué tener aplicación alguna en el mundo real.

Es fascinante seguir el hilo aparentemente trivial de las ideas de Grassmann hasta llegar a su teoría del álgebra geométrica.[191] Empezó por la fórmula simple AB + BC = AC, que aparece en cualquier libro de geometría al hablar de la longitud de segmentos (véase figura 46a).

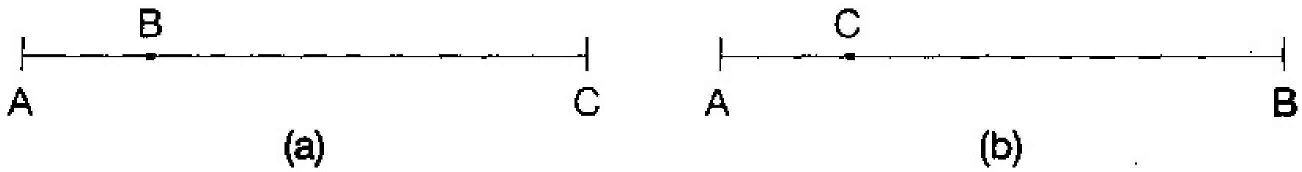


FIGURA 46

Pero Grassmann notó algo interesante. Descubrió que la fórmula sigue siendo válida *independientemente* del orden de los puntos A, B, C, mientras no se interprete AB, BC, etc. como simples longitudes, sino que las asigne también una «dirección», de modo que BA = -AB.

Por ejemplo, si C se halla entre A y B (como en la figura 46b), entonces AB = AC + CB, pero como CB = -BC, hallamos que AB = AC - BC, y volvemos a la fórmula original AB + BC = AC con sólo sumar BC en ambos lados.

Esto ya era interesante de por sí, pero la extensión de Grassmann aún reservaba más sorpresas. Obsérvese que, si hablamos de álgebra y no de geometría, una expresión como AB suele denotar el producto A x B. En tal caso, la sugerencia de Grassmann según la cual BA = -AB viola una de las leyes sacrosantas de la aritmética: dos cantidades multiplicadas entre sí producen el mismo resultado independientemente del orden de las cantidades. Grassmann se enfrentó de lleno a esta perturbadora posibilidad e inventó un álgebra nueva y coherente (denominada álgebra exterior) que permitía diversos procesos de multiplicación y, al mismo tiempo, podía manejar la geometría en cualquier número de dimensiones.

En la década de 1860, la geometría n-dimensional se extendía como una mancha de aceite.[192] No sólo estaba la conferencia fundamental de Riemann, que había establecido como área esencial de investigación los espacios de cualquier curvatura y de un número arbitrario de dimensiones, sino que otros matemáticos, como Arthur Cayley y James Sylvester en Inglaterra y Ludwig Schläfli en Suiza, ampliaban ese campo con sus propias contribuciones. Los matemáticos empezaron a sentirse liberados de las restricciones que durante siglos habían ligado la matemática únicamente a los conceptos de espacio y número. A lo largo de la historia, esas ataduras se habían tomado tan en serio que, incluso en pleno siglo XVIII, el prolífico matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) expresaba así su punto de vista: «En general, la matemática es la ciencia de la cantidad, o la ciencia que investiga las formas de medir la cantidad». Los vientos del cambio no empezaron a soplar hasta el siglo XIX.

En primer lugar, la introducción de los espacios geométricos abstractos y la noción de infinito (tanto en geometría como en la teoría de conjuntos) habían emborronado el significado de «cantidad» y de «medida» hasta el punto de que ya no eran reconocibles. En segundo lugar, el creciente número de estudios sobre abstracciones matemáticas contribuyeron a alejar aún más esta disciplina de la realidad física y, simultáneamente, insuflaron vida y «existencia» en las propias abstracciones.

Georg Cantor (1845-1918), el creador de la *teoría de conjuntos*, describía el nuevo espíritu de libertad de la matemática en la siguiente «declaración de independencia»:[193] «La matemática es, en su desarrollo, completamente libre, y su único límite es la cuestión evidente por sí misma de que sus conceptos deben ser coherentes entre sí y poseer relaciones exactas, ordenadas por definiciones, con los conceptos presentados con anterioridad y ya establecidos». A lo que el algebrista Richard Dedekind (1831-1916) añadiría, seis años después:[194] «Considero que el concepto de número es totalmente independiente de las nociones o intuiciones de espacio y tiempo … Los números son creaciones libres de la mente humana». Es decir, tanto Cantor como Dedekind veían la matemática como una investigación abstracta y conceptual, restringida únicamente por el requisito de coherencia, sin obligación alguna hacia el hecho de calcular ni hacia la condición de ser el lenguaje de la realidad física. Cantor lo resumía con estas palabras: «…la *esencia de la matemática* radica por completo en su *libertad*».

A finales del siglo XIX, casi todos los matemáticos aceptaban la visión de Cantor y Dedekind acerca de la libertad de la matemática. El objetivo de la matemática cambió de la investigación de las verdades de la naturaleza a la construcción de estructuras abstractas —sistemas de axiomas— y la búsqueda de las consecuencias lógicas de tales axiomas. Uno podría imaginar que de este modo se liquidaba la cuestión eterna de si la matemática era descubierta o inventada. Si la matemática no era más que un juego, por muy complejo que fuese, con reglas arbitrarias inventadas, no tenía sentido creer en la realidad de los conceptos matemáticos, ¿verdad?

Pues, por sorprendente que parezca, este alejamiento de la realidad física llevó a algunos matemáticos a opinar exactamente lo contrario. En lugar de concluir que la matemática era una invención humana, regresaron a la noción platónica original de la matemática como mundo de verdades independientes, cuya existencia era tan real como la del universo físico. Estos «neoplatóni-cos» calificaban los intentos de relacionar la matemática con la física como escarceos con la matemática *aplicada,* en oposición a la matemática *pura,* que se suponía indiferente a cualquier elemento físico. Así lo expresaba el matemático francés Charles Hermite (1822-1901) en una carta dirigida al matemático holandés Tho-mas Joannes Stieltjes (1856-1894) el 13 de mayo de 1894:[195]

> Mi querido amigo, soy muy feliz al ver tu inclinación por transformarte en un naturalista para observar los fenómenos del mundo aritmético. Tu doctrina, a mi parecer, es la misma que la mía; yo creo que los números y las funciones del análisis no son productos arbitrarios de nuestra mente; creo que existen fuera de nosotros con las mismas características necesarias que los elementos de la realidad objetiva, y que nosotros los hallamos, los descubrimos y los estudiamos, del mismo modo que los físicos, los químicos y los zoólogos.

El matemático inglés G. H. Hardy, que practicaba la matemática pura, era uno de los platónicos más categóricos. El 7 de septiembre de 1922, en una elocuente alocución en la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia, declaraba:

> Los matemáticos han construido gran número de sistemas geométricos distintos.[196] Euclidianos y no euclidianos, de dos, tres o cualquier número de dimensiones. Todos estos sistemas son igualmente válidos, y encarnan los resultados de las *observaciones de la realidad* de los matemáticos, una realidad mucho más intensa y rígida que la dudosa y elusiva realidad de la física … La función de un matemático es, pues, simplemente observar los hechos de su propio e intrincado sistema de realidad, ese complejo increíblemente bello de relaciones lógicas que constituye el contenido de su ciencia, como si se tratase de un explorador oteando una lejana cordillera, y registrar los resultados de sus observaciones en una serie de mapas, cada uno de los cuales es una rama de la matemática pura. (La cursiva es mía.)

Es evidente que, incluso con las pruebas del momento que apuntaban a una naturaleza arbitraria de la matemática, los platónicos más acérrimos no estaban dispuestos a entregar sus armas. Fueran cuales fuesen las opiniones acerca de la realidad metafísica de la matemática, había un concepto cada vez más obvio. Incluso dentro de la aparentemente ilimitada libertad de la matemática, una restricción seguía en su lugar, inmutable e inquebrantable: la de la *coherencia lógica.* Los matemáticos y los filósofos eran más conscientes que nunca de la imposibilidad de cortar el cordón umbilical entre la matemática y la lógica. Y de aquí surgió una nueva idea: ¿sería posible construir toda la matemática sobre una única base lógica? Y a la inversa: ¿podían utilizarse los métodos matemáticos en el estudio del razonamiento en general?

7
Lógicos: pensar sobre el razonamiento

El cartel de una barbería en cierto pueblo dice: «Sólo afeito a los que no se afeitan a sí mismos».[197] Suena razonable, ¿verdad? Es obvio que los hombres que se afeitan a sí mismos no precisan de los servicios del barbero, y es natural entonces que éste afeite a todos los demás. Pero podemos preguntarnos: ¿quién afeita al barbero? Si se afeita a sí mismo, entonces, según el cartel, él debería ser uno de los que *no* afeita. Por otra parte, si no se afeita a sí mismo, de nuevo según el cartel, ¡debería ser uno de los que él *sí* afeita! Entonces, ¿qué es? A lo largo de la historia, enemistades familiares graves han surgido de preguntas mucho más inofensivas. Esta *paradoja* fue formulada por primera vez por Bertrand Russell (1872-1970), uno de los lógicos y filósofos más destacados del siglo XX, con la simple intención de demostrar que la intuición lógica humana no es infalible. Las paradojas o «antinomias» reflejan situaciones en las que premisas aparentemente aceptables conducen a conclusiones inaceptables. En el ejemplo anterior, el barbero del pueblo se afeita y no se afeita a sí mismo simultáneamente. ¿Tiene solución esta paradoja en concreto? Si está enunciada *del modo descrito arriba,* hay una posible solución simple: ¡el barbero es una mujer! Por otro lado, si se ha establecido con anterioridad que el barbero es un hombre, la conclusión absurda sería el resultado de haber aceptado antes la premisa. En otras palabras, este barbero no puede existir. Pero ¿qué tiene todo esto que ver con la matemática? Pues da la casualidad de que la matemática y la lógica están íntimamente relacionadas. Así describía Russell esa relación:[198] «Desde un punto de vista histórico, la matemática y la lógica han sido disciplinas totalmente independientes. La matemática ha estado conectada con la ciencia y la lógica con el griego. Pero ambas se han desarrollado en los últimos tiempos: la lógica se ha hecho más matemática y la matemática, más lógica. En consecuencia, en los tiempos actuales [en 1919] trazar una línea de separación entre ambas se ha convertido en una tarea imposible; en realidad, las dos son una misma cosa. Su diferencia es como la que hay entre un muchacho y un hombre: la lógica es la juventud de la matemática, y la matemática es la madurez de la lógica».

Russell mantiene aquí que, en gran parte, la matemática se puede reducir a lógica. En otras palabras, que los conceptos básicos de la matemática, incluso los objetos como los números, pueden en realidad definirse en términos de las leyes fundamentales del razonamiento. Es más: más adelante, Russell argumentó que esas definiciones se pueden unir a los principios de la lógica para dar origen a los teoremas de la matemática.

Esta visión de la naturaleza de la matemática (denominada logicismo) recibió el visto bueno tanto de los que consideraban que la matemática no era más que un elaborado juego inventado (los formalistas) como de los atribulados platónicos. Los primeros se alegraron (en principio) de ver cómo un conjunto de «juegos» aparentemente no relacionados entre sí se fusionaban en una «madre de todos los juegos». Los segundos vieron un rayo de esperanza en su idea de que la totalidad de la matemática podía haber brotado de un solo, indudable, origen. A los ojos de los platónicos, esta visión incrementaba la probabilidad de un único origen metafísico.

Por completitud, debería mencionar una escuela de pensamiento —el intuicionismo— que se oponía con vehemencia tanto al logicismo como al formalismo.[199] El abanderado de esta escuela era el algo fanático matemático holandés Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966). Brouwer creía que los números naturales derivaban de una intuición humana del tiempo y de momentos discretos de nuestra experiencia. Para él, era indudable que la matemática era un producto del pensamiento humano y, por tanto, no veía necesidad alguna para la existencia de leyes lógicas universales del tipo de las previstas por Russell. Sin embargo, Brouwer iba mucho más allá: afirmaba que las únicas entidades matemáticas con sentido eran aquellas que se podían construir de forma explícita sobre la base de los números naturales en un número finito de etapas.[200]En consecuencia, rechazaba grandes áreas de la matemática para las que era imposible hallar pruebas constructivas. Otro de los conceptos lógicos que Brouwer negaba era el *principio del tercio excluso* (la condición de que cualquier afirmación es o bien cierta, o bien falsa). En vez de eso, permitía que las afirmaciones flotasen en el limbo de la «indecisión». Esta y otras restricciones intuicionistas convirtieron esta escuela de pensamiento en algo marginal que, en la actualidad, no goza de demasiado predicamento entre los matemáticos. Sin embargo, las ideas de los intuicionistas se anticiparon a algunos de los descubrimientos de los científicos cognitivos acerca del modo en que las personas adquieren los conocimientos matemáticos (un tema que trataremos en el capítulo 9) y también dieron forma a las contribuciones de algunos de los modernos filósofos de la matemática (como Michael Dummett).

Pero ¿cómo se desarrolló la estrecha asociación entre matemática y lógica? Y el programa de los logicistas ¿era en absoluto viable? Repasemos brevemente algunos de los hitos de los últimos cuatro siglos.

Lógica y matemática

Según la tradición, la lógica trataba acerca de las relaciones entre conceptos y proposiciones,[201] y sobre los procesos que permitían extraer deducciones válidas de estas relaciones. En un ejemplo simple, las deducciones de la forma «Todo X es Y; algunos Z son X, luego algunos Z son Y» se construyen de forma que se garantiza automáticamente la verdad de la conclusión siempre que las premisas sean ciertas. Por ejemplo: «Todos los biógrafos son escritores; algunos políticos son biógrafos; luego, algunos políticos son escritores» genera una conclusión cierta. Por otra parte, las inferencias de la forma general: «Todos los X son Y; algunos Z son Y; por tanto, algunos Z son X» no son válidas, porque se pueden hallar ejemplos en los que, aunque las premisas sean ciertas, la conclusión sería falsa. Por ejemplo: «Todos los hombres son mamíferos; algunos animales con cuernos son mamíferos; luego, algunos animales con cuernos son hombres».

Siempre que se sigan algunas reglas, la validez de un argumento no depende del tema de las afirmaciones. Por ejemplo:

> O bien el mayordomo mató al millonario, o le mató su hija.
>
> Su hija no le mató.
>
> Luego, el mayordomo le mató.

Genera una deducción válida. La solidez de este argumento no se basa en absoluto en nuestra opinión acerca del mayordomo o en la relación entre el millonario y su hija. La validez queda garantizada por el hecho de que las proposiciones que siguen la forma general: «si o *p* o *q*, y no *q*, entonces *p*» resultan en una verdad lógica.

Quizá habrá notado que, en los dos primeros ejemplos, los papeles que desempeñan X, Y y Z son similares a los de las variables en las ecuaciones matemáticas: marcan el lugar en el que se pueden introducir expresiones, del mismo modo que se introducen valores en las variables del álgebra. De forma parecida, la verdad de la inferencia «si o *p* o *q*, y no *q*, entonces *p*» recuerda a los axiomas de la geometría de Euclides. Y sin embargo, tuvieron que pasar casi dos milenios de contemplación de la lógica para que los matemáticos asumieran esta analogía.

La primera persona que intentó combinar las disciplinas de la lógica y la matemática en una «matemática universal» fue el matemático y filósofo racionalista alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz, que en realidad tenía formación en derecho, llevó a cabo la mayoría de sus trabajos en matemáticas, física y filosofía en sus ratos de ocio. En vida, su mayor fama se debió a la formulación de las bases del cálculo de forma independiente (y casi simultánea) de Newton, y de la amarga controversia entre ambos por la prioridad en este asunto. En un ensayo que había imaginado casi por completo a los dieciséis años de edad, Leibniz previó un lenguaje universal de la razón o *characteristica universalis*, que consideraba la herramienta definitiva del pensamiento. Su plan consistía en representar las nociones e ideas simples mediante símbolos, y las más complejas mediante las combinaciones apropiadas de estos símbolos básicos. Leibniz esperaba literalmente poder calcular la verdad de cualquier afirmación, en cualquier disciplina científica, mediante puras operaciones algebraicas. Vaticinó que bastaría el cálculo lógico adecuado para resolver los debates filosóficos. Por desgracia, Leibniz no avanzó demasiado en el desarrollo de su álgebra de la lógica. Aparte del principio general de «alfabeto del pensamiento», sus dos principales contribuciones fueron únicamente una afirmación clara sobre en qué circunstancias debemos ver dos cosas como iguales y la confirmación más bien obvia de que ninguna afirmación puede ser simultáneamente verdadera y falsa. Así, a pesar de que las ideas de Leibniz eran realmente brillantes, pasaron prácticamente desapercibidas.

La lógica volvió a ponerse de moda a mediados del siglo XIX, y este súbito incremento de interés produjo importantes obras, primero por Augustus de Morgan (1806-1871) y posteriormente por George Boole (1815-1864), Gottlob Frege (1848-1925) y Giuseppe Peano (1858-1932).

De Morgan era un escritor extraordinariamente prolífico,[202] que publicó literalmente miles de artículos y libros sobre diversos temas relacionados con la matemática, la historia de la matemática y la filosofía. Entre sus obras más peculiares se encuentran un almanaque de lunas llenas (válido durante milenios) y un compendio de matemática excéntrica. A una pregunta acerca de su edad, respondió: «Tenía x años en el año x^2». Se puede comprobar que el único número que, al elevarlo al cuadrado, da un resultado entre 1806 y 1871 (los años de nacimiento y muerte de De Morgan) es 43. Probablemente, las contribuciones más originales de De Morgan fueron en el campo de la lógica, en el que amplió de forma significativa el ámbito de los silogismos de Aristóteles y ensayó una estrategia algebraica de razonamiento. De Morgan miraba la lógica con los ojos de un algebrista, y el álgebra con los ojos de un lógico. En uno de sus artículos describía su visionaria perspectiva: «Debemos volver la vista al álgebra para hallar el uso más habitual de las formas lógicas … El algebrista ya vivía en el elevado mundo de los silogismos, de la incesante composición de relaciones, antes de que se admitiese la simple existencia de ese mundo».

Una de las contribuciones más cruciales de De Morgan a la lógica se denomina «cuantificación del predicado». Se trata de un nombre más bien rimbombante para lo que se podría considerar un sorprendente descuido de los lógicos de la época clásica. Los aristotélicos se dieron cuenta de que, a partir de premisas como «algunos Z son X» y «algunos Z son Y» no se podía llegar a conclusión necesaria alguna sobre la relación entre X e Y. Por ejemplo, las frases «algunas personas comen pan» y «algunas personas comen manzanas» no permiten extraer una conclusión decisiva acerca de la relación entre los comedores de manzanas y los de pan. Hasta el siglo

XIX, los lógicos asumieron también que, para poder establecer una relación necesaria entre X e Y, el término medio (la mencionada «Z») debía ser *universal en* una de las premisas. Es decir, la frase debía incluir «todos los Z». De Morgan demostró que esta suposición era errónea. En su libro *Formal Logic* (publicado en 1847), señalaba que, a partir de premisas como «la mayoría de Z son X» y «la mayoría de Z son Y» sigue necesariamente que «algunos X son Y». Por ejemplo, las frases «casi todas las personas comen pan» y «casi todas las personas comen manzanas» implican de modo inevitable que «algunas personas comen tanto pan como manzanas». De Morgan fue un paso más allá y expresó su nuevo silogismo en una forma cuantitativa precisa. Imaginemos que el número total de Z es z, el número de Z que son también X es x y el número de Z que son también Y es y. En el ejemplo anterior, podría haber 100 personas en total ($z= 100$), de las cuales 57 comen pan ($x = 57$) y 69 comen manzanas ($y = 69$). Entonces, señalaba De Morgan, debe haber al menos $(x+y- z)$ X que son también Y. Al menos 26 personas (el resultado de $57 + 69 - 100 = 26$) comen tanto pan como manzanas.

Por desgracia, este astuto método de cuantificar el predicado hizo que De Morgan se viese metido en una desagradable disputa pública. El filósofo escocés William Hamilton (1788-1856) —al que no debe confundirse con el matemático irlandés William Rowan Hamilton— acusó a De Morgan de plagio, porque Hamilton había publicado unas ideas vagamente relacionadas (aunque mucho menos precisas) unos años antes que De Morgan. El ataque de Hamilton no era de extrañar si uno conocía su actitud general hacia la matemática y sus practicantes. Hamilton había declarado en cierta ocasión: «Un estudio excesivo de la matemática incapacita de forma absoluta la mente para las energías intelectuales requeridas por la filosofía y la vida». El chaparrón de cáusticas cartas que siguieron a la acusación de Hamilton tuvieron un resultado positivo, aunque en absoluto deliberado: ¡guiaron hacia la lógica al algebrista George Boole! Más adelante, Boole relataba en *The Mathematical Analysis of Logic.*

> En la primavera del presente año mi atención se dirigió a la cuestión que enfrentaba a sir W. Hamilton con el profesor De Morgan; y el interés que inspiró en mí me impulsó a reanudar el hilo de investigaciones anteriores que ya casi había olvidado. Mi impresión era que, aunque se podía ver la Lógica con referencia a la idea de cantidad, poseía también otro sistema de relaciones más profundo. Si era lícito mirarla desde fuera, conectada con las intuiciones del Espacio y del Tiempo a través del Número, era también lícito mirarla desde dentro, basada en hechos de un orden distinto que moran en la propia constitución de la Mente.

Estas humildes palabras describen los principios de lo que se convertiría en una obra fundamental de la lógica simbólica.

Las leyes del pensamiento

George Boole (figura 47) nació el 2 de noviembre de 1815 en la ciudad industrial de Lincoln, Inglaterra.[203] Su padre, John Boole, zapatero en Lincoln, mostraba un gran interés por la matemática, y era un hábil artesano constructor de instrumentos ópticos. La madre de Boole, Mary Ann Joyce, era doncella de una dama de la sociedad. Con la atención del padre distraída de su oficio, el estado económico de la familia no era muy boyante. George asistió a una escuela infantil hasta los siete años de edad y, a continuación, a una escuela primaria, en donde tuvo como maestro a un tal John Walter Reeves. De niño, Boole estaba especialmente interesado por el latín, que un librero le enseñó, y por el griego, que aprendió por sí mismo.

Figura 47

A los catorce años de edad se las arregló para traducir un poema del poeta griego del siglo I a.C. Meleagro. El padre de George, lleno de orgullo, publicó la traducción en el *Herald* de Lincoln, lo que hizo que un maestro local publicase un artículo expresando su incredulidad. La pobreza obligó a George Boole a empezar a trabajar de profesor ayudante a la edad de dieciséis años. Durante los años posteriores, Boole dedicó su tiempo libre al estudio del francés, el italiano y el alemán. El conocimiento de estos idiomas modernos le fue muy útil, ya que le permitió dedicar su atención a las grandes obras de matemáticos como Lacroix, Laplace, Lagrange, Jacobi y otros. Sin embargo, Boole seguía sin poder recibir una formación matemática regular, de modo que continuó sus estudios en solitario mientras trabajaba de maestro para contribuir al sostén de sus padres y hermanos. Pero el talento matemático de este autodidacta empezaba a manifestarse, y empezó a publicar en el *Cambridge Mathematical Journal.*

En 1842, Boole inició una correspondencia regular con De Morgan, a quien le enviaba sus artículos matemáticos para que éste los comentase. Su creciente reputación como matemático original y el apoyo de una recomendación de De Morgan hicieron que Boole recibiese la oferta de ocupar el puesto de profesor de matemática en el Queen's College, en Cork, Irlanda, en 1849, en donde enseñó durante el resto de su vida. En 1855, Boole se casó con Mary Everest (cuyo tío, el explorador George Everest, dio nombre a la montaña), diecisiete años más joven que él, y la pareja tuvo cinco hijas. Boole murió prematuramente a los cuarenta y nueve años de edad. Un frío día de invierno de 1854, Boole llegó empapado al colegio, pero insistió en dar sus clases con la ropa mojada. Al llegar a su casa, su mujer contribuyó a empeorar su estado al mojar la cama con cubos de agua, siguiendo una superstición según la cual la cura debe, en cierto modo, replicar la causa de la enfermedad. Boole contrajo una neumonía y murió el 8 de diciembre de 1864. Bertrand Russell no ocultaba su admiración por esta persona de formación autodidacta: «La matemática pura fue descubierta por Boole, en su obra titulada *Las leyes del pensamiento* (1854) […] En realidad, su libro trataba de lógica formal, que es lo mismo que decir matemática». Sorprendentemente, tanto Mary Boole (1832-1916) como las cinco hijas del matrimonio alcanzaron una fama considerable en distintos campos, desde la educación a la química.

Boole publicó *El análisis matemático de la lógica*[204] en 1847 y *Las leyes del pensamiento* en 1854 (el título completo era *Una investigación de las leyes del pensamiento en las que se basan las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades).* Se trataba de verdaderas obras maestras, el primer paso decisivo para poner de manifiesto el paralelismo entre las operaciones aritméticas y las lógicas. Literalmente, Boole transformó la lógica en un tipo de álgebra (a la que se llamaría álgebra de Boole) y extendió el análisis de la lógica incluso al razonamiento probabilístico. En palabras del propio Boole:

> El propósito de este tratado *[Las leyes del pensamiento]* es investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente mediante las que se lleva a cabo el razonamiento, expresarlas en el lenguaje simbólico del Cálculo y, sobre estos cimientos, establecer la ciencia de la Lógica y construir su método; hacer de este método la base de un método general para la aplicación de la doctrina matemática de las Probabilidades y, finalmente, cosechar de los diversos elementos de verdad que estas investigaciones saquen a la luz algunos indicios probables acerca de la naturaleza y la constitución de la mente humana. [205]

El cálculo de Boole se podía interpretar como aplicado a las relaciones entre clases (conjuntos de objetos o miembros) o dentro de la lógica de proposiciones. Por ejemplo, si *x* e *y* fuesen clases, una relación como *x* = *y* significaría que dos clases tienen exactamente los mismos miembros, aunque las definiciones de ambas fuesen distintas. Tomemos el caso de un colegio en el que todos los niños miden menos de dos metros; entonces, las dos clases definidas como: *x* = «todos los niños del colegio» e *y* = «todos los niños del colegio que miden menos de dos metros» son iguales. Si *x* e *y* representasen proposiciones, entonces *x* = *y* significaría que ambas proposiciones son equivalentes (que una es verdadera si, y sólo si, la otra también lo es). Por ejemplo, las proposiciones: *x* = «John Barrymore era hermano de Ethel Barrymore» e *y* = «Ethel Barrymore era hermana de John Barrymore» son iguales. El símbolo *«x • y»* representaba la parte común de las dos clases *x* e *y* (los miembros que pertenecen tanto a *x* como a *y)* o la conjunción de las proposiciones *x*e *y* (esto es, «*x* e *y»).* Por ejemplo, si *x* fuese la clase de todos los tontos del pueblo e *y* fuese la clase de todas las cosas con pelo negro, entonces *x* • *y* sería la clase de todos los tontos del pueblo con el pelo negro. Para las proposiciones *x* e *y*, la conjunción *x* - *y (se* puede también utilizar la palabra «y») significa que ambas proposiciones deben ser ciertas. Por ejemplo, cuando la Dirección General de Tráfico dice que «debes pasar una prueba de visión periférica y un examen de conducción», significa que ambos requisitos deben cumplirse. Para Boole, el símbolo *«x + y»* representaba (para dos clases sin miembros comunes) la clase que constaba de los miembros de *x* y de los miembros de *y*. En el caso de proposiciones, *«x + y»* correspondía a «o *x* o *y*, pero no ambas». Por ejemplo, si *x* es la proposición «las clavijas son cuadradas» e *y* es «las clavijas son redondas», entonces *x* + *y* es «las clavijas son o cuadradas o redondas». De forma similar, *«x — y»* representaba la clase de los miembros de *x* que no eran miembros de *y, o* la proposición *«x* pero no *y».* Boole denotaba la clase universal (que contenía todos los miembros posibles de los que se estaba hablando) como 1, y la clase vacía o nula (que no contenía ningún miembro) como 0. Obsérvese que la clase nula (o conjunto nulo) no es en absoluto lo mismo que el número cero; este último es simplemente el número de miembros de la clase nula. Obsérvese también que la clase nula no es lo mismo que nada, porque una clase que no contiene nada sigue siendo una clase. Por ejemplo, si todos los periódicos de Albania están escritos en albanés, la clase de todos los periódicos de Albania escritos en albanés se denotaría con 1 en la notación de Boole, mientras que la clase de todos los periódicos de Albania escritos en español se denotaría con 0. En el caso de proposiciones, 1 representa la proposición verdadera estándar (por ejemplo, los humanos son mortales) y 0, la proposición falsa estándar (por ejemplo, los humanos son inmortales), respectivamente.

Utilizando estas convenciones, Boole formuló un conjunto de «axiomas» que definían el álgebra de la lógica. Por ejemplo, se puede comprobar que, utilizando las definiciones anteriores, la proposición obviamente cierta «todo es o xo no *x*» se podría escribir así en el álgebra de Boole: $x+ (1 - x) = 1$, que es también cierto en el álgebra ordinaria. De forma similar, la afirmación de que la parte común entre cualquier clase y la clase vacía es la clase vacía se representaba mediante $0 \bullet x = 0$, que significaba también que la conjunción de cualquier proposición con una falsa es falsa. Por ejemplo, la proposición «el azúcar es dulce y los humanos son inmortales» genera una proposición falsa, a pesar de que la primera parte es verdadera. Obsérvese de nuevo que esta «igualdad» en el álgebra de Boole sigue siendo cierta con números algebraicos normales.

Para demostrar la potencia de sus métodos, Boole intentó utilizar sus símbolos lógicos en cualquier asunto que considerase importante. Sin ir más lejos, analizó incluso los argumentos de los filósofos Samuel Clarke y Baruch Spinoza sobre la existencia y atributos de Dios. Sin embargo, su conclusión fue bastante pesimista: «Opino que no es posible examinar los argumentos de Clarke y Spinoza sin llegar a la profunda convicción de la futilidad de todo empeño de establecer, completamente a priori, la existencia de un Ser Infinito, Sus atributos y Su relación con el Universo». A pesar de la sensatez de la conclusión de Boole,[206] al parecer no todas las personas quedaron convencidas de la futilidad de estos empeños, pues a día de hoy aún siguen emergiendo versiones actualizadas de los argumentos ontológicos para la existencia de Dios.

Boole fue capaz de domar matemáticamente los conectores lógicos *y*, o, *si… entonces* y *no*, que actualmente se encuentran en el corazón de las operaciones que realizan los ordenadores y diversos circuitos de conmutación. Por tanto, muchos le consideran uno de los «profetas» que dieron paso a la era digital. Sin embargo, debido a su naturaleza pionera, el álgebra de Boole tenía sus limitaciones. En primer lugar, los escritos de Boole son algo ambiguos y de difícil comprensión debido a que la notación utilizada se parecía demasiado a la del álgebra ordinaria. En segundo lugar, Boole confundió la distinción entre proposiciones (por ejemplo, Aristóteles es mortal), funciones proposicionales o predicados (por ejemplo, x es mortal) y afirmaciones cuantificadas (por ejemplo, para todo x, x es mortal). Finalmente, Frege y Russell afirmaron más adelante que el álgebra deriva de la lógica, de modo que se podría decir que tenía más sentido construir el álgebra sobre la base de la lógica que el proceso contrario.

Sin embargo, otro de los aspectos del trabajo de Boole estaba a punto de dar abundante fruto. Se trataba de la comprensión de la proximidad entre la lógica y los conceptos de clases y conjuntos. Recordemos que el álgebra de Boole funcionaba tanto para clases como para proposiciones lógicas. En efecto, si todos los miembros de un conjunto X son también miembros de Y (X es un subconjunto de Y), esto se puede expresar con una *implicación* lógica de la forma «Si X entonces Y». Por ejemplo, el hecho de que el conjunto de todos los caballos sea un subconjunto del conjunto de todos los cuadrúpedos se puede reescribir en forma de proposición lógica: «Si *x* es un caballo entonces es un cuadrúpedo».

El álgebra lógica de Boole fue ampliada y mejorada posteriormente por diversos investigadores, pero la persona que sacó el máximo provecho de la similitud entre los conjuntos y la lógica y elevó el concepto a otro nivel fue Gottlob Frege (1848-1925; figura 48).

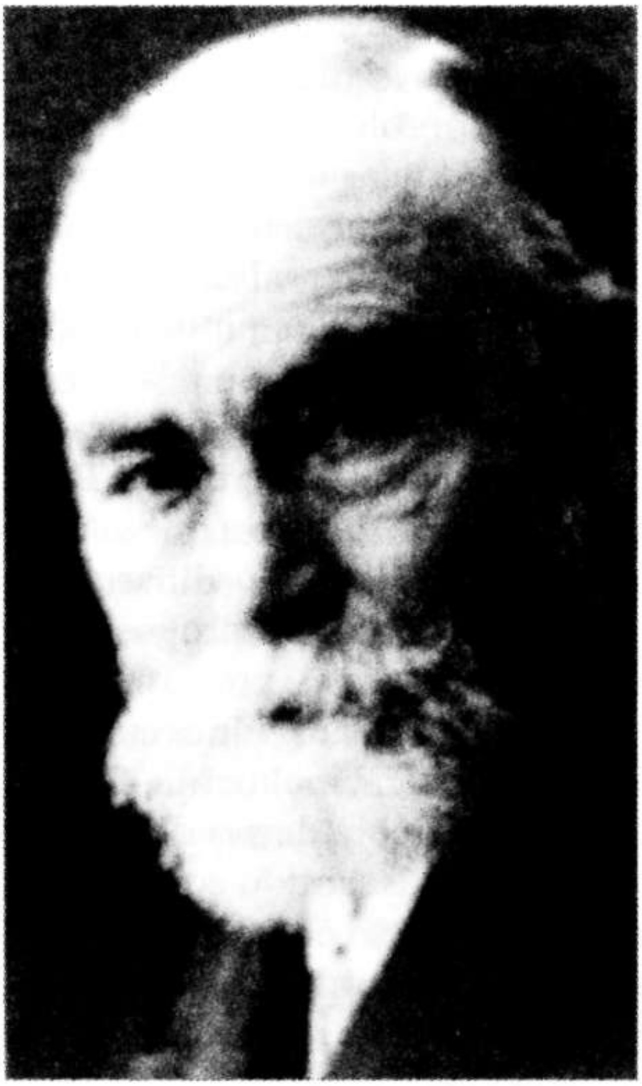


FIGURA 48

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nació en Wismar, Alemania, en donde su padre y su madre dirigieron, en distintos momentos, una escuela secundaria femenina. Frege estudió matemáticas, física, química y filosofía, primero en la Universidad de Jena y luego, durante dos años más, en la Universidad de Göttingen.

Tras completar su formación empezó a dar clases en Jena en 1874, en donde estuvo enseñando matemáticas durante toda su carrera profesional. Aunque su trabajo de profesor le dejaba poco tiempo libre, Frege se las arregló para publicar su primera obra revolucionaria sobre lógica en 1879.[207] Se titulaba *Escritura conceptual: un* *lenguaje formal para el pensamiento puro modelado según el de la aritmética* (se suele conocer como el *Begriffsschrift).* En esta obra, Frege desarrollaba un original lenguaje lógico que posteriormente ampliaría en los dos volúmenes de su tratado *Grundgesetze der Arithmetic* (*Leyes básicas de la aritmética*).[208] Lo que Frege tenía planeado en el campo de la lógica era, por un lado, muy específico, pero además extraordinariamente ambicioso. Aunque prestaba atención principalmente a la aritmética, su intención era demostrar que incluso conceptos tan habituales como los números naturales (1, 2, 3…) se podían reducir a construcciones lógicas. Así, Frege creía que *todas las verdades de la aritmética podían demostrarse a partir de unos pocos axiomas de la lógica.* En otras palabras, según Frege, incluso las proposiciones como 1 + 1 = 2 no eran verdades *empíricas,* basadas en la observación, sino que podían derivarse de un conjunto de axiomas lógicos. La influencia del *Begriffsschrift* de Frege ha sido tan notable que el lógico contemporáneo Willard von Orman Quine (1908-2000) escribió: «La lógica es una disciplina antigua y, desde 1879, una disciplina magnífica».

Una idea esencial en la filosofía de Frege era la aseveración de que la verdad es independiente del juicio humano. En sus *Leyes básicas de la aritmética* escribe: «Ser verdadero es distinto de ser tomado por verdadero, ya sea por una persona, muchas o todas, y en ningún caso puede reducirse a ello. No existe contradicción en el hecho de que algo sea verdadero y que todos opinen que es falso. Según yo lo entiendo, las leyes de la lógica no son leyes acerca de creer que algo es verdad, sino leyes de la verdad … Estas [leyes] actúan como fronteras establecidas sobre cimientos eternos que nuestro pensamiento puede sobrepasar, pero en ningún caso desplazar».

Los axiomas lógicos de Frege[209] suelen ser de la forma «para todo… si… entonces». Por ejemplo, uno de sus axiomas dice «para todo *p,* si no (no *p)* entonces *p*», lo que básicamente establece que, si una proposición contradictoria con la que se está discutiendo es falsa, entonces esta última es cierta. Por ejemplo, si no es cierto que no tienes que detener tu coche en una señal de *stop,* entonces con total seguridad debes detenerte en una señal de *stop.* Para desarrollar un «lenguaje» lógico, Frege complementó su conjunto de axiomas con un nuevo e importante aspecto. Sustituyó el estilo tradicional de sujeto/predicado de la lógica clásica por conceptos prestados de la teoría matemática de funciones. Lo explicaré brevemente: en matemática, expresiones como: $f(x) = 3x + 1$ significan que f es una función del argumento x y que el valor de la función se puede obtener multiplicando el argumento por tres y sumando uno. Frege definió lo que el denominaba *conceptos* como funciones. Por ejemplo, supongamos que queremos comentar el concepto «comer carne». Este concepto se podría denotar simbólicamente mediante una función «$F(x)$», y el valor de esta función sería *Verdadero* si x= León y *Falso* si x=Ciervo. De forma similar, en el caso de los números, el concepto (función) «ser menor que 7» asociaría a *Falso* todos los números mayores o iguales que 7 y a *Verdadero* todos los menores que 7. Frege se refería a los objetos para los que un cierto concepto daba el valor *Verdadero* como objetos que «cumplían» ese concepto.

Como ya he mencionado, Frege estaba convencido de que todas las proposiciones relativas a los números naturales eran cognocibles y derivables únicamente a partir de definiciones y leyes lógicas. En consecuencia, inició su exposición acerca de los números naturales sin exigir ninguna comprensión previa del concepto de «número». Por ejemplo, en el lenguaje lógico de Frege, dos conceptos son *equinuméricos* (en palabras llanas, tienen asociado el mismo número) si hay una correspondencia uno a uno entre los objetos que «cumplen» un concepto y los que cumplen el otro. Es decir, las tapas de cubos de basura son equinuméricas con los propios cubos de basura (si todos ellos tienen tapa), y esta definición no requiere de la definición de «número». Frege introdujo entonces una ingeniosa definición lógica del número cero. Imaginemos un concepto *F* definido como «no idéntico a sí mismo». Puesto que todos los objetos deben ser idénticos a sí mismos, ningún objeto cumple *F.* En otras palabras, para todos los objetos *x, F(x)* = Falso. Frege definió el número común cero como el «número del concepto *F*», y a continuación definió todos los números naturales en términos de unas entidades a las que denominó *extensiones*.[210] La extensión de un concepto era la *clase* de todos los objetos que cumplían ese concepto. Aunque esta definición puede ser algo difícil de comprender para alguien que no sea lógico, en realidad es bastante simple. Por ejemplo, la extensión del concepto «mujer» era la *clase* de todas las mujeres. Es necesario remarcar que la extensión de «mujer» no es una mujer.

Quizá se pregunte cómo puede esta definición lógica abstracta ayudar a definir algo como, digamos, el número 4. Según Frege, el número 4 era la extensión (o clase) de todos los conceptos que cumplen cuatro objetos. Así, el concepto «ser una pierna de un perro determinado de nombre Snoopy» pertenece a esa clase (y, por consiguiente, al número 4), igual que el concepto «ser abuelo o abuela de Gottlob Frege».

El proyecto de Frege era realmente impresionante, pero sufría de algunos graves inconvenientes. Por un lado, la idea de emplear conceptos (los bloques básicos de construcción del pensamiento) para crear la aritmética era una genialidad. Por otro, Frege omitió algunas incoherencias esenciales en su formalismo. Uno de sus axiomas en particular (el conocido como «Ley básica V») conducía a una contradicción, por lo que fallaba por su base.

El texto de la ley tenía aspecto inocente: afirmaba que la extensión de un concepto *F* es idéntica a la extensión del concepto *G* si, y sólo si, los mismos objetos cumplen *F* y *G*. Pero el 16 de junio de 1902, Bertrand Russell (figura 49) dejó caer la bomba en una carta a Frege en la que señalaba una cierta paradoja que demostraba la incoherencia de la Ley básica V. Por una broma del destino, la carta de Russell llegó justo cuando el segundo volumen de las *Leyes básicas de la aritmética* de Frege iba camino de la imprenta. Frege, horrorizado, se apresuró a agregar al manuscrito la siguiente sincera admisión: «Apenas hay algo más desagradable para un científico que notar cómo los cimientos de su trabajo se resquebrajan justo después de concluirlo. Una carta de Mr. Bertrand Russell me ha colocado en esa posición cuando este trabajo ya estaba casi impreso». Frege dedicó estas elegantes palabras a Russell: «Su descubrimiento de la contradicción me provocó una inmensa sorpresa y casi diría consternación, ya que hizo temblar la base sobre la que pretendía construir la aritmética».

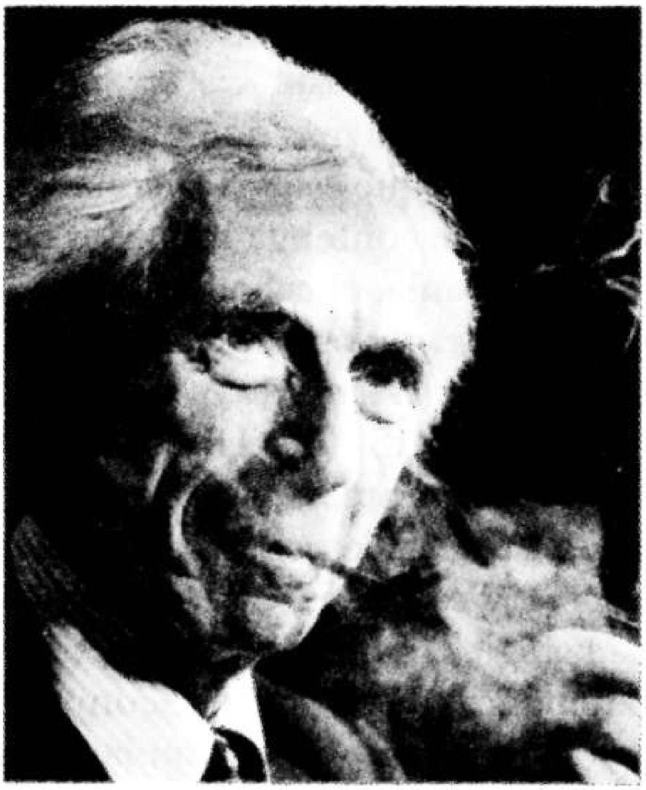


FIGURA 49

El hecho de que una paradoja pudiese tener este devastador efecto sobre todo un proyecto puede resultar sorprendente a primera vista, pero, en palabras del lógico de la Universidad de Harvard W. V. O. Quine: «En más de una ocasión en la historia el descubrimiento de una paradoja ha forzado una reconstrucción esencial de las bases del pensamiento». La paradoja de Russell representó precisamente una de tales ocasiones.

La paradoja de Russell

Una *clase* o *conjunto* no es más que una colección de objetos. Estos objetos no tienen por qué estar relacionados entre sí. Se puede hablar de una clase que contenga todos los elementos siguientes: los periódicos de Albania, el caballo blanco de Napoleón y el concepto de amor verdadero. Los elementos que pertenecen a una cierta clase se denominan *miembros* de esa clase. El matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) fue el fundador, prácticamente en solitario, de la teoría de conjuntos. Los conjuntos —o clases— se revelaron enseguida como objetos fundamentales, y tan irrevocablemente ligados a la lógica que cualquier intento para construir la matemática sobre la lógica implicaba de forma necesaria construir sobre las bases axiomáticas de la teoría de conjuntos.

La mayoría de las ases de objetos con las que uno se tropieza no son miembros de sí mismas. Por ejemplo, la clase de todos los copos de nieve no es un copo de nieve, la clase de todos los relojes de pulsera antiguos no es un reloj de pulsera antiguo, etc. Pero algunas clases sí son miembros de sí mismas. Por ejemplo, la clase de «todo aquello que no es un reloj de pulsera antiguo» es miembro de sí misma, ya que está claro que esta clase no es un reloj antiguo. De forma similar, la clase de todas las clases es miembro de sí misma, ya que, obviamente, es una clase. Pero ¿y la clase de «todas las clases que no son miembros de sí mismas»?[211] Vamos a llamar *R* a esa clase. ¿Es *R* miembro de sí misma (de *R)* o no lo es? Está claro que *R* no pertenece a *R* porque, si perteneciese, violaría la definición de pertenencia a *R*. Pero, si *R* no pertenece a sí misma, entonces, según la definición, debe ser miembro de *R*. De forma parecida a lo que sucedía con el barbero del pueblo, aquí tenemos una clase *R* que pertenece y no pertenece a *R*, lo que es una contradicción lógica. Esta es la paradoja que Russell envió a Frege. Esta antinomia minaba por completo el proceso de determinación de las clases o conjuntos, y asestó un golpe mortal al proyecto de Frege. Frege hizo algunos intentos desesperados de reparar su sistema de axiomas, pero fueron infructuosos. La conclusión tenía todo el aspecto de ser desastrosa: en lugar de ser más sólida que la matemática, la lógica era, al parecer, más vulnerable a las incoherencias paralizantes.

En el mismo período en que Frege desarrollaba su proyecto de lógica, el matemático y lógico italiano Giuseppe Peano probaba una estrategia ciertamente distinta. La intención de Peano era

construir la aritmética sobre una base axiomática. En consecuencia, su punto de partida era la formulación de un conjunto de axiomas simple y conciso. Los tres primeros axiomas, por ejemplo, decían:

(i) 0 es un número.

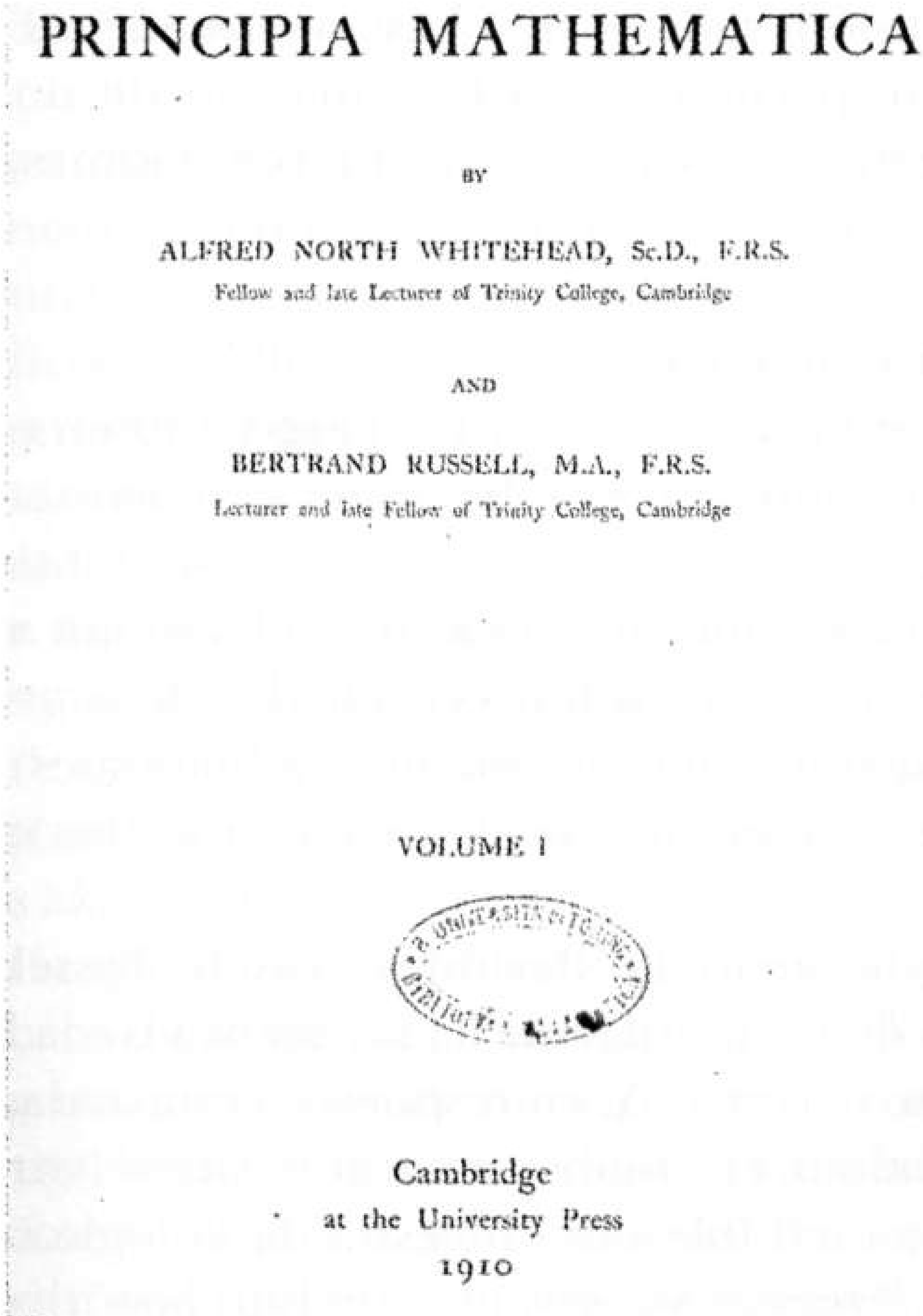
(ii) El sucesor de cualquier número también es un número.

(iii) Dos números no pueden tener el mismo sucesor.

El problema es que, mientras que el sistema axiomático de Peano podía reproducir las leyes conocidas de la aritmética (después de introducir algunas definiciones adicionales), no contenía nada que permitiese identificar de forma única los números naturales.

El paso siguiente lo dio Bertrand Russell. Russell sostenía que la idea original de Frege (derivar la aritmética de la lógica) seguía siendo el camino correcto. Y, en respuesta a esta audaz toma de postura, Russell produjo, en colaboración con Alfred North Whitehead (figura 50), una increíble obra maestra de la lógica: el tratado en tres volúmenes *Principia Mathematica*, un hito histórico.[212] Con la posible excepción del *Organon* de Aristóteles, se trata probablemente de la obra más influyente de la historia de la lógica (en la figura 51 se muestra la portada de la primera edición).

FIGURA 50


PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

FIGURA 51

En los *Principia*, Russell y Whitehead defendían la postura de que la matemática era, básicamente, una elaboración de las leyes de la lógica, y que no existía una clara frontera entre ambas.[213] Sin embargo, para llegar a una descripción consistente consigo misma, aún debían controlar las antinomias o paradojas (además de la paradoja de Russell se habían descubierto otras). Para ello era necesario realizar algunos malabarismos lógicos de envergadura. Russell argumentaba que el origen de estas paradojas se reducía a un «círculo vicioso» en el que se definían entidades en términos de una clase de objetos que *contenía la entidad definida*. En palabras de Russell: «Si digo "Napoleón poseía las cualidades que definen a un gran general", deberé definir "cualidades" de modo que no incluya lo que estoy diciendo; es decir, "tener las cualidades que definen a un gran general" no debe ser una cualidad en el sentido que suponemos».

Con el fin de evitar la paradoja, Russell propuso una *teoría de tipos* en la que una clase (o conjunto) pertenece a un tipo lógico superior que aquel al que pertenecen sus miembros.[214] Por ejemplo, todos los jugadores individuales del equipo de fútbol Dallas Cowboys serían del tipo 0. El propio equipo Dallas Cowboys, que es una clase de jugadores, sería del tipo 1. La National Football League, que es una clase de equipos, sería del tipo 2; una colección de ligas (si existiese) sería del tipo 3, etc. En este esquema, la simple noción de «una clase que es miembro de sí misma» no es verdadera ni falsa, sino que simplemente no tiene sentido. En consecuencia, las paradojas del tipo de la de Russell no se dan jamás.

No cabe duda de que los *Principia* significan una proeza colosal en el campo de la lógica, pero no se les puede considerar los cimientos de la matemática buscados durante tanto tiempo. Para muchos, la teoría de tipos de Russell es una solución bastante artificiosa del problema de las paradojas que, además, genera ramificaciones de una inquietante complejidad.[215] Por ejemplo, los números racionales (es decir, las fracciones simples) resultan ser de un tipo superior que los números naturales. Para evitar en parte estas complicaciones, Russell y Whitehead introdujeron un axioma adicional, denominado *axioma de reducibilidad*, que por sí mismo generó una cierta controversia y desconfianza.

Los matemáticos Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel sugirieron posteriormente métodos más elegantes para librarse de las paradojas. De hecho, consiguieron axiomatizar de forma consistente la teoría de conjuntos y reproducir la mayor parte de los resultados de la teoría. Esto parecía satisfacer, al menos parcialmente, el sueño de los platónicos. Si la teoría de conjuntos y la lógica eran, en realidad, dos caras de una misma moneda, una base sólida para la teoría de conjuntos implicaba una base sólida para la lógica. Además, si era cierto que la mayoría de la matemática surgía de la lógica, esto concedía a la matemática una especie de certidumbre objetiva. Por desgracia, los platónicos tuvieron que suspender pronto sus celebraciones, poique estaban a punto de sufrir un grave caso de *déjà vu*.

¿OTRA VEZ LA CRISIS NO EUCLIDIANA?

En 1908, el matemático alemán Ernst Zermelo[216] (1871-1953) siguió un camino similar al que Euclides había abierto alrededor del año 300 a.C. Euclides formuló algunos postulados no demostrados pero, supuestamente, evidentes por sí mismos, acerca de puntos y líneas, y construyó la geometría basándose en esos axiomas. Zermelo, que había descubierto la paradoja de Russell por su cuenta nada menos que en 1900, propuso una forma de construir la teoría de conjuntos sobre una base axiomática similar. Su teoría sorteaba la paradoja de Russell mediante una cuidadosa elección de principios de construcción que evitaban ideas contradictorias como «el conjunto de todos los conjuntos». El esquema de Zermelo fue posteriormente ampliado por el matemático israelí Abraham Fraenkel[217] (1891-1965) para constituir lo que ahora se denomina la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (John von Neumann agregó algunos otros cambios importantes en 1925). Todo habría sido casi perfecto (aún tenía que demostrarse la consistencia) si no hubiese sido por algunas molestas sospechas. Había un axioma (el *axioma de elección)* que, igual que el famoso «quinto» de Euclides estaba causando a los matemáticos un verdadero dolor de cabeza. En palabras simples, el axioma de elección dice: «Si *X* es una colección de conjuntos no vacíos, podemos elegir un miembro de cada uno de los conjuntos de *X* para formar un nuevo conjunto, *Y*».[218] Esta afirmación es obviamente cierta si la colección *X* no es infinita. Si tenemos 100 cajas y cada una de ellas contiene al menos una canica, podemos elegir sin problemas una canica de cada caja para formar un conjunto *Y* que contenga 100 canicas. En un caso como éste no necesitamos ningún axioma especial: podemos *demostrar* que esta elección es posible. La afirmación es cierta incluso para colecciones *X* infinitas, siempre que podamos *especificar con precisión* cómo efectuamos la elección. Imaginemos, por ejemplo, una colección infinita de conjuntos no vacíos de números naturales. Los miembros de esta colección pueden ser conjuntos como {2, 6, 7}, {1, 0}, (346, 5, 11, 1.257}, {todos los números naturales entre 381 y 10.457}, etc. Sin embargo, la cuestión es que en todo conjunto de números naturales siempre hay un miembro que es el menor. Nuestra elección podría, pues, describirse de forma única así: «De cada conjunto elegimos el elemento menor.» En tal caso podemos de nuevo evitar la necesidad del axioma de elección. El problema se plantea, en colecciones infinitas, en los casos en los que no podemos realmente caracterizar la elección. En tales circunstancias, el proceso de elección simplemente no se acaba nunca, y la existencia de un conjunto que consta exactamente de un elemento de cada uno de los miembros de la colección *X* se convierte en una cuestión de fe.

Desde su creación, el axioma de elección ha generado una notable controversia entre los matemáticos. El hecho de que el axioma asevere la existencia de determinado objeto matemático (esto es, la elección) sin ofrecer ningún ejemplo tangible de ese objeto ha atraído críticas feroces, especialmente de los adeptos a la escuela de pensamiento denominada *constructivismo* (relacionada filosóficamente con el intuicionismo). Los constructivistas sostenían que cualquier cosa que existe debe ser explícitamente consumible. Otros matemáticos tendían también a evitar el axioma de elección y utilizar sólo el resto de los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel.

Debido a los aparentes problemas del axioma de elección, los matemáticos empezaron a preguntarse si éste se podría demostrar o refutar utilizando los demás axiomas. La historia del quinto axioma de Euclides se estaba, literalmente, repitiendo. A finales de los años treinta se ofreció una solución parcial. Kurt Gödel (1906-1978), uno de los lógicos más influyentes de la historia, demostró que el axioma de elección y otra famosa conjetura formulada por Cantor, denominada *hipótesis del continuo*, [219] eran consistentes con los demás axiomas de Zermelo-Fraenkel. Es decir, ninguna de las dos hipótesis podía refutarse mediante los otros axiomas estándar de la teoría de conjuntos. El matemático americano Paul Cohen[220] (1934-2007) —que por desgracia falleció mientras yo escribía este libro— presentó pruebas adicionales en 1963 que establecían la completa *independencia* del axioma de elección y de la hipótesis del continuo. En otras palabras, el axioma de elección *no podía ser demostrado ni refutado* a partir del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos. De forma similar, la hipótesis del continuo no podía ser demostrada ni refutada a partir del mismo grupo de axiomas, aunque se incluyese el axioma de elección.

Este resultado tuvo espectaculares consecuencias en filosofía. Como en el caso de las geometrías no euclidianas, en el siglo XIX no había una única teoría de conjuntos definitiva ¡sino cuatro, al menos! Se podían plantear hipótesis distintas sobre los conjuntos infinitos y acabar con teorías de conjuntos mutuamente excluyentes. Por ejemplo, se podía suponer que el axioma de elección y la hipótesis del continuo se cumplían —y se obtenía una versión o bien suponer que ninguno de los dos se cumplía —y se llegaba a una teoría totalmente diferente—. También se llegaba a dos teorías de conjuntos distintas si se asumía la validez de uno de los axiomas y se negaba la del otro.

De nuevo hacía su aparición una crisis como la de las geometrías no euclidianas, pero aún peor. Debido al papel fundamental de la teoría de conjuntos como posible base para la totalidad de la matemática, el problema para los platónicos era mucho más grave. Si, en efecto, se podían formular varias teorías de conjuntos con sólo elegir una colección de axiomas diferente, ¿no daba eso fuerza a la tesis de que la matemática no era más que una invención humana? La victoria de los formalistas parecía prácticamente segura.

Una verdad incompleta

Mientras que a Frege le preocupaba sobre todo el *significado* de los axiomas, al principal promotor del formalismo, el gran matemático alemán David Hilbert (1862-1943; figura 52) propugnaba evitar por completo cualquier interpretación de las fórmulas matemáticas.

FIGURA 52

Hilbert no tenía interés alguno en cuestiones como si la matemática podía derivarse de las nociones de la lógica. Para él, la matemática consistía en realidad en un conjunto de fórmulas sin sentido, modelos estructurados compuestos de símbolos arbitrarios.[221] Hilbert asignó la tarea de garantizar la solidez de los *cimientos* de la matemática a una nueva disciplina a la que denominó «metamatemática». Esto es, la metamatemática trataba del uso de los propios métodos del análisis matemático para demostrar la consistencia de todo el proceso formal de derivación de teoremas a partir de axiomas mediante estrictas reglas de inferencia. Dicho de otro modo, Hilbert opinaba que podía demostrar matemáticamente que la matemática funcionaba. Según sus propias palabras:

> La meta de mis investigaciones sobre los nuevos fundamentos de la matemática es la siguiente: eliminar de una vez por todas la duda general acerca de la fiabilidad de la inferencia matemática … Todo aquello que constituía la matemática será formalizado con el máximo rigor de modo que la matemática propiamente dicha o en sentido estricto se convierta en un conjunto de fórmulas … Aparte de la formalización de la matemática propiamente dicha, existe una matemática que es, hasta cierto punto, nueva: una metamatemática necesaria para salvaguardar la matemática y en la cual (a diferencia de los

> modos puramente formales de inferencia en la matemática propiamente dicha) se aplica la inferencia contextual, pero únicamente para demostrar la consistencia de los axiomas … Así, el desarrollo de la ciencia matemática en su conjunto tiene lugar de dos formas que se alternan constantemente: por un lado, derivamos fórmulas demostrables a partir de los axiomas mediante inferencia formal; por otro, incorporamos nuevos axiomas y demostramos su consistencia por inferencia contextual.[222]

El plan de Hilbert sacrificaba el significado para aumentar la seguridad de los fundamentos. En consecuencia, para sus seguidores formalistas, la matemática no era más que un juego, pero su finalidad era demostrar rigurosamente que se trataba de un juego totalmente consistente.[223] Con todos los avances en axiomatización, la realidad del sueño formalista de la «teoría de la demostración» parecía estar al alcance de la mano.

Sin embargo, no todos tenían fe en que el camino tomado por Hilbert fuese el correcto. Ludwig Wittgenstein (1889-1951), considerado por algunos como el filósofo más notable del siglo XX,[224] creía que los esfuerzos de Hilbert y su metamatemática eran, en cierto sentido, una pérdida de tiempo. «No podemos establecer una norma para la aplicación de otra norma», alegaba. En otras palabras, Wittgenstein no creía que la comprensión de un «juego» pudiese depender de la construcción de otro: «Si estoy confuso acerca de la naturaleza de la matemática, ninguna demostración puede ayudarme».[225] No obstante, nadie se esperaba el mazazo que estaba a punto de caer. De un solo golpe, Gödel, que por entonces contaba sólo veinticuatro años, atravesó con una estaca el corazón del formalismo. Kurt Gödel (figura 53) nació el 28 de abril de 1906 en la ciudad de Moravia que más tarde se conocería con el nombre checo de Brno.[226]

FIGURA 53

En aquel tiempo la ciudad formaba parte del Imperio Austrohúngaro, y Gödel creció en una familia de habla alemana. Su padre, Rudolf Gödel, dirigía una fábrica textil, y su madre, Marianne Gödel, cuidaba de que el joven Kurt recibiese una amplia educación en matemática, historia, idiomas y religión. Durante su adolescencia, Gödel desarrolló interés por la matemática y la filosofía y a los dieciocho años ingresó en la Universidad de Viena, en donde centró principalmente su atención en la lógica matemática. Quedó especialmente fascinado por los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead y por el proyecto de Hilbert, y el tema que eligió para su tesis fue el problema de la completitud. La finalidad básica de esta investigación era determinar si el enfoque formal de Hilbert bastaba para generar todos los enunciados verdaderos de la matemática. Gödel recibió su doctorado en 1930 y un año más tarde publicó sus *teoremas de incompletitud*, que causaron un terremoto en el mundo de la matemática y en el de la filosofía.[227]

Los dos teoremas, enunciados en un lenguaje estrictamente matemático, sonaban bastante técnicos y no demasiado emocionantes:

1. Cualquier formalización consistente S en la que se puedan efectuar operaciones aritméticas elementales, es incompleta respecto de los enunciados de la aritmética elemental; esto es, hay enunciados cuya verdad o falsedad no se puede demostrar dentro de S.
2. Para cualquier formalización consistente S en la que se puedan efectuar

operaciones aritméticas elementales, no es posible probar la consistencia de S dentro de S.

Aunque las palabras parecen inofensivas, las implicaciones para el proyecto de los formalistas llegaban lejos. Dicho de una forma algo simplificada, los teoremas de incompletitud demostraban que el plan formalista de Hilbert estaba esencialmente condenado al fracaso desde el principio. Gödel demostró que cualquier sistema formal lo bastante potente como para tener algún interés es, de forma inherente, o bien *incompleto* o bien *inconsistente*. Es decir, en el mejor de los casos, siempre habrá enunciados dentro del sistema formal cuya verdad o falsedad no podrán demostrarse. En el peor de los casos, el sistema generará contradicciones. Como, para cualquier enunciado T, T o no T tiene que ser verdadero, el hecho de que un sistema formal finito no pueda demostrar la verdad o falsedad de ciertos enunciados significa que siempre existirán enunciados *verdaderos* que no serán demostrables dentro del sistema. En otras palabras, Gödel demostró que ninguna formalización compuesta por un número finito de axiomas y reglas de inferencia puede abarcar *nunca* todas las verdades de la matemática. A lo más que se puede aspirar es a que las axiomatizaciones más aceptadas sean simplemente incompletas y no inconsistentes.

El propio Gödel creía en la existencia de una noción platónica independiente de verdad matemática. En un artículo publicado en 1947 escribía lo siguiente:

> Pero, a pesar de estar tan apartados de la experiencia de los sentidos, sí tenemos una especie de percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede deducir del hecho de que los axiomas nos parezcan forzosamente verdaderos. No veo motivo alguno para que debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción de los sentidos.[228]

Por una ironía del destino, cuando los formalistas ya se preparaban para cantar victoria, apareció Kurt Gödel (platónico declarado) y hundió la fiesta del proyecto formalista.

El famoso matemático John von Neumann (1903-1957), que en aquella época impartía en sus clases la obra de Hilbert, canceló el resto del curso para dedicar el tiempo que quedaba a los hallazgos de Gödel.

Como persona, Gödel era tan complejo como sus teoremas.[229] En 1940 huyó con su esposa Adele de la Austria nazi para ocupar un puesto en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, New Jersey. Allí trabó una estrecha amistad con Albert Einstein, a quien solía acompañar en sus paseos. Cuando Gödel solicitó la nacionalización como ciudadano americano en 1948, fueron Einstein y el matemático y economista de la Universidad de Princeton Oskar Morgenstern (1902-1977) quienes le acompañaron a la oficina del Servicio de Inmigración y Naturalización (INS). Lo que aconteció en esta entrevista es de sobra conocido, pero revela hasta tal punto la personalidad de GÖdel que relataré los hechos con todo detalle, *exactamente* como los registró Morgenstern el 13 de septiembre de 1971. Doy las gracias a Ms. Dorothy Morgenstern-Thomas, la viuda de Morgenstern, y al Instituto de Estudios Avanzados por haberme facilitado una copia del documento:

> Corría el año 1946 cuando Gödel iba a convertirse en ciudadano americano. Me pidió que fuese su testigo; como segundo testigo propuso a Albert Einstein, que también aceptó de buen grado. Einstein y yo nos habíamos visto ocasionalmente, y ambos teníamos grandes expectativas sobre lo que podía ocurrir antes del proceso de naturalización e incluso durante dicho proceso.
>
> Gödel, a quien veía con frecuencia en los meses previos al acontecimiento, empezó a prepararse de forma muy concienzuda. Gödel era una persona meticulosa, así que empezó a estudiar la historia de la colonización de Norteamérica por el ser humano. Eso le condujo al estudio de la historia de los indios americanos, sus diversas tribus, etc. Me llamó numerosas veces por teléfono para que le aconsejase libros, que leía con suma atención. Gradualmente surgieron muchas preguntas y dudas sobre la corrección de estas historias y las peculiares circunstancias que en ellas se revelaban. A partir de ahí y durante las semanas posteriores, Gödel pasó a estudiar historia americana, haciendo particular hincapié en temas de derecho constitucional. Esto le condujo a su vez al estudio de Princeton, y en especial quiso que yo le explicase dónde estaba la frontera entre el distrito y el municipio. Por supuesto, yo intenté hacerle comprender que esto era totalmente innecesario, pero fue en vano. El insistía en averiguar todos aquellos datos que quería saber, de modo que le proporcioné la información pertinente, incluso acerca de Princeton. Entonces quiso saber cómo se elegía el Consejo de Distrito, el Consejo Municipal, quién era el alcalde y cómo funcionaba el Consejo Municipal. Pensaba que era posible que le preguntasen acerca de esos asuntos y que, si demostraba que no conocía la ciudad en que vivía, causaría una mala impresión.
>
> Intenté convencerlo de que esas preguntas nunca surgían; de que la mayor parte de las preguntas eran una simple formalidad y él las podría responder sin dificultad alguna; de que, como máximo, podían preguntarle qué sistema de gobierno teníamos en este país, cómo se llamaba la más alta instancia judicial o cosas así. De todos modos, él siguió con su estudio de la Constitución.
>
> Y entonces sucedió algo interesante. Con cierta excitación me dijo que, al examinar la Constitución y para su disgusto, había hallado contradicciones internas y que podía demostrar cómo, de forma perfectamente legal, era posible que alguien se convirtiese en dictador e instaurase un régimen fascista que aquellos que redactaron la Constitución nunca pretendieron. Le dije que era muy improbable que algo así sucediese nunca, aun suponiendo que tuviese razón, cosa que yo, desde luego, dudaba. Pero él era una persona insistente, así que charlamos muchas veces de este asunto concreto. Yo intenté persuadirlo de que evitase referirse a estos temas ante el tribunal de Tren ton, y también se lo comenté a Einstein que, horrorizado de que a Gödel se le hubiese ocurrido una idea así, también le señaló que no debía preocuparse por estas cuestiones ni referirse a ellas.
>
> Pasaron varios meses y, finalmente, llegó la fecha del examen en Trenton. Aquel día pasé a recoger a Gödel en mi coche. Se sentó en el asiento posterior y luego pasamos a recoger a Einstein por su casa de Mercer Street, desde donde nos dirigimos a Trenton. Durante el viaje, Einstein se volvió levemente y preguntó «Y bien, Gödel, ¿estás realmente bien preparado para el examen?» Por supuesto, ese comentario alteró profundamente a Gödel, que era lo que Einstein pretendía; su semblante de preocupación de Gödel le pareció muy gracioso. Cuando llegamos a Trenton nos hicieron entrar en una gran sala y, aunque en general se interroga a los testigos por separado del candidato, se hizo una excepción en deferencia a Einstein y nos invitaron a los tres a sentarnos juntos, con Gödel en el centro. El examinador preguntó primero a Einstein y luego a mí si opinábamos que Gödel sería un buen ciudadano. Le aseguramos que sin duda alguna era así, que se trataba de una persona distinguida, etc. Entonces se volvió hacia Gödel y dijo:
>
> —Bien, Mr. Gödel, ¿de dónde viene usted?

—¿Que de dónde vengo? De Austria.

—¿Qué forma de gobierno tenían en Austria?

—Era una república, pero debido a la constitución la forma cambió a una dictadura.

—¡Vaya! Qué mala fortuna. Eso no podría suceder en este país.

—Claro que sí. Y puedo *demostrarlo.*

Así que, de todas las posibles preguntas, el examinador tuvo que formular precisamente la más delicada. Einstein y yo nos mirábamos horrorizados durante esta conversación; el examinador fue lo bastante inteligente para tranquilizar enseguida a Gödel diciendo «Dios mío, no entremos en ese terreno» y, para nuestro alivio, interrumpió el examen en ese mismo momento. Cuando por fin salimos y ya nos dirigíamos hacia los ascensores, un hombre se acercó corriendo hacia nosotros con una hoja de papel y pidió un autógrafo a Einstein, que lo firmó con mucho gusto. Mientras bajábamos en el ascensor, le dije a Einstein «Debe de ser terrible que tantas personas le persigan a uno de este modo». Einstein respondió: «En realidad se trata simplemente de los últimos vestigios de canibalismo». Desconcertado, le pregunté: «¿En qué sentido?». El me dijo: «Verás, antes querían tu sangre, ahora quieren tu tinta».

Luego regresamos a Princeton y, al llegar a la esquina de Mercer Street, le pregunté a Einstein si quería ir al instituto o a casa, a lo que él contestó: «Llévame a casa, de todos modos mi trabajo ya no tiene valor alguno». Y prosiguió con una cita de una canción política americana (por desgracia no recuerdo sus palabras; es posible que la tenga en mis notas, y sin duda la reconocería si alguien sugiriese esa frase en particular). Así que fuimos hacia la casa de Einstein de nuevo. Einstein se volvió de nuevo hacia Gödel y le dijo:

—Bueno, Gödel, éste ha sido tu penúltimo examen.

—Cielos, ¿es que aún queda otro? —dijo él, de nuevo azorado.

Y Einstein le contestó:

—Gödel, el próximo examen será cuando entres andando en tu tumba.

—Pero Einstein, yo no entraré andando en mi tumba. A lo que Einstein repuso:

—¡Ahí está la gracia precisamente, Gödel! —Y se fue. Luego llevé a GÖdel a su casa. Todo el mundo sintió un gran alivio al resolver de una vez por todas este peliagudo asunto; ahora, Gödel tenía de nuevo la cabeza libre para cavilar sobre problemas de filosofía y lógica.[230]

Años después, Gödel sufriría episodios de enfermedad mental que acabaron en su rechazo a comer. Murió el 14 de enero de 1978 de desnutrición y agotamiento. Es un error muy extendido pensar que los teoremas de incompletitud de Gödel implican que algunas verdades no se conocerán jamás. Tampoco podemos deducir de ellos que la capacidad del entendimiento humano está limitada de algún modo. En realidad, los teoremas demuestran únicamente los puntos débiles y los inconvenientes de los sistemas formales. Por tanto, quizá resulte sorprendente saber que, a pesar de la colosal trascendencia de los teoremas en la filosofía de la matemática, su impacto sobre la eficacia de ésta como mecanismo de construcción de teorías ha sido, en realidad, bastante nimio. De hecho, durante las décadas que siguieron a la publicación de la demostración de Gödel, la matemática alcanzó algunos de sus más espectaculares éxitos en las teorías físicas del universo. Lejos de quedar abandonada por falta de fiabilidad, la matemática y sus conclusiones lógicas se hicieron cada vez más esenciales para la comprensión del cosmos. Sin embargo, eso significaba que el misterio de la «inexplicable eficacia» de la matemática se hizo aún más insondable. Vamos a reflexionar: imaginemos lo que hubiera sucedido si el empeño logicista se hubiese visto coronado por el éxito. Esto habría implicado que la matemática deriva por completo de la lógica; literalmente, de las leyes del pensamiento. Pero ¿cómo es posible que una ciencia tan puramente deductiva se adapte de esa forma maravillosa a los fenómenos naturales? ¿Cuál es la relación entre la lógica formal (podríamos incluso decir la lógica formal humana) y el cosmos? Después de Hilbert y Gödel, la respuesta a estas preguntas seguía siendo borrosa. Ahora, todo lo que teníamos era un «juego» formal incompleto expresado en lenguaje matemático.[231] ¿Cómo pueden los modelos basados en un sistema tan «poco fiable» penetrar con profundidad en el enigma del universo y su funcionamiento? Antes de intentar dar respuesta a estas preguntas, voy a afinarlas un poco más por el método de examinar algunos casos prácticos que demuestran la sutileza de la eficacia de la matemática.

8
¿Eficacia inexplicable?

En el capítulo 1 señalé que el éxito de la matemática en las teorías físicas tiene dos aspectos: a uno lo llamé «activo» y al otro «pasivo». El aspecto «activo refleja el hecho de que los científicos formulan las leyes de la naturaleza en términos matemáticos aplicables más allá de toda duda; es decir, utilizan entidades, relaciones y ecuaciones matemáticas que se desarrollaron pensando en su aplicación, con frecuencia para el tema en cuestión. En esos casos, los investigadores tienden a basarse en la percepción de similitud entre las propiedades de los conceptos matemáticos y los fenómenos observados o los resultados experimentales. En tales situaciones, puede que la eficacia de la matemática no sea tan sorprendente, ya que se puede sostener que las teorías se ajustaron a medida de las observaciones. Sin embargo, existe también una parte sorprendente del uso «activo», la relacionada con la *precisión,* que comentaré más adelante en este capítulo. La eficacia «pasiva» se refiere a los casos de desarrollo de teorías matemáticas totalmente abstractas, sin intención alguna de hallarles aplicación, que más adelante se transforman en modelos predictivos de gran potencia. La *teoría de nudos* representa un ejemplo espectacular de la interacción entre la eficacia pasiva y la activa.

Nudos

Los nudos están hechos del material del que están hechas las leyendas. Quizá recuerden la leyenda griega del nudo gordiano. Un oráculo comunicó a los ciudadanos de Frigia que su próximo rey sería el primer hombre que entrase en la capital montando un carro de bueyes. Gordio, un pobre campesino incauto que entró en la ciudad conduciendo un carro de bueyes, se convirtió de este modo en rey. Abrumado por la gratitud, Gordio dedicó su carro a los dioses y lo ató con un complicado nudo que resistió todos los intentos de deshacerlo. Una posterior profecía pronosticaba que la persona que deshiciese el nudo se convertiría en rey de Asia. El destino quiso que el hombre que finalmente deshiciera el nudo (en el año 333 a.C.) fuese Alejandro Magno que, en efecto, más adelante se convertiría en soberano de Asia. No obstante, la solución de Alejandro para el nudo gordiano no fue lo que llamaríamos sutil, ni siquiera limpia; al parecer, Alejandro ¡cortó el nudo en dos con su espada!

Pero no hace falta que retrocedamos hasta la antigua Grecia para tropezamos con nudos. Un niño que se ata los zapatos, una chica haciendo trenzas en su cabello, la abuela tejiendo un jersey p un marinero amarrando un barco, todos ellos utilizan algún tipo de nudo. Hay nudos con nombres pintorescos,[232] como «gaza de pescador», «corbata inglesa», «zarpa de gato», «nudo de amor dormido», «abuelita» o «nudo del ahorcado». En concreto, los nudos marineros se han considerado lo bastante importantes desde un punto de vista histórico como para inspirar toda una colección de libros en la Inglaterra del siglo XVII. Resulta que uno de estos libros lo escribió nada menos que el aventurero inglés John Smith (1580-1631), que se hizo célebre por su relación romántica con la princesa nativa americana Pocahontas.

La teoría matemática de nudos nació en 1771, en un documento escrito por el matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796).[233] Vendermonde fue el primero en reconocer que los nudos se podían estudiar como parte de la materia denominada «geometría de posición», que trata de relaciones que dependen únicamente de la posición, y hace caso omiso de los tamaños y de los cálculos cuantitativos. En términos de su papel en el desarrollo de la teoría de nudos, el siguiente puesto le corresponde al «príncipe de las matemáticas» alemán, Cari Friedrich Gauss. Las notas de Gauss contienen bocetos y descripciones detalladas de nudos, así como exámenes analíticos de sus propiedades. Sin embargo, a pesar de la importancia de la obra de Vandermonde, Gauss y otros matemáticos del siglo XIX, el principal impulso de la moderna teoría de nudos tuvo un origen inesperado: ¡un intento de explicar la estructura de la materia! La idea se forjó en la mente del famoso físico inglés William Thomson (más conocido actualmente por lord Kelvin; 1824-1907). Los trabajos de Thomson se centraban en la formulación de una teoría de los átomos, los bloques de construcción básicos de la materia.[234] Según su original conjetura, los átomos eran en realidad tubos anudados de éter (esa misteriosa sustancia que, según se suponía, impregnaba todo el espacio). En este modelo, la variedad de elementos químicos se explicaba por la gran diversidad de nudos.

Si la especulación de Thomson nos parece actualmente casi una chifladura es porque henos tenido un siglo de tiempo para acostumbrarnos al modelo correcto del átomo (en el que los electrones orbitan alrededor del núcleo) y comprobarlo experimentalmente. Pero estamos hablando de Inglaterra en la década de 1860, y a Thomson le había impresionado profundamente la estabilidad de los anillos de humo complejos y su capacidad de vibrar, dos propiedades que en aquella época se consideraban esenciales en cualquier modelo del átomo. Para desarrollar el equivalente de una «tabla periódica» de los elementos, Thomson debía *clasificar* los nudos (es decir, averiguar cuáles eran los distintos tipos de nudo posibles), y esta necesidad de tabulación de nudos suscitó un gran interés por la matemática de los nudos.

Como ya expliqué en el capítulo 1, un nudo matemático tiene un aspecto similar al de un nudo en una cuerda, pero los extremos de la cuerda están empalmados. En otras palabras, un nudo matemático se representa mediante una curva cerrada sin cabos sueltos.

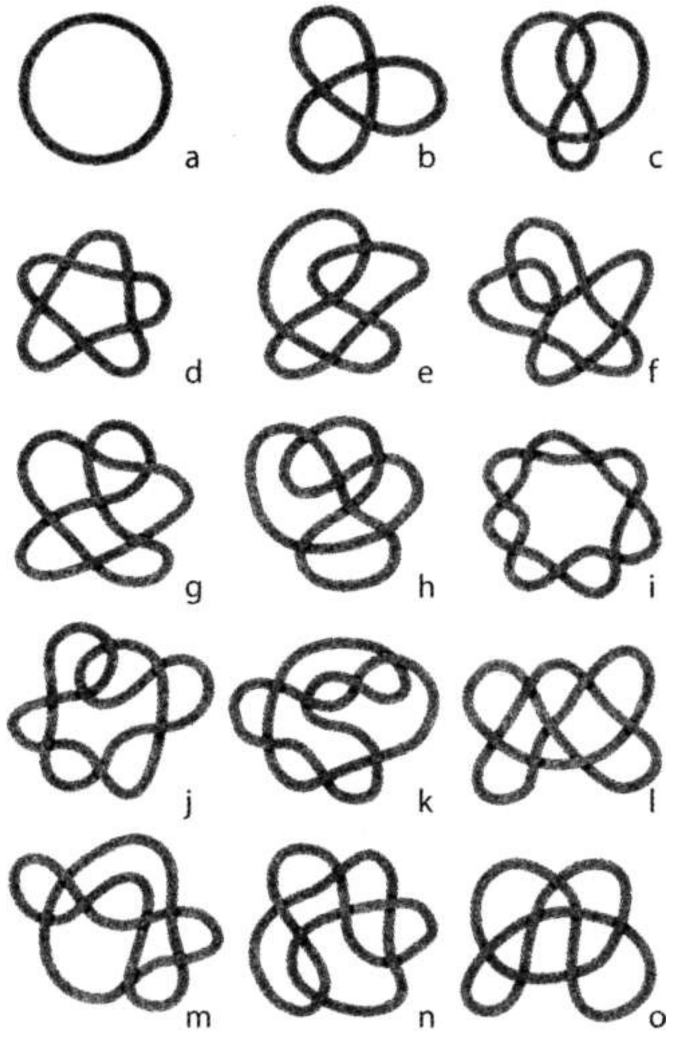


FIGURA 54

En la figura 54 se pueden ver algunos ejemplos; los nudos tridimensionales se representan mediante sus proyecciones (sombras) en el plano. La posición en el espacio de dos ramales que se cruzan se indica en la figura mediante la interrupción de la línea que representa el ramal inferior. El nudo más simple (llamado precisamente *nudo simple)* es únicamente una curva circular cerrada (como se muestra en la figura 54a). El nudo de *trébol* (figura 54b) tiene tres cruces de ramales, mientras que el nudo *en 8* (figura 54c) tiene cuatro cruces. En la teoría de Thomson, estos tres nudos podían, en principio, corresponder a modelos de tres átomos de complejidad creciente, como los de hidrógeno, carbono y oxígeno, respectivamente. Pero seguía siendo necesaria una clasificación completa de nudos, y la persona que emprendió esta tarea fue un amigo de Thomson, el físico matemático escocés Peter Guthrie Tait (1831-1901). Las preguntas que los matemáticos se hacen acerca de los nudos no difieren mucho de las que uno mismo podría plantearse acerca de una cuerda anudada o un ovillo enredado. ¿Está realmente anudado? Un nudo determinado ¿es equivalente a otro? O, lo que es lo mismo: ¿se puede deformar un nudo hasta adquirir la forma de otro *sin* romper las hebras ni hacer pasar un ramal a través de otro como en los anillos mágicos de un ilusionista? La importancia de esta pregunta se puede ver en la figura 55, en donde se muestra que, mediante determinadas manipulaciones, es posible obtener dos representaciones muy distintas de lo que, en realidad, es el mismo nudo. En última instancia, la teoría de nudos busca una forma de *demostrar* que ciertos nudos (como el nudo de trébol o el del número 8, figuras 54b y 54c) son realmente distintos, ignorando las diferencias «superficiales» de otros nudos, como los de la figura 55. Tait inició su trabajo de clasificación por el camino difícil.[235] Sin ningún principio matemático riguroso para guiarle, recopiló listas de curvas con un cruce, dos cruces, tres cruces, etc. En colaboración con el reverendo Thomas Pennington Kirkman (1806-1895), que también era aficionado a las matemáticas, empezó a pasar una criba por las curvas para eliminar duplicados de nudos equivalentes. No se trataba de una tarea trivial. Hay que tener en cuenta que en cada cruce hay dos formas de elegir qué ramal pasa por encima. Eso significa que, si una cura contiene, por ejemplo, siete cruces, se deben tener en cuenta 2x2x2x2x2x2x2 = 128 nudos. En otras palabras, la vida humana es demasiado breve como para completar la clasificación de nudos con decenas de cruces de esta forma intuitiva. Sin embargo, alguien supo apreciar el trabajo de Tait. El gran James Clerk Maxwell, que formuló la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo, trató con respeto la teoría atómica de Thomson, sobre la que expresó: «Satisface un número mayor de condiciones que cualquier teoría atómica considerada hasta ahora.» Consciente de la contribución de Tait, Maxwell compuso el siguiente poema:

Clear your coil of kinkings
Into perfect plaiting,
Locking loops and lmkings
Interpenetrating[236]*

(* «Tu bobina sin enredos, / una trenza perfecta / todos los bucles y enlaces / interpenetrándose.»)

En 1877, Tait ya había clasificado nudos alternos hasta siete cruces. Los nudos alternos son aquellos en los que los cruces se alternan por encima y por debajo, como la trama de una alfombra. Tait hizo también algunos descubrimientos más prácticos, principios básicos que luego se bautizaron como «conjeturas de Tait». Estas conjeturas resultaron ser tan enjundiosas que resistieron todo intento de demostración rigurosa hasta finales de la década de 1980. En 1885, Tait publicó tablas de nudos hasta diez cruces y decidió dejarlo en ese punto. De forma independiente, el profesor de la Universidad de Nebraska Charles Newton Little (1858-1923) publicó también en 1899 tablas de nudos no alternos con diez cruces o menos.[237] Lord Kelvin siempre tuvo aprecio por Tait. En una ceremonia celebrada en el Peterhouse College en Cambridge en la que se presentaba un retrato de Tait, lord Kelvin señaló: «Recuerdo haber oído decir a Tait en cierta ocasión que la ciencia es lo único por lo que vale la pena vivir. Aunque lo dijo con sinceridad, el propio Tait demostró que no era así. Tait era un gran lector. Podía recitar de corrido a Shakespeare, Dickens y Thackeray. Su memoria era prodigiosa. Le bastaba con leer algo con comprensión para recordarlo siempre».

Por desgracia, cuando Tait y Litde completaron su heroica tarea de tabulación de nudos, la teoría de Kelvin había quedado totalmente descartada como posible teoría atómica. De todos modos, el interés por los nudos siguió vivo, aunque con una diferencia, que el matemático Michael Atiyah ha expresado de este modo: «El estudio de los nudos se convirtió en una rama esotérica de la matemática pura».

El área general de la matemática en la que no se tienen en cuenta propiedades como el tamaño, la homogeneidad y, en cierto sentido, ni siquiera la forma, se denomina *topología*. La topología (la geometría de la lámina de goma) examina las propiedades que no varían cuando el espacio se estira o se deforma (sin romperlo ni agujerearlo).[238] Por su naturaleza, los nudos forman parte de la topología. Por cierto, los matemáticos distinguen entre *nudos*, que son bucles anudados individuales; *enlaces*, que son conjuntos de bucles anudados individuales enredados entre sí; y *trenzas*, que son conjuntos de cuerdas verticales unidas a barras horizontales en los extremos superior e inferior.

Si la dificultad de clasificar nudos no le ha impresionado, piense en el siguiente dato revelador. La tabla de Charles Little, publicada en 1899 tras un trabajo de seis años, contenía 43 nudos no alternos de diez cruces. Esta tabla fue examinada por muchos matemáticos y tenida por correcta durante setenta y cinco años. En 1974, el abogado y matemático neoyorquino Kenneth Perko estaba experimentando con cuerdas en el suelo de su salón.[239] Para su sorpresa, Perko descubrió que dos de los nudos de la tabla de Little eran, en realidad, el mismo nudo. Ahora sabemos que sólo hay 42 nudos no alternos distintos de diez cruces.

Aunque el siglo XX fue testigo de grandes avances en topología, los progresos en teoría de nudos eran relativamente lentos. Entre los principales objetivos del estudio de los nudos en matemáticas se encuentra la identificación de las propiedades que distinguen unos nudos de otros. Estas propiedades se denominan *invariantes de nudos*, ya que representan cantidades que resultan en el mismo valor para dos proyecciones distintas cualesquiera del mismo nudo. En otras palabras, un invariante ideal es, literalmente, una «huella dactilar» del nudo, es decir, una propiedad característica de éste que no cambia al deformarlo. Quizá el invariante más simple que se puede concebir es el número mínimo de cruces en un esquema del nudo. Por ejemplo, por mucho que se intente desenredar el nudo de trébol (figura 54b), nunca se podrá reducir el número de cruces por debajo de tres. Por desgracia, existen diversas razones que explican por qué el número mínimo de cruces no es el invariante más útil.

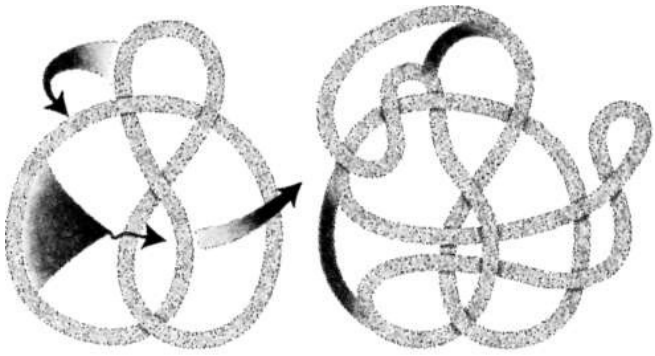


FIGURA 55

En primer lugar, como se muestra en la figura 55, no siempre es fácil determinar si un nudo se ha dibujado con el número mínimo de cruces. En segundo lugar y aún más importante, muchos nudos distintos tienen el mismo número de cruces. Por ejemplo, en la figura 54 hay tres nudos distintos con seis cruces y al menos siete con siete cruces. Así, el número mínimo de cruces no distingue la mayoría de los nudos entre sí. Por último, el número mínimo de cruces, al ser un parámetro tan simple, no ofrece demasiada información sobre las propiedades de los nudos en general.

En 1926 tuvo lugar un avance decisivo en la teoría de nudos.[240] En ese año, el matemático norteamericano James Waddell Alexander (1888-1971) descubrió un importante invariante al que se bautizó como *polinomio de Alexander.* Básicamente, el polinomio de Alexander es una expresión algebraica que utiliza la disposición de cruces para etiquetar el nudo. La novedad positiva era que, si dos nudos tenían distintos polinomios de Alexander, los nudos eran definitivamente distintos. El punto negativo, en cambio, era que dos que tuviesen el mismo polinomio podían ser nudos distintos. Por consiguiente, aunque el polinomio de Alexander resultó ser muy útil, aún no era la herramienta perfecta para distinguir nudos.

Los matemáticos estuvieron cuatro décadas explorando la base conceptual del polinomio de Alexander y profundizando en las propiedades de los nudos. Pero ¿por qué dedicaron tanto empeño? Desde luego, no era por razones prácticas. El modelo atómico de Thomson había caído en el olvido tiempo atrás, y ningún otro problema de ciencias, economía, arquitectura u otra disciplina parecía tener necesidad alguna de la teoría de nudos. Entonces, ¿por qué tantos matemáticos dedicaron interminables horas a los nudos? ¡Por simple curiosidad! Para estas personas, la idea de comprender los nudos y los principios subyacentes era, simplemente, bella. El destello de comprensión que representó el polinomio de Alexander era para los matemáticos tan irresistible como el desafío del Everest para George Mallory, que, a la pregunta de por qué quería escalarlo, respondió con la célebre frase «porque está ahí».

A finales de la década de 1960, el prolífico matemático anglonorteamericano John Horton Conway[241] descubrió un procedimiento para «desanudar» nudos de forma gradual, revelando así la relación entre los nudos y sus polinomios de Alexander. En concreto, Conway introdujo dos operaciones «quirúrgicas» que podían servir como base para la definición de un invariante de nudo. Las operaciones de Conway, denominadas «volteo» *(flipping)* y «suavizado» *(smoothing)* se describen esquemáticamente en la figura 56.

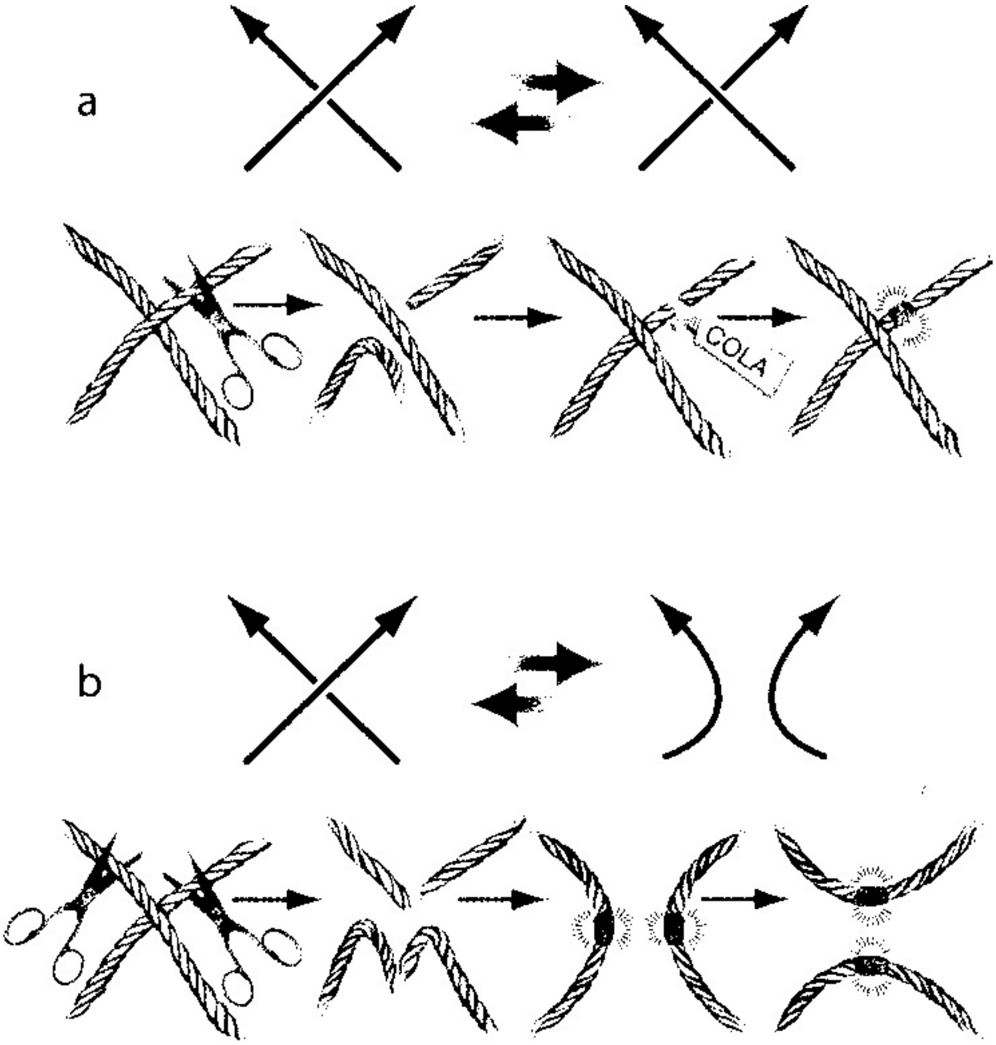


FIGURA 56

En el volteo (figura 56a), el cruce se transforma pasando el ramal superior por debajo del inferior (en la figura se indica también cómo se puede llevar a cabo esta transformación con un nudo real en una cuerda). Observe que, por supuesto, el volteo cambia la naturaleza del nudo. Por ejemplo, no es difícil asumir que el nudo de trébol de la figura 54b se convierte en el nudo simple (figura 54a) tras un volteo. La operación de suavizado de Conway elimina por completo el cruce (figura 56b) volviendo a unir los ramales de la forma «incorrecta». A pesar de la obra de Conway y de la nueva información que proporcionó, los matemáticos siguieron convencidos durante casi dos décadas más de la imposibilidad de hallar otras invariantes de nudo (del tipo del polinomio de Alexander). Pero en 1984 la situación cambió de forma espectacular.

El matemático neozelandés-americano Vaughan Jones no estaba estudiando nudos en absoluto, sino que se hallaba explorando un mundo aún más abstracto, el de las entidades matemáticas denominadas *álgebras de Von Neumann*. De forma inesperada, Jones observó que una relación que aparecía en las álgebras de Von Neumann se parecía sospechosamente a una relación de teoría de nudos, y se puso en contacto con Joan Bennan, que trabajaba en teoría de nudos en la Universidad de Columbia, para comentar sus posibles aplicaciones. Un examen detenido de la relación reveló un nuevo invariante para nudos, al que se denominó *polinomio de Jones*.[242] Enseguida se reconoció que el polinomio de Jones era un invariante más sensible que el polinomio de Alexander. Por ejemplo, distingue entre un nudo y su imagen especular (por ejemplo, los nudos de trébol a derechas y a izquierda de la figura 57), cuyos polinomios de Alexander son idénticos.

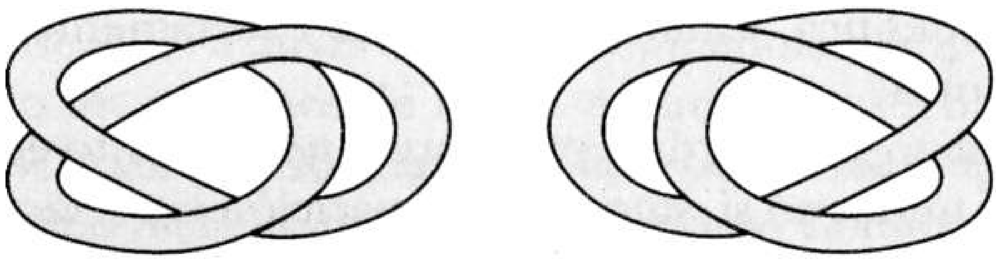


FIGURA 57

Pero lo fundamental es que el descubrimiento de Jones generó un entusiasmo sin precedentes entre las personas que trabajaban en teoría de nudos. El anuncio de un nuevo invariante generó tal oleada de actividad que, de pronto, el mundo de los nudos parecía el parqué de la bolsa en un día en que la Reserva Federal baja inesperadamente los tipos de interés.

El descubrimiento de Jones fue mucho más allá del simple avance en la teoría de nudos. El polinomio de Jones conectó de repente una apabullante variedad de áreas de la matemática y la física, desde la mecánica estadística (que se utiliza, por ejemplo, para estudiar el comportamiento de grandes cantidades de átomos o moléculas) a los grupos cuánticos (una rama de la matemática que tiene que ver con la física del mundo subatómico). Matemáticos de todo el mundo se pusieron febrilmente a la búsqueda de invariantes aún más generales que abarcasen tanto el polinomio de Alexander como el de Jones. Esta carrera tuvo como consecuencia el que quizá sea el resultado más asombroso en la historia de la competencia científica.

Pocos meses después de que Jones diese a conocer su nuevo polinomio, cuatro grupos, trabajando de forma independiente y a partir de tres estrategias matemáticas distintas, anunciaron simultáneamente el descubrimiento de un invariante aún más sensible. El nuevo polinomio recibió el nombre de polinomio HOMFLY (o HOMFLYPT), por las iniciales de sus descubridores: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish y Yetter. Por si fuera poco, aparte de estos cuatro grupos cruzando la línea de meta, dos matemáticos polacos (Przytycki y Traczyk) descubrieron de forma independiente exactamente el mismo polinomio, pero un capricho de correos les impidió publicarlo a tiempo. En consecuencia, el polinomio se denomina también HOMFLYPT, tras agregar las iniciales de los descubridores polacos.

Desde entonces, aunque se han descubierto otros invariantes, la clasificación completa de los nudos se sigue resistiendo. La pregunta de qué nudo se tiene que girar y torcer para producir otro nudo aún no tiene respuesta. El invariante más avanzado descubierto hasta ahora se debe al matemático franco-ruso Maxim Kontsevich, que recibió la prestigiosa medalla Fields en 1998 y el premio Crafoord en 2008 por su obra. Casualmente, en 1998, Jim Hoste del Pitzer College de Claremont, California, y Jeffrey Weeks de Canton, Nueva York, tabularon todos los bucles anudados con 16 o menos cruces. De forma independiente, Morwen Thistlethwaite de la Universidad de Tennessee en Knoxville produjo una tabulación idéntica. Cada lista contiene exactamente ¡1.701.936 nudos distintos!

Sin embargo, la verdadera sorpresa no fue tanto el avance en la teoría de nudos en sí, sino en la reaparición espectacular e inesperada de la teoría en una amplia variedad de ciencias.[243]

Los nudos de la vida

Como expliqué, la teoría de nudos surgió de un modelo erróneo del átomo. Sin embargo, una vez abandonado ese modelo, los matemáticos no se desanimaron. Por el contrario, se embarcaron con entusiasmo en un camino largo y difícil con el objetivo de comprender los nudos por sí mismos. Puede imaginar su satisfacción cuando la teoría de nudos resultó ser clave para la comprensión de procesos fundamentales en los que participaban las moléculas de la vida. ¿Hay acaso un ejemplo mejor del rol «pasivo» de la matemática en la explicación de la naturaleza?

El ácido desoxirribonucleico o ADN es el material genético de las células. El ADN consta de dos larguísimas hebras entrelazadas y enredadas una sobre la otra millones de veces para formar una doble hélice. A lo largo de estas espinas dorsales, que se pueden imaginar como los listones laterales de una escalera, se alternan los azúcares y los fósforos. Los «peldaños» de la escalera consisten en parejas de bases conectadas por enlaces de hidrógeno de una forma determinada (la adenina sólo enlaza con la timina y la citosina con la guanina, como se muestra en la figura 58).

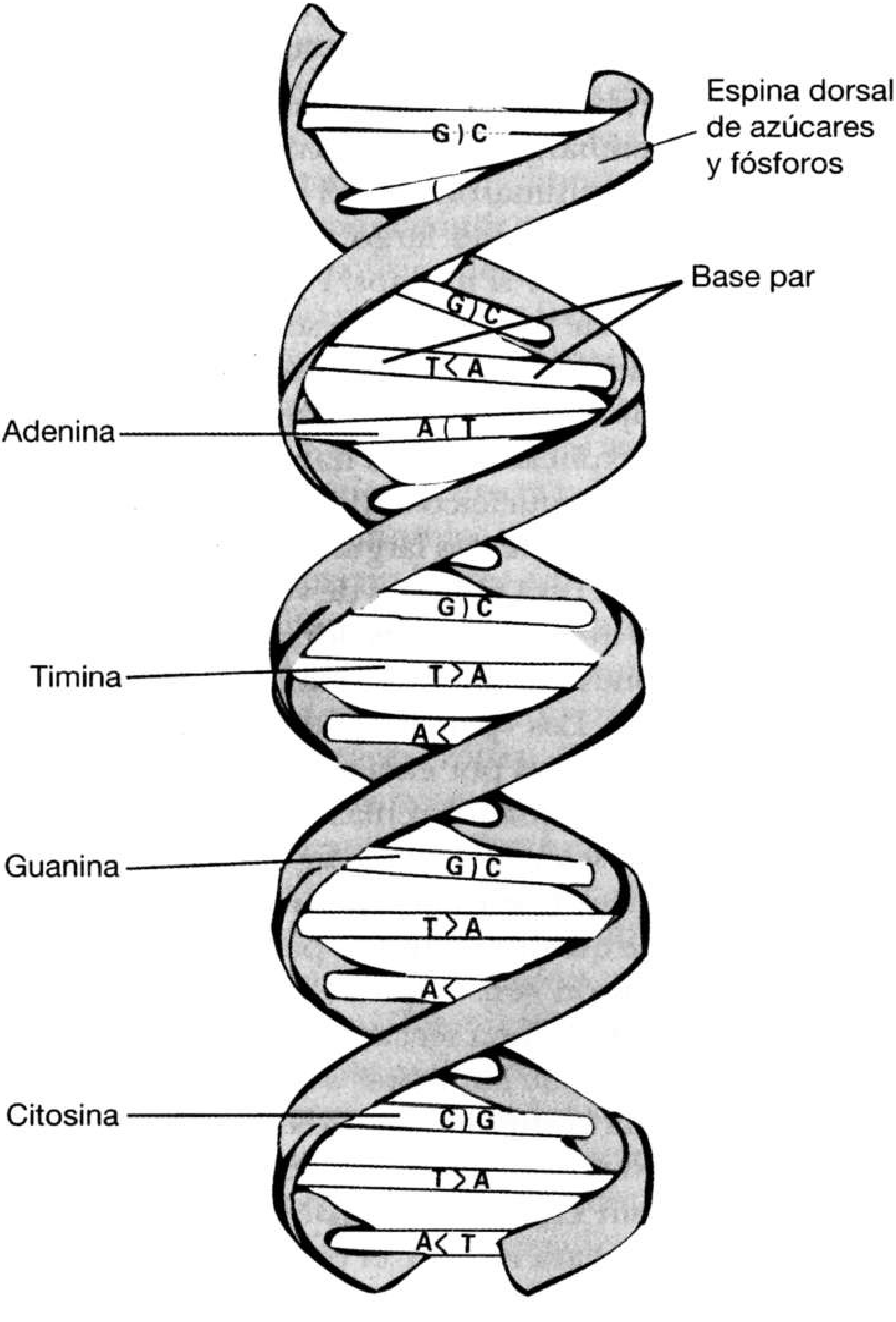

Espina dorsal de azúcares y fósforos
Base par
Adenina
Timina
Guanina
Citosina

FIGURA 58

FIGURA 58

Cuando una celda se divide, la primera fase es la replicación del ADN, de modo que cada celda hija se quede con una copia. De forma similar, en el proceso de transcripción (en el que la información genética del ADN se copia en el ARN), una sección de la doble hélice del ADN se desenrosca y sólo una de las hebras del ADN actúa como plantilla. Una vez finalizada la síntesis del ARN, el ADN vuelve a enroscarse en la hélice. Ni el proceso de replicación ni el de transcripción son sencillos; sin embargo, el ADN está enroscado de una forma tan compacta (para reducir el espacio de almacenamiento de información) que, si no se desenredase, los procesos de la vida no podrían tener lugar con fluidez. Además, para poder efectuar el proceso de replicación, las moléculas de ADN hijas deben desenredarse y el ADN padre debe en algún momento regresar a su configuración inicial. Los agentes que se encargan de las tareas de desanudar y desenredar son enzimas.[244] Las enzimas pueden pasar una hebra de ADN a través de otra rompiéndolas temporalmente y conectando los extremos de forma distinta. ¿Le suena de algo el proceso? Se trata precisamente de las operaciones «quirúrgicas» (representadas en la figura 56) que introdujo Conway para desenmarañar los nudos matemáticos. En otras palabras, desde un punto de vista topológico, el ADN es un nudo complejo que las enzimas deben desanudar para que pueden tener lugar los procesos de replicación y transcripción. Utilizando la teoría de nudos para calcular la dificultad de desanudar el ADN, los investigadores pueden estudiar las propiedades de las enzimas que ejecutan ese trabajo. Y lo que es mejor, mediante técnicas de visualización experimentales como microscopía electrónica y electroforesis en gel, los científicos pueden observar y cuantificar realmente los cambios en el anudado y enlazado del ADN que las enzimas provocan (en la figura 59 se muestra una micrografía electrónica de un nudo de ADN).

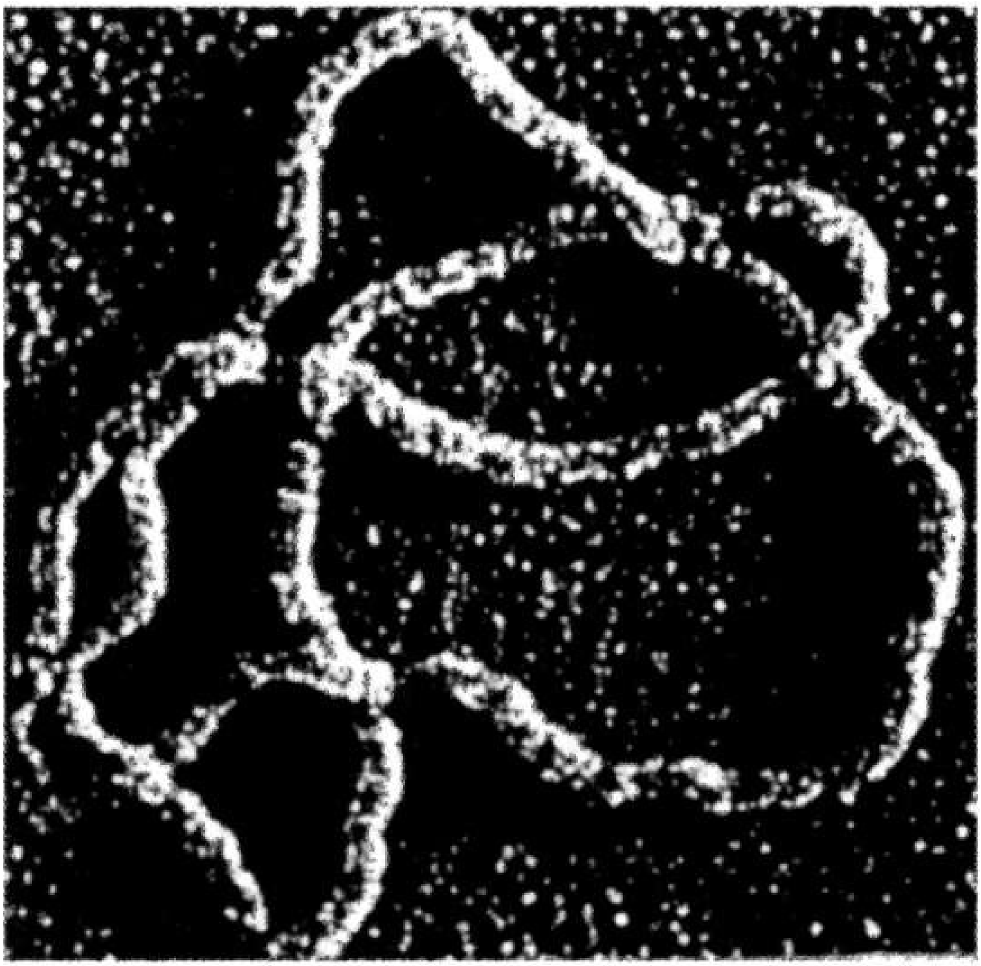


FIGURA 59

El desafío de los matemáticos es deducir los mecanismos de funcionamiento de las enzimas a partir de los cambios observados en la topología del ADN. Adicionalmente, los cambios en el número de cruces del nudo de ADN ofrecen a los biólogos una medida de la *velocidad de reacción* de las enzimas, es decir, el número de cruces por minuto sobre los que puede actuar una enzima en una determinada concentración.

Pero la biología molecular no es el único terreno en el que la teoría de nudos ha hallado inesperadas aplicaciones. La teoría de cuerdas (el intento actual de formular una teoría unificada que explique todas las fuerzas de la naturaleza) también tiene que ver con los nudos.

¿El universo en una cuerda?

La gravedad es la fuerza que opera a mayor escala. Mantiene unidas las estrellas de las galaxias e influye en la expansión del universo. La relatividad general de Einstein es una notable teoría sobre la gravedad. Pero, en lo más profundo del núcleo atómico, otras fuerzas y una teoría distinta son las que gobiernan. La interacción nuclear fuerte mantiene unidas unas partículas llamadas quarks para formar los conocidos protones y neutrones, constituyentes básicos de la materia. El comportamiento de las partículas y de las fuerzas en el mundo subatómico viene dictado por las leyes de la mecánica cuántica. ¿Actúan según las mismas reglas los quarks y las galaxias? Los físicos creen que debería ser así, aunque aún no saben por qué. Durante décadas, los físicos han estado buscando una «teoría de todo», una descripción exhaustiva de las leyes de la naturaleza. En particular, su meta es llenar el vacío entre lo más grande y lo más pequeño con una teoría cuántica de la gravedad, una reconciliación de la relatividad general con la mecánica cuántica. La teoría de cuerdas parece ser actualmente la posibilidad mejor situada para una «Teoría de todo».[245] Desarrollada en su origen como teoría para la fuerza nuclear fuerte y posteriormente desechada, la teoría de cuerdas resucitó de la oscuridad en 1974 de la mano de los físicos John Schwarz y Joel Scherk. La idea básica de la teoría de cuerdas es bastante simple. La teoría propone que las partículas subatómicas elementales, como los electrones y los quarks, no son entidades puntuales sin estructura, sino que representan distintos modos de vibración de una misma cuerda básica. Según esta idea, el cosmos está lleno de minúsculos aros flexibles, similares a gomas elásticas. De igual modo que se puede pulsar una cuerda de violín para producir distintas armonías, las distintas vibraciones de estas cuerdas cerradas corresponden a distintas partículas de materia. En otras palabras, el mundo es algo así como una sinfonía.

Como las cuerdas son bucles en forma de «o» que se mueven por el espacio, con el paso del tiempo barren áreas en forma de cilindro (véase figura 60) denominadas *worldsheets.*

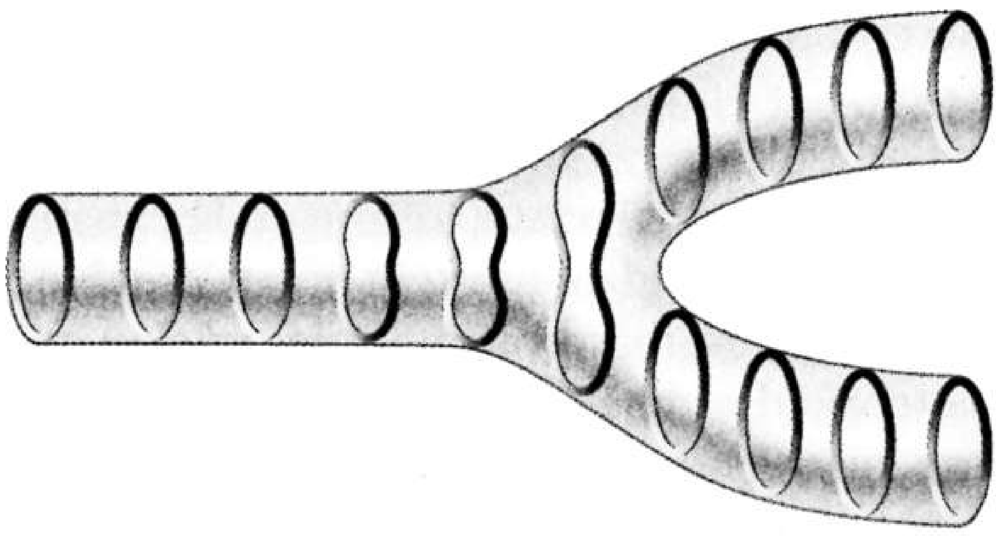


FIGURA 60

Si una cuerda emite otras cuerdas, el cilindro se bifurca creando estructuras en forma de tirachinas. Cuando muchas cuerdas interaccionan, forman una intrincada maraña de cáscaras combinadas con aspecto de donut. Al estudiar este tipo de estructuras topológicas complejas, Hiroshi Ooguri y Cumrun Vafa, que trabajaban en teoría de cuerdas, descubrieron una sorprendente conexión entre el número de «cáscaras donut», las propiedades geométricas intrínsecas de los nudos y el polinomio de Jones.[246] Con anterioridad, Ed Witten (uno de los nombres fundamentales en teoría de cuerdas) había creado una inesperada relación entre el polinomio de Jones y la misma base de la teoría de cuerdas (denominada *teoría cuántica de campos).*[247] El modelo de Witten fue rediseñado más adelante desde una perspectiva puramente matemática por el matemático Michael Atiyah.[248] De modo que la teoría de cuerdas y la teoría de nudos viven en simbiosis perfecta. Por una parte, la teoría de cuerdas ha sacado provecho de los resultados de la teoría de nudos y, por otra, la teoría de cuerdas ha impulsado nuevos avances en teoría de nudos.

Con un ámbito mucho más amplio, la teoría de cuerdas busca explicaciones para los constituyentes más básicos de la materia, de forma similar a lo que Thomson pretendía originalmente con una teoría de los átomos. Thomson pensaba (erróneamente) que los nudos le proporcionarían la respuesta. Por un giro inesperado, los expertos en teoría de cuerdas han hallado que los nudos pueden realmente ofrecerles algunas respuestas.

Como ya he mencionado, incluso el aspecto «activo» de la eficacia de la matemática (cuando los científicos generan la matemática que necesitan para describir los hechos observables) presenta algunas desconcertantes sorpresas en lo que se refiere a la precisión. Voy a describir brevemente un aspecto de la física en el que tanto la parte activa como la pasiva han desempeñado su papel, pero que es especialmente notable por la exactitud obtenida.

UNA PRECISIÓN DE PESO

Newton tomó las leyes de la caída de cuerpos descubiertas por Galileo y otros experimentalistas italianos, las combinó con las leyes del movimiento planetario que había determinado Kepler y utilizó este esquema unificado para formular una ley matemática universal de la gravitación. Durante el proceso, Newton tuvo que formular una rama completamente nueva de la matemática (el cálculo) que le permitiese captar de forma concisa y coherente todas las propiedades de sus leyes de movimiento y de gravitación. La precisión con la que el propio Newton pudo comprobar su ley de la gravedad, teniendo en cuenta los resultados experimentales y las observaciones de su época, no era superior al 4 por 100. Sin embargo, la ley demostró su exactitud más allá de cualquier expectativa razonable. En la década de 1950, la precisión experimental era superior a una diezmilésima de un 1 por 100. Pero eso no es todo. Algunas teorías especulativas recientes, cuya finalidad es explicar la aparente aceleración de la expansión de nuestro universo, han sugerido que la gravedad podría cambiar su comportamiento a escalas muy pequeñas. Recuerde que la ley de Newton afirma que la atracción gravitatoria decrece como el inverso del cuadrado de la distancia. Es decir, si se duplica la distancia entre dos masas, la fuerza gravitatoria que cada masa percibe se hace cuatro veces más débil. Los nuevos escenarios predecían desviaciones de este comportamiento a distancias de menos de un milímetro. Eric Adelberger, Daniel Kapner y su equipo de la Universidad de Washington en Seattle[249] realizaron una serie de ingeniosos experimentos para comprobar esta predicción de cambio en la dependencia de la separación. Sus resultados más recientes, publicados en enero de 2007, muestran que la ley del cuadrado inverso ¡sigue siendo válida a una distancia de 56 milésimas de milímetro! Así, una ley matemática propuesta hace más de trescientos años basándose en observaciones insuficientes no sólo ha resultado ser espectacularmente precisa, sino que ha demostrado su validez en situaciones en las que ésta no se ha podido demostrar hasta época muy reciente.

Pero Newton dejó sin respuesta una pregunta fundamental: ¿cómo funciona realmente la gravedad? ¿Cómo afecta la Tierra al movimiento de la Luna, situada a una distancia de casi 400.000 kilómetros? Newton era consciente de este defecto de su teoría, y lo admitió abiertamente en los *Principia:*

> Hasta aquí he expuesto los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza de la gravedad, pero todavía no he asignado causa a la gravedad. Efectivamente esta fuerza surge de alguna causa que penetra hasta los centros del Sol y los planetas … y cuya acción se extiende por todas partes hasta distancias inmensas, decreciendo siempre como el cuadrado de las distancias … Pero no he podido todavía deducir a partir de los fenómenos la razón de estas propiedades de la gravedad y yo no imagino hipótesis.

La persona que decidió aceptar el desafío planteado por la omisión de Newton fue Albert Einstein (1879-1955). Concretamente en 1907, Einstein tenía buenas razones para interesarse por la gravedad:[250] ¡su nueva teoría de la relatividad especial parecía entrar en conflicto directo con la ley de gravitación de Newton!

Newton creía que la acción de la gravedad era instantánea. Suponía que la fuerza gravitatoria del Sol sobre los planetas o la atracción de la Tierra sobre la manzana no tardaban tiempo alguno. Por otra parte, la columna vertebral de la relatividad especial de Einstein era la tesis de que ningún objeto, energía ni información podía viajar a mayor velocidad que la luz. Entonces, ¿cómo podía hacerlo la gravedad? Como indica el siguiente ejemplo, las consecuencias de esta contradicción podrían ser fatídicas para conceptos tan fundamentales como nuestra percepción de causa y efecto.

Imaginemos que, de algún modo, el Sol desapareciese de repente. Libre de la fuerza que la mantiene en su órbita, la Tierra (según Newton) empezaría a moverse inmediatamente en línea recta (salvo pequeñas desviaciones provocadas por la gravedad de los otros planetas). Sin embargo, el Sol tardaría ocho minutos en desaparecer de la vista de los habitantes de la Tierra, el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia que separa el Sol de la Tierra. En otras palabras, el cambio en el movimiento de la Tierra precedería a la desaparición del Sol.

Para evitar este conflicto y, al mismo tiempo, tratar de resolver la pregunta sin respuesta de Newton, Einstein emprendió una búsqueda cuasiobsesiva de una nueva teoría de la gravedad. Se trataba de una empresa formidable. Cualquier nueva teoría, no sólo debía tener en cuenta y conservar los notables éxitos logrados por la teoría de Newton, sino también explicar el funcionamiento de la gravedad de forma compatible con la relatividad especial. Tras unas cuantas salidas en falso y divagaciones sin rumbo, Einstein logró su objetivo en 1915. Su *relatividad general* sigue considerándose una de las teorías más bellas de la historia.

La idea que constituye el fundamento de la pionera estructura de Einstein es que la gravedad no es más que deformaciones en el tejido del espacio y el tiempo. Según Einstein, de igual modo que las pelotas de golf siguen las curvas y relieves del *green,* los planetas siguen trayectorias curvadas en el espacio deformado que representa la gravedad del Sol. En otras palabras, en ausencia de materia u otras formas de energía, el espacio-tiempo (la estructura que unifica las tres dimensiones del espacio y la del tiempo) sería plano. La materia y la energía deforman el espacio-tiempo del mismo modo que una bola de *bowling* haría combarse una cama elástica. Los planetas se limitan a seguir los caminos directos en esta geometría curvada, que es una manifestación de la gravedad. Al solucionar el problema del funcionamiento de la gravedad, Einstein proporcionó también la estructura para responder a la pregunta de «con qué velocidad se propaga», que se reducía a determinar la velocidad con que las deformaciones del espacio-tiempo son capaces de viajar. Se trataba de algo similar a calcular la velocidad de las ondas en un estanque. Einstein fue capaz de probar que, en la relatividad general, la velocidad de la gravedad era precisamente la velocidad de la luz, eliminando así la discrepancia entre la teoría de Newton y la relatividad especial. Si el Sol desapareciese, el cambio en la órbita de la Tierra tendría lugar ocho minutos más tarde, y coincidiría con la observación de la desaparición.

El hecho de que Einstein convirtiese el espacio-tiempo deformado de cuatro dimensiones en la piedra angular de su nueva teoría del cosmos se tradujo en la imperiosa necesidad de crear una teoría matemática para esas entidades geométricas. Desesperado, recurrió a un antiguo compañero de clase, el matemático Marcel Grossmann (1878-1936): «He adquirido un inmenso respeto por la matemática, cuyas partes más sutiles consideraba antes nada más que productos suntuarios». Grossmann señaló que la geometría no euclidiana de Riemann (descrita en el capítulo 6) era precisamente la herramienta que Einstein estaba buscando: una geometría de espacios curvados de cualquier número de dimensiones. Se trataba de una demostración palpable de lo que he venido llamando la eficacia «pasiva» de la matemática, y Einstein lo reconoció de inmediato: «Podemos de hecho considerarla [la geometría] como la rama más antigua de la física», declaró, «y sin ella me hubiese sido imposible formular la teoría de la relatividad».

La relatividad general ha sido también comprobada hasta un extraordinario grado de precisión. Obtener estas pruebas no es tarea fácil, ya que la curvatura del espacio-tiempo que introducen objetos como el Sol se mide en partes por millón. Las primeras pruebas estaban asociadas a observaciones dentro del propio sistema solar (como minúsculos cambios en la órbita del planeta Mercurio en comparación con las predicciones de la gravedad de Newton), pero en tiempos más recientes ha sido posible acceder a procedimientos más exóticos. Una de las primeras comprobaciones utiliza un objeto astronómico denominado pulsar doble.

Un pulsar es una estrella extraordinariamente compacta, fuente de emisión de ondas de radio, cuya masa es algo superior a la del Sol, pero cuyo radio es sólo de unos diez kilómetros. La densidad de este tipo de estrellas (denominadas *estrellas de neutrones)* es tan alta que un centímetro cúbico de su materia tiene una masa de ¡más de 60 millones de toneladas! Muchas de estas estrellas de neutrones giran a gran velocidad al tiempo que emiten ondas de radio desde sus polos magnéticos. Cuando el eje magnético se halla a un cierto ángulo respecto del eje de rotación (como se muestra en la figura 61), el haz de radio de uno de los polos puede cruzar nuestra línea de visión una vez con cada rotación, como el destello de luz de un faro.

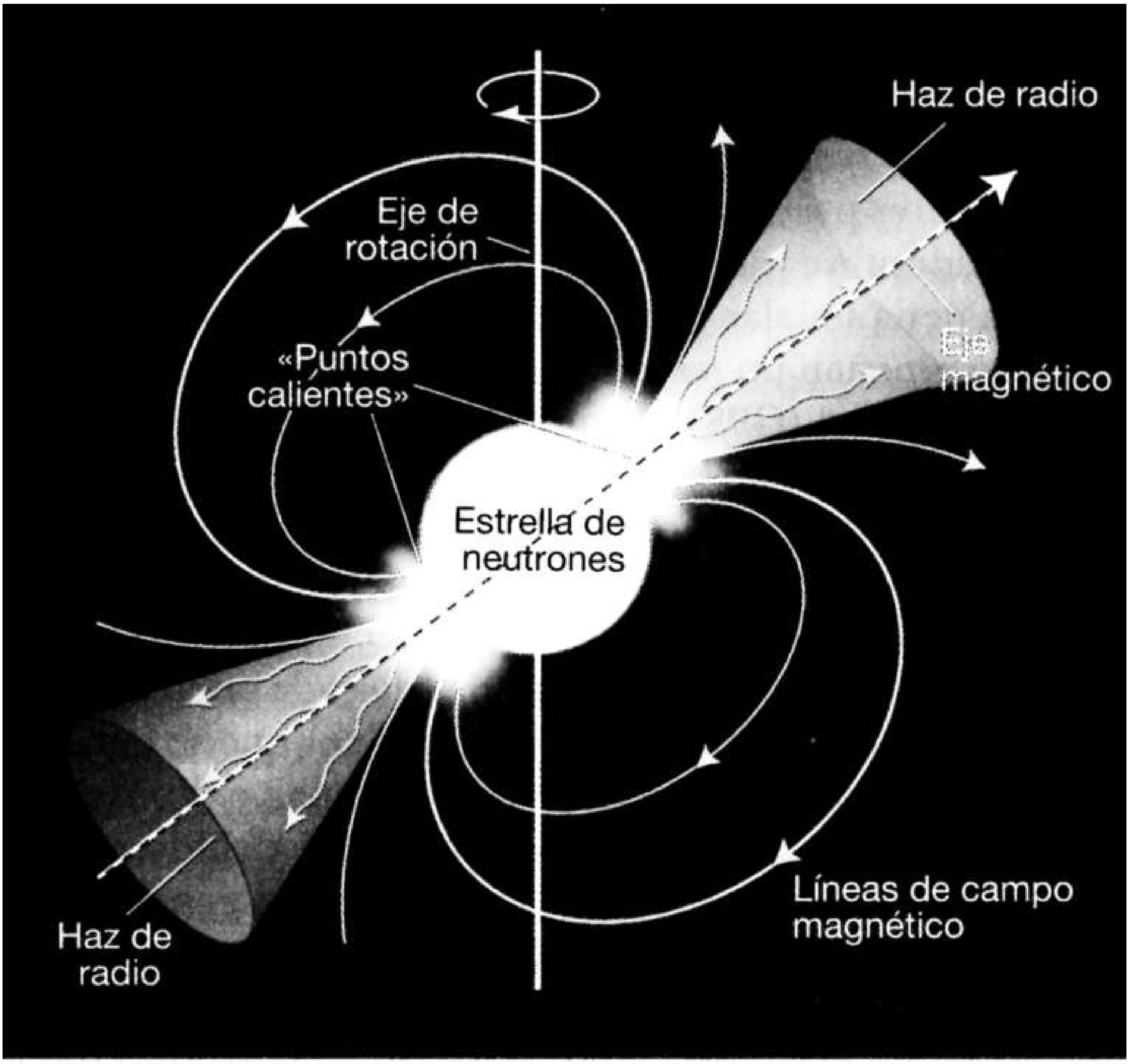


FIGURA 61

En tales casos, parecerá que la emisión de radio se emite en pulsos (de ahí el nombre «pulsar»). A veces, dos pulsares giran alrededor de su centro de gravedad común en una órbita reducida, creando así un sistema de pulsar doble. Estos pulsares dobles constituyen excelentes laboratorios para la verificación de la relatividad general debido a dos de sus propiedades:

(i) Los radiopulsares son espléndidos relojes; su ritmo de rotación es tan estable que, de hecho, superan en precisión a los relojes atómicos.

(ii) Los pulsares son tan compactos que sus campos gravitatorios son muy intensos y producen efectos relativistas significativos. Debido a estas dos características, los astrónomos pueden medir con gran precisión los cambios en el tiempo que la luz tarda en recorrer la distancia entre los pulsares y la Tierra debido al movimiento orbital de dos pulsares en su campo gravitatorio mutuo.

La comprobación más reciente ha sido el resultado de mediciones temporales de gran precisión a lo largo de un período de dos años y medio en el sistema de pulsar doble denominado PSR J0737-3039A/B (esta denominación con aspecto de número telefónico refleja las coordenadas celestes del sistema).[251] Los dos pulsares de este sistema completan una revolución en sólo dos horas y veintisiete minutos, y el sistema se halla a unos dos mil años luz de distancia de la Tierra (un año luz es la distancia que la luz recorre en un año, alrededor de nueve billones de kilómetros). Un equipo de astrónomos dirigido por Michael Kramer, de la Universidad de Manchester, midió las correcciones relativistas al movimiento newtoniano. Los resultados, publicados en octubre de 2006, se ceñían a los valores predichos por la relatividad general con un grado de incertidumbre ¡del 0,05 por 100!

Vale la pena señalar que tanto la relatividad especial como la general desempeñan un papel importante en los Sistemas de Posicionamiento Global (GPS) que nos permiten localizar nuestra posición en la superficie de la Tierra y nos indican el mejor trayecto, ya sea en coche, en avión o a pie. El GPS determina la posición actual del receptor mediante la medida del tiempo que tarda en llegar a él la señal de diversos satélites y efectuando una triangulación a partir de las posiciones conocidas de cada satélite. La relatividad especial predice que los relojes atómicos que se encuentran en los satélites marchan algo más lentos (unas millonésimas de segundo al día) que los que están en el suelo, debido a su movimiento relativo. Al mismo tiempo, la relatividad general predice que los relojes de los satélites marchan más rápido (unas decenas de millonésimas de segundo al día) que los del suelo porque, a gran altura sobre la superficie de la Tierra, la curvatura del espacio-tiempo debida a la masa de la Tierra es menor. Si no se efectuasen las correcciones pertinentes de ambos efectos, los errores de posicionamiento global podrían acumularse a un ritmo de más de ocho kilómetros al día.

La teoría de la gravedad no es más que uno de los numerosos ejemplos que ilustran la «milagrosa» idoneidad y fantástica precisión de la formulación matemática de las leyes de la naturaleza. En este caso, como en muchos otros, lo que las ecuaciones nos proporcionan va mucho más allá de lo que era la intención original. La exactitud de las teorías de Newton y Einstein ha demostrado superar en gran medida la precisión de las observaciones a las que las teorías intentaban originalmente dar explicación.

Quizá el mejor ejemplo de la increíble precisión que es capaz de alcanzar una teoría matemática sea el que proporciona la electrodinámica cuántica (QED, *Quantum Electrodynamics)*, que es la teoría que describe los fenómenos relacionados con las partículas con carga eléctrica y la luz. En 2006, un grupo de físicos de la Universidad de Harvard determinaron el momento magnético del electrón (que mide la intensidad con la que el electrón interacciona con un campo magnético) con una precisión de ocho partes por billón.[252] Por sí mismo, este resultado es una asombrosa proeza experimental. Pero si además se le suma el hecho de que los cálculos teóricos más recientes basados en la QED alcanzan una precisión similar y que los dos resultados coinciden, la exactitud ya es casi increíble. Esta es la reacción de uno de los fundadores de la QED, Freeman Dyson, ante los repetidos éxitos de su teoría: «Me fascina la precisión con la que la Naturaleza baila al son de la melodía que garabateamos de forma tan despreocupada hace cincuenta y siete años, y la forma en la que los experimentadores y los teóricos pueden medir y calcular el ritmo de su danza hasta una parte por billón».

Pero las teorías matemáticas no destacan sólo por su exactitud; otro de sus puntos fuertes es su poder de predicción. Voy a mencionar un par de ejemplos simples para ilustrar este poder, uno del siglo XIX y otro del siglo XX. El primero predijo un nuevo fenómeno; el segundo, la existencia de nuevas partículas elementales.

James Clerk Maxwell, que formuló la teoría clásica del electromagnetismo, probó en 1864 que su teoría *predecía* que los campos eléctricos o magnéticos variables debían generar ondas de propagación. Estas ondas (las conocidas ondas electromagnéticas, como las ondas de radio) fueron detectadas por primera vez por el físico alemán Heinrich Herz (1857-1894), en una serie de experimentos llevados a cabo en los últimos años de la década de 1880.

A finales de la década de 1960, los físicos Steven Weinberg, Sheldon Glashow y Abdus Salam desarrollaron una teoría que trata de forma unificada la fuerza electromagnética y la fuerza nuclear débil.[253] Esta teoría, denominada actualmente teoría *electrodébil*, predecía la existencia de tres partículas (denominadas bosones W^+, W^- y Z) que nunca habían sido observadas. Las partículas se detectaron de forma inequívoca en 1983, durante experimentos en acelerador (en los que se hacen chocar partículas subatómicas entre sí a muy altas energías) dirigidos por los físicos Cario Rubbia y Simón van der Meer.

El físico Eugene Wigner, responsable de la frase «la eficacia inexplicable de la matemática», propuso llamar a estos logros inesperados de las teorías matemáticas «la ley empírica de la epistemología» (la epistemología es la disciplina que investiga el origen y los límites del conocimiento). Su razonamiento consistía en que, si esta «ley» no fuese correcta, a los científicos les habría faltado el aliento y la determinación tan necesarios para una exploración profunda de las leyes de la naturaleza. Sin embargo, Wigner no ofrecía explicación alguna para esta «ley empírica de la epistemología», sino que más bien la veía como un «regalo extraordinario» por el que debemos estar agradecidos, aunque no comprendamos su origen. Según Wigner, este «regalo» contiene la esencia de la cuestión sobre la eficacia inexplicable de la matemática.

Creo que, a estas alturas, ya hemos reunido suficientes pistas para intentar responder a nuestras preguntas iniciales: ¿Por qué la matemática es tan eficaz y productiva para explicar el mundo que nos rodea, e incluso es capaz de generar nuevos conocimientos? En última instancia, la matemática ¿es descubierta o inventada?

9
Acerca de la mente humana, la matemática y el universo

Las dos preguntas: (i) ¿Tiene la matemática una existencia independiente de la mente humana?, y (ii) ¿Por qué los conceptos matemáticos son aplicables mucho más allá del contexto en el que se desarrollaron originalmente?, están relacionadas entre sí por caminos complejos. Pero, para simplificar el comentario, voy a intentar encararlas una tras otra.

En primer lugar podemos preguntarnos cuál es la posición de los matemáticos actuales sobre la cuestión de si la matemática es un descubrimiento o un invento. En su espléndido libro *The Mathematical Experience*, los matemáticos Philip Davis y Reuben Hersh describen la situación del siguiente modo:[254] «La mayor parte de los autores parecen estar de acuerdo en que un matemático típico es platónico (es decir, opina que es un descubrimiento) los días laborables y un formalista (es decir, piensa que es un invento) los domingos. Esto es, cuando el matemático está haciendo matemática, está convencido de que trata con una realidad objetiva cuyas propiedades intenta determinar. En cambio, si se le obliga a dar una versión filosófica de esta realidad, prefiere fingir que, después de todo, no cree en ella».

Aparte de la tentación de hablar de «los matemáticos y las matemáticas» para reflejar los cambios demográficos en la disciplina, tengo la impresión de que esta caracterización sigue siendo cierta para muchos de los actuales matemáticos y físicos teóricos. Sin embargo, algunos matemáticos del siglo XX tomaron un claro partido por una u otra postura. En representación del punto de vista platónico tenemos a G. H. Hardy, que afirma en *A Mathematician's Apology*:[255]

> Para mí, y supongo que para la mayoría de los matemáticos, existe otra realidad, a la que llamaré «realidad matemática», y no existe acuerdo alguno acerca de la naturaleza de esta realidad, ni entre los matemáticos ni entre los filósofos. Algunos sostienen que se trata de algo «mental» y que, en cierto sentido, la construimos nosotros; otros opinan que es externa e independiente de nosotros. Si alguien pudiese dar cuenta de la realidad matemática de una forma convincente habría resuelto un gran número de los problemas metafísicos más complejos. Si pudiese incluir la realidad física en su explicación, los habría resuelto todos.
>
> No es mi intención discutir aquí ninguna de estas cuestiones, ni siquiera en el supuesto de que tuviese la competencia para ello, pero, para evitar malentendidos, expondré mi postura de forma dogmática. Creo que la realidad matemática reside fuera de nosotros, que nuestra función es descubrirla y observarla, y que los teoremas que demostramos y que, pecando de grandilocuencia, denominamos «nuestras creaciones», son simples anotaciones de nuestras observaciones. Este ha sido, de uno u otro modo, el punto de vista sostenido por numerosos y reputados filósofos empezando por Platón, y a partir de ahora utilizaré el lenguaje natural de una persona que es partidaria de él.

Los matemáticos Edward Kasner (1878-1955) y James Newman (1907-1966) expresaban justamente la postura contraría en *Mathematics and the Imagination:*[256]

> No es sorprendente que el prestigio de la matemática no tenga parangón en ningún otro campo del pensamiento intencional; el número de avances científicos que ha hecho posible hacen que sea a un tiempo indispensable desde un punto de vista práctico y la obra cumbre de la abstracción pura, de modo que el reconocimiento de su papel destacado entre las hazañas intelectuales de la humanidad no es ni más ni menos que el reconocimiento de un mérito real.
>
> Pero, a pesar de esta preeminencia, la primera valoración significativa de la matemática tuvo lugar recientemente, con la aparición de la geometría no euclidiana y la geometría tetradimensional. Eso no significa que se deban minimizar los avances efectuados en el cálculo, la teoría de probabilidades, la aritmética del infinito, la topología y otras ramas que hemos comentado. Cada uno de estos avances ha ampliado la visión de la matemática y profundizado en su significado, así como en nuestra comprensión del universo físico. Sin embargo, ninguno de ellos ha contribuido a la introspección matemática, al conocimiento de las relaciones entre las distintas partes de la disciplina entre sí y con el conjunto en mayor medida que las herejías no euclidianas.
>
> El coraje del espíritu crítico que se halla en la génesis de estas herejías nos ha permitido superar la noción de que las verdades matemáticas tienen una existencia independiente externa a nuestras mentes. Ahora incluso nos parece extraño que tal noción pudiese haber existido. Y sin embargo, es lo que hubiesen creído Pitágoras, Descartes y cientos de otros grandes matemáticos antes del siglo XIX. En la actualidad, la matemática ha roto sus cadenas y se ha liberado de sus fronteras. Sea cual sea su esencia, ahora reconocemos que es tan libre como la mente y tan indómita como la imaginación. La geometría no euclidiana demuestra que la matemática, a diferencia de la música de las esferas, es obra de la mano del hombre y está sujeta únicamente a las limitaciones que le imponen las leyes del pensamiento.

Vemos aquí, en contraste con la precisión y la certeza que caracterizan las afirmaciones matemáticas, una divergencia de opiniones más propia de los debates filosóficos o políticos. Pero esto no debería sorprendernos. La cuestión de si la matemática es inventada o descubierta no es, en realidad, una cuestión matemática.

La noción de «descubrimiento» implica una existencia previa en algún universo, ya sea real o metafísico. El concepto de «invento» implica a la mente humana, ya sea de forma individual o colectiva. Entonces, la pregunta está relacionada con una combinación de disciplinas entre las que pueden hallarse la física, la filosofía, la matemática, la ciencia cognitiva e incluso la antropología, pero desde luego no es exclusiva la matemática (o, al menos, no de forma directa). En consecuencia, es posible que no sean los matemáticos los que mejor puedan responderla. Después de todo, aunque los poetas pueden hacer magia con las palabras, posiblemente no sean los mejores lingüistas, del mismo modo que los filósofos más profundos no suelen ser expertos en las funciones del cerebro. La respuesta a la cuestión «inventada o descubierta» sólo puede proceder (si es que realmente es posible hallarla) de un cuidadoso examen de numerosas claves procedentes de una amplia variedad de disciplinas.

METAFÍSICA, FÍSICA Y COGNICIÓN

Los que creen que la matemática existe en un universo independiente de los humanos pueden aún dividirse en dos tipos en lo que respecta a la identificación de la naturaleza de este universo.[257] En primer lugar se encuentran los «verdaderos» platónicos, para los que la matemática reside en un mundo eterno y abstracto de formas matemáticas. Luego están los que sugieren que las estructuras matemáticas son una parte real del mundo natural. Ya hemos tratado el platonismo puro y algunas de sus limitaciones filosóficas con cierta amplitud, de modo que voy a entrar en detalles acerca de la otra perspectiva.[258]

Quizá la persona que abogue por la versión más extrema y especulativa de la tesis de «la matemática como parte del mundo físico» sea un compañero astrofísico, Max Tegmark del Massachussets Institute of Technology.

Tegmark sostiene que «nuestro universo no sólo se describe mediante la matemática, sino que *es* matemática» (la cursiva es mía).[259] Su argumento empieza por la hipótesis no especialmente polémica de que existe una realidad física externa independiente de los seres humanos. A continuación pasa a examinar cuál podría ser la naturaleza de una teoría que englobase dicha realidad (lo que los físicos llaman una «Teoría de todo»). Al ser este mundo físico totalmente independiente de los humanos, sigue Tegmark, su descripción debe estar libre de cualquier «carga» humana (en particular, el lenguaje humano). En otras palabras, la teoría definitiva no puede incluir conceptos tales como «partículas subatómicas», «cuerdas vibratorias», «deformación del espacio-tiempo» u otros constructos concebidos por el hombre. Partiendo de esta base, Tegmark llega a la conclusión de que la única descripción posible del cosmos implica únicamente conceptos abstractos y relaciones entre ellos, lo que para él constituye la definición operativa de la matemática.

El argumento de Tegmark para una realidad matemática es realmente fascinante y, en el caso de resultar cierto, supondría un avance crucial hacia la solución del problema de la «inexplicable eficacia» de la matemática. En un universo identificado con la matemática, el hecho de que esta disciplina se ajuste como un guante al comportamiento de la naturaleza no puede resultar sorprendente. Por desgracia, en mi opinión el razonamiento de Tegmark no es especialmente persuasivo. El salto de la existencia de la realidad externa (independiente de los seres humanos) a la conclusión de que, en palabras de Tegmark, «es necesario creer en lo que yo denomino la hipótesis del universo matemático: que nuestra realidad física es una estructura matemática», implica, en mi opinión, un juego de prestidigitación. Tegmark intenta caracterizar lo que realmente es la matemática con estas palabras: «Para el lógico moderno, una estructura matemática es precisamente un conjunto de entidades abstractas y las relaciones entre ellas». ¡Pero este lógico moderno es humano! En otras palabras, Tegmark no *demuestra* en ningún momento que nuestra matemática no ha sido inventada por los seres humanos, sino que se limita a darlo por sentado. Además, tal como señala el neurobiólogo francés Jean-Pierre Changeux en respuesta a una tesis similar: «Afirmar la realidad física de los objetos matemáticos en el mismo nivel que los fenómenos naturales que se estudian en biología plantea, en mi opinión, un considerable problema epistemológico. ¿Cómo puede un estado físico interno de nuestro cerebro representar otro estado físico externo a él?».[260]

Otros intentos de situar los objetos matemáticos en la realidad física externa se apoyan simplemente en la eficacia de la matemática para explicar la naturaleza. Pero en estos casos se supone que no es posible ninguna otra explicación de la eficacia de la matemática, lo que, como mostraré más adelante, es falso.

Si la matemática no reside en el mundo platónico, fuera del espacio y del tiempo, ni en el mundo físico, ¿significa que es únicamente un invento de los seres humanos? Por supuesto que no. De hecho, mi razonamiento en la próxima sección será que la mayoría de la matemática consiste en descubrimiento. Pero, antes de avanzar más allá, será útil examinar las opiniones de los científicos cognitivos contemporáneos. El motivo es que, aunque la matemática consistiese únicamente en descubrimientos, serían de todos modos descubrimientos llevados a cabo por matemáticos humanos utilizando sus cerebros.

Con el fabuloso avance de las ciencias cognitivas en los últimos años, era lógico pensar que los neurobiólogos y los psicólogos prestasen atención a la matemática y, específicamente, a la búsqueda de los fundamentos de la matemática en la cognición humana. Un somero repaso a las conclusiones de la mayor parte de científicos cognitivos puede traer a la mente la frase de Mark Twain: «Si un hombre empuña un martillo, todo le parece un clavo». Salvo por pequeñas variaciones en el énfasis, prácticamente todos los neuropsicólogos y biólogos determinan que la matemática es un invento humano. Sin embargo, al prestar una mayor atención a los detalles, se aprecia que, a pesar de que la interpretación de los datos cognitivos es más bien ambigua, no hay duda de que el punto de vista cognitivo representa una fase nueva y pionera en la búsqueda de los fundamentos de la matemática. He aquí una pequeña pero representativa muestra de los comentarios de los científicos cognitivos.

El neurocientífico francés Stanislas Dehaene, cuyo principal interés es la cognición de los números, concluía en su libro de 1997 *The Number Sense:* «La intuición de los número está profundamente implantada en nuestro cerebro».[261] Esta postura es, de hecho, próxima a la de los intuicionistas, que pretendían basar toda la matemática en la forma pura de la intuición de los números naturales. Dehaene razona que los descubrimientos efectuados en psicología acerca de la aritmética confirman que «el número forma parte de los objetos naturales del pensamiento, las categorías innatas mediante las cuales percibimos el mundo». A partir de otro estudio llevado a cabo con los Mundurukú (un grupo indígena amazónico completamente aislado), Dehaene y sus colaboradores agregaron un juicio similar acerca de la geometría en 2006: «La comprensión espontánea de los conceptos geométricos y de los mapas por parte de esta remota comunidad humana ofrece pruebas de que los conocimientos geométricos fundamentales, igual que la aritmética básica, son constituyentes universales de la mente humana».[262] Pero no todos los científicos cognitivos están de acuerdo con estas conclusiones.[263] Algunos señalan, por ejemplo, que el éxito obtenido por los Mundurukú en el reciente estudio geométrico, en el que tenían que identificar una curva entre líneas rectas, un rectángulo entre cuadrados, una elipse entre círculos, etc., podría tener más relación con su capacidad visual para distinguir un objeto distinto entre otros iguales que un conocimiento geométrico innato.

El neurobiólogo francés Jean-Pierre Changeux, en un fascinante diálogo acerca de la naturaleza de la matemática con el matemático (de sensibilidad platónica) Alain Connes, publicado en *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics* obsevaba lo siguiente:[264] «La razón de que los objetos matemáticos no tienen nada que ver con el mundo perceptible tiene que ver … con su carácter generativo, su capacidad de dar origen a otros objetos. Es necesario destacar aquí que existe en el cerebro lo que podríamos llamar un «compartimiento consciente», una especie de espacio físico para la simulación y creación de nuevos objetos … En algunos sentidos, estos nuevos objetos matemáticos se comportan como seres vivos: como los seres vivos, son objetos físicos susceptibles de evolucionar de forma muy rápida; a diferencia de los seres vivos, con la excepción específica de los virus, evolucionan en nuestro cerebro».

Finalmente, la afirmación más categórica en el debate de invención contra descubrimiento la efectuaron el lingüista cognitivo George Lakoff y el psicólogo Rafael Núñez en su controvertido libro *Where Mathematics Comes From*, en el que declaraban:[265]

> La matemática es una parte natural de nuestra condición humana; surge de nuestro cuerpo, de nuestro cerebro y de nuestra experiencia cotidiana del mundo. (Lakoff y Núñez hablan pues de la matemática como algo que surge de una «mente encarnada») … La matemática es un sistema de conceptos humanos que utiliza de forma extraordinaria las herramientas ordinarias de la cognición humana … Los seres humanos somos los responsables de la creación de la matemática, y de su conservación y ampliación. El retrato de la matemática tiene rostro humano.

Los científicos cognitivos basan sus conclusiones en lo que consideran una persuasiva abundancia de pruebas que son el resultado de numerosos experimentos. Algunas de estas pruebas incluyen estudios con imágenes funcionales del cerebro durante la realización de tareas matemáticas. Otros han examinado la competencia matemática de niños, de grupos de cazadores-recolectores que no han sufrido escolarización, como los Mundurukú, y de personas con diversos grados de daños cerebrales. Casi todos los investigadores están de acuerdo en que algunas capacidades matemáticas parecen ser innatas. Por ejemplo, todos los humanos son capaces de apreciar de un vistazo si están viendo uno, dos o tres objetos (esta capacidad se denomina *subitizar).* Una versión muy limitada de la aritmética (las operaciones de agrupar, emparejar y adiciones y sustracciones muy simples) podría también ser innata, del mismo modo que una comprensión muy básica de los conceptos geométricos (aunque esta última afirmación es más polémica). Los neurocientíficos han identificado también regiones del cerebro, como el giro angular en el hemisferio izquierdo,[266] que parecen ser esenciales para la manipulación de números y cálculos matemáticos, pero que no son esenciales para el lenguaje ni para la memoria operativa.

Según Lakoff y Núñez, una de las principales herramientas para el avance más allá de las habilidades innatas es la construcción de metáforas conceptuales mediante procesos que traducen conceptos a otros más concretos. Por ejemplo, la concepción de la aritmética se fundamenta en una metáfora básica, la de la recolección de objetos. Por otra parte, el álgebra de clases de Boole, más abstracta, vinculaba de forma metafórica clases a números. El elaborado escenario desarrollado por Lakoff y Núñez ofrece puntos de vista interesantes sobre las razones por las que los seres humanos encuentran algunos conceptos matemáticos mucho más difíciles que otros. Otros investigadores, como la neurocientífíca cognitiva Rosemary Varley de la Universidad de Sheffield,[267] sugieren que como mínimo algunas estructuras matemáticas parasitan la facultad del lenguaje, es decir, las capacidades matemáticas se desarrollan a partir de las herramientas mentales utilizadas para construir el lenguaje.

Los científicos cognitivos abogan claramente por una asociación de nuestra matemática con la mente humana y se oponen al platonismo. De todos modos, es interesante apreciar que el argumento, en mi opinión, más claro contra el platonismo no viene de la neurobiología, sino de sir Michael Atiyah, uno de los matemáticos más insignes del siglo XX. De hecho, ya mencioné su línea de razonamiento en el capítulo 1, pero ahora me gustaría presentarla con mayor detalle.

Si tuviese que elegir el concepto de nuestra matemática con mayor probabilidad de existir de forma independiente de la mente humana, ¿cuál elegiría? La mayor parte de las personas llegarían posiblemente a la conclusión de que deben ser los números naturales. ¿Qué puede haber más «natural» que 1, 2, 3…? Incluso el matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891), de tendencia intuicionista, declaró: «Dios creó los números naturales. Todo lo demás es obra del hombre». Así, si se pudiese demostrar que incluso el concepto de número natural tiene su origen en la mente humana, representaría un gran avance en favor del paradigma del «invento». Atiyah expone de este modo sus argumentos como ya vimos: «Pero imaginemos que la inteligencia no se hubiese desarrollado en el hombre, sino en una especie de medusa colosal, solitaria y aislada en los abismos del océano Pacífico. Este ente no tendría experiencia alguna de los objetos individuales, ya que sólo estaría rodeado de agua. Sus datos sensoriales básicos se reducirían a movimiento, temperatura y presión. En este continuo puro, el concepto de discreto no podría surgir ni, por consiguiente, habría nada que contar».[268] En otras palabras, Atiyah está convencido de que incluso algo tan básico como el concepto de número natural ha sido *creado* por los seres humanos mediante la abstracción (o, como dirían los científicos cognitivos, a través de metáforas primarias) de elementos del mundo físico. Dicho de otro modo, el número 12, por ejemplo, representa una abstracción común a todos los objetos que van agrupados en docenas, de la misma forma que la palabra «pensamientos» representa una diversidad de procesos que tienen lugar en nuestro cerebro.

El lector puede poner objeciones al uso como prueba del universo hipotético de la medusa, argumentando que sólo existe un único universo inevitable y que cada suposición debe examinarse en el contexto de este universo. Sin embargo, esto sería equivalente a admitir que el concepto de número natural depende de algún modo del universo de experiencias humanas. Obsérvese que Lakoff y Núñez se referían precisamente a esto cuando hablaban de la matemática como algo «encarnado».

Hasta ahora he argumentado que los conceptos de nuestra matemática tienen su origen en la mente humana, y quizá se pregunte por qué había insistido anteriormente en que gran parte de la matemática es, de hecho, descubierta, lo que parece estar más próximo al platonismo.

Invento y descubrimiento

En el lenguaje cotidiano, la distinción entre invento y descubrimiento es en ocasiones de una claridad meridiana, mientras que en otras es algo más borroso. Nadie diría que Shakespeare descubrió Hamlet ni que Madame Curie inventó el radio. Al mismo tiempo, los nuevos fármacos para el tratamiento de ciertas enfermedades se suelen anunciar como descubrimientos, a pesar de que con frecuencia implican la meticulosa síntesis de nuevos compuestos químicos. Me gustaría describir en cierto detalle un ejemplo matemático muy específico que ayudará, no sólo a aclarar la diferencia entre invento y descubrimiento, sino que ofrecerá también valiosa información sobre los procesos de evolución y progreso de la matemática.

En el Libro VI de los *Elementos*, la monumental obra de Euclides sobre geometría, hay una definición de cierta división de una línea en dos partes desiguales (el Libro II contiene otra definición, en términos de áreas). Según Euclides, si una línea AB se divide mediante un punto C de tal modo (figura 62) que la relación entre las longitudes de los dos segmentos (AC/CB) sea igual a la de la línea dividida por el segmento más largo (AB/AC), se dice que la línea se ha dividido en «extrema y media razón».

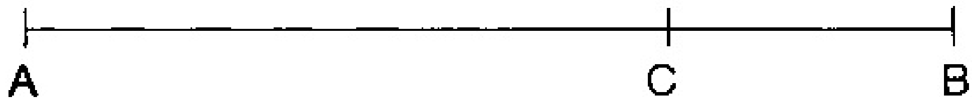


FIGURA 62

Dicho de otra forma, si AC/CB = AB/AC, cada una de estas proporciones se denomina «razón extrema y media». Desde el siglo XIX, esta razón se denomina popularmente *Razón áurea*.[269] Basta un poco de álgebra básica para hallar que la razón áurea es igual a $(1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887\ldots$

La primera pregunta que uno puede plantearse es por qué Euclides se tomó el trabajo de definir esta división en especial y asignar un nombre a la razón. Después de todo, una línea se puede dividir de infinitas formas. La respuesta a esta pregunta se halla en la herencia cultural y mística de los pitagóricos y de Platón. Recordemos que los pitagóricos estaban obsesionados por los números. Pensaban que los números impares eran masculinos y buenos y, mostrando un cierto prejuicio, que los pares eran femeninos y malos. Tenían una afinidad especial por el número 5, la unión del 2 y del 3, el primer número par (femenino) y el primero impar (masculino). (El número 1 no se consideraba un número, sino el generador de todos los números.) Así, para los pitagóricos, el número 5 representaba el amor y el matrimonio, y utilizaban el pentagrama (la estrella de cinco puntas de la figura 63) como símbolo de su hermandad.

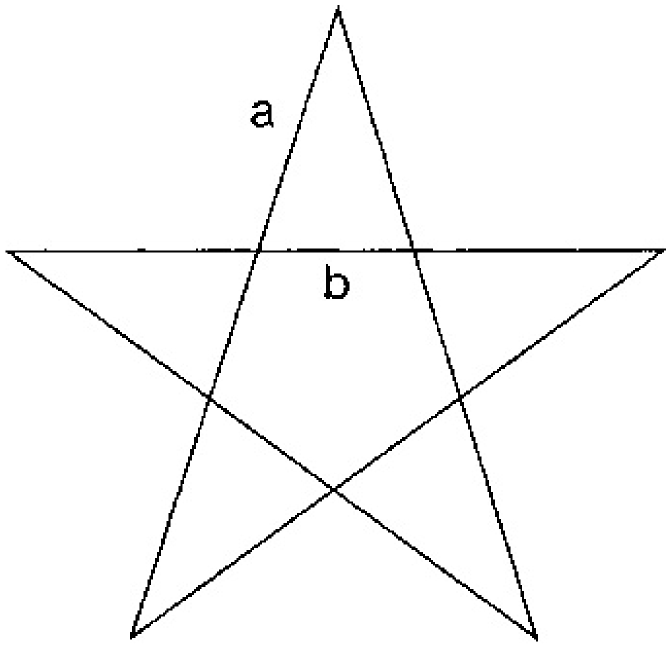


FIGURA 63

Y aquí es donde hace su aparición por primera vez la razón áurea. Si se toma un pentagrama regular, la razón entre el lado de cualquiera de los triángulos y su base implícita (a/b en la figura 63) es precisamente igual a la razón áurea. De forma similar, la razón entre cualquiera de las diagonales de un pentágono regular y su lado (c/d en la figura 64) es también igual a la razón áurea.

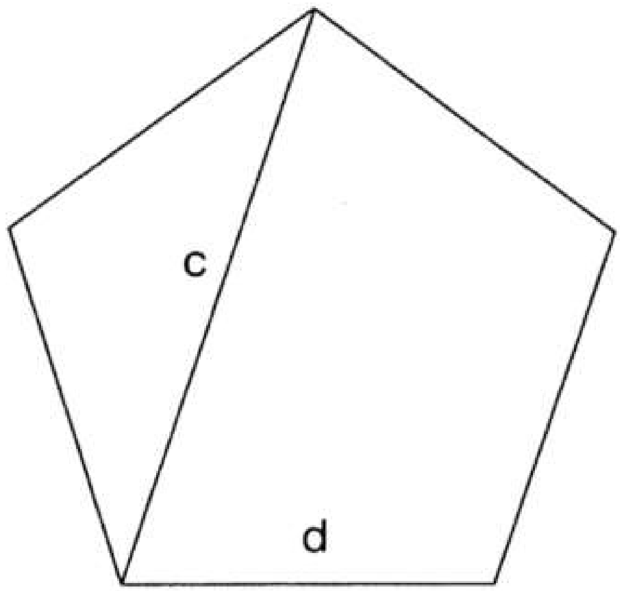


FIGURA 64

De hecho, para construir un pentágono con una regla y un compás (el proceso habitual de construcción geométrica para los antiguos griegos) es necesario dividir una línea según la razón áurea.

Platón agregó un nuevo aspecto al significado mítico de la razón áurea. Los antiguos griegos creían que todo el universo se componía de cuatro elementos: tierra, fuego, aire y agua. En *Timeo,* Platón intentaba explicar la estructura de la materia utilizando los cinco sólidos regulares que actualmente llevan su nombre, los *sólidos platónicos* (figura 65).

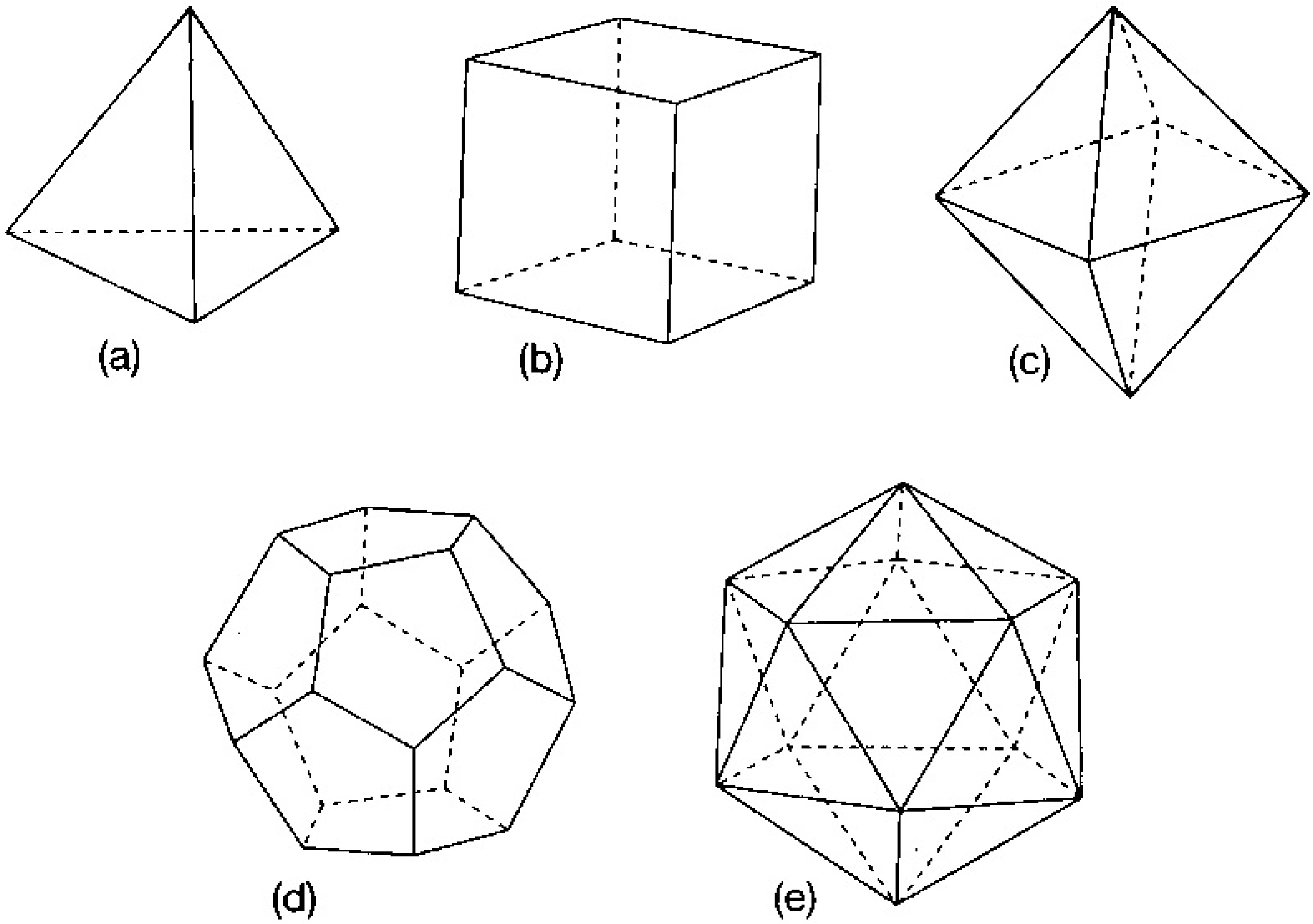


FIGURA 65

Estos sólidos convexos (el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro) son los únicos cuyas caras son polígonos regulares iguales (en cada sólido) y cuyos vértices se hallan sobre una esfera. Platón asoció cuatro de los sólidos con los cuatro elementos cósmicos básicos. Por ejemplo, la Tierra estaba asociada con el estable cubo, el penetrante fuego con el puntiagudo tetraedro, el aire con el octaedro y el agua con el icosaedro. Acerca del dodecaedro (figura 65 (d)), Platón escribía en *Timeo:* «Quedando una sola figura compuesta, la quinta, Dios la utilizó para el Todo, y la bordó con motivos y dibujos». Así, el dodecaedro representaba el universo en su conjunto. Vale la pena observar que la razón áurea es parte indisoluble del dodecaedro, con sus doce caras pentagonales. Tanto su volumen como su superficie pueden expresarse en función de la razón áurea de forma simple (también en el caso del icosaedro).

Así, la historia nos enseña que, a base de muchos ensayos y errores, los pitagóricos y sus seguidores *descubrieron* formas de construir ciertas figuras geométricas que representan conceptos importantes desde su perspectiva, como el amor y el cosmos en su conjunto. No es sorprendente que, junto con Euclides (que documentó esta tradición) *inventasen el concepto* de razón áurea, relacionado con estas construcciones, y lo nombrasen. A diferencia de cualquier otra razón arbitraria, el número 1,618… se convirtió en el foco de una intensa investigación a lo largo de la historia, y en la actualidad sigue apareciendo en los lugares más insospechados. Por ejemplo, dos milenios después de Euclides, el astrónomo alemán Johannes Kepler *descubrió* que este número aparece, de forma casi milagrosa, en relación con una secuencia numérica denominada *serie de Fibonacci.* La característica de la serie de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…) es que, a partir del tercero, cada número es la suma de los dos anteriores (esto es: 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; etc.) Al dividir cada número de la serie por el inmediatamente anterior (por ejemplo, 144/89; 233/144 …), se halla que los cocientes oscilan, pero se van aproximando a la razón áurea al avanzar en la secuencia. Por ejemplo (redondeando al sexto decimal): 144/89 = 1,617978; 233/144 = 1,618056; 377/233 = 1,618026, etc.

En épocas más modernas, la serie de Fibonacci (y, junto a ella, la razón áurea) se han hallado en la disposición de las hojas de algunas plantas (un fenómeno denominado *filotaxis)* y en la estructura de los cristales de ciertas aleaciones de aluminio.

¿Por qué considero que la definición de Euclides del *concepto* de razón áurea es un invento? Porque la inventiva de Euclides señaló esta razón en particular y atrajo a ella la atención de los matemáticos. Por otro lado, en China, donde el concepto de razón áurea no se había *inventado,* la literatura matemática no contenía esencialmente referencia alguna a ella. En la India, en donde tampoco se había inventado el concepto, la razón áurea aparece de forma lateral únicamente en algunos insignificantes teoremas de trigonometría.

Se pueden hallar numerosos ejemplos para demostrar que la pregunta «La matemática ¿es descubierta o inventada?» está mal planteada. Nuestra matemática es una *combinación de inventos y descubrimientos.* Los axiomas de la geometría euclidiana como *concepto* fueron un invento, del mismo modo que lo fueron las reglas del ajedrez. Los axiomas fueron complementados asimismo por otros diversos conceptos inventados, como triángulos, paralelogramos, elipses, la razón áurea y otros. Por otro lado, los teoremas de la geometría euclidiana fueron en su mayor parte descubrimientos; se trataba de los caminos que vinculaban entre sí los distintos conceptos. En algunos casos, las demostraciones generaron los teoremas: los matemáticos examinaban lo que podían demostrar y a partir de ahí deducían los teoremas. En otros casos, como describe Arquímedes en *El método,* se halló primero la *respuesta* a determinada cuestión de interés y, a continuación, se averiguaba la demostración.

En general, los conceptos eran inventados. Como *concepto,* los números primos eran un invento, pero todos los teoremas acerca de números primos fueron descubiertos.[270] Los matemáticos de la antigua Babilonia, Egipto y China no inventaron nunca el concepto de número primo, a pesar del avanzado estado de su matemática. ¿Podríamos decir que simplemente no habían «descubierto» los números primos? No más de lo que podemos afirmar que el Reino Unido no «descubrió» una constitución única, codificada y documental. Del mismo modo que un país puede sobrevivir sin constitución, sin el concepto de número primo es posible desarrollar una matemática elaborada. ¡Y vaya si lo era!

¿Sabemos por qué los griegos inventaron conceptos como los axiomas y los números primos? Aunque no es posible afirmarlo con seguridad, podemos suponer que formaba parte de su incansable afán por investigar los constituyentes fundamentales del universo. Los números primos eran los bloques de construcción básicos de los números, del mismo modo que los «átomos» lo eran de la materia. De forma parecida, los axiomas eran la fuente de la que manaban, según se suponía, todas las verdades de la geometría. El dodecaedro representaba todo el cosmos, y la razón áurea era el concepto que otorgaba existencia a ese símbolo.

Este debate saca a relucir otro de los aspectos interesantes de la matemática: que ésta forma parte de la cultura humana. Una vez que los griegos inventaron el método axiomático, los matemáticos europeos que vinieron a continuación siguieron sus pasos y adoptaron la misma filosofía y las mismas prácticas. Como observó el antropólogo Leslie A. White (1900-1975): «Si Newton se hubiese criado dentro de la cultura de una tribu de Sudáfrica, hubiese calculado como un miembro de la tribu». [271] Lo más probable es que sea esta estructura cultural de la matemática la responsable de que muchos de los descubrimientos matemáticos (como los invariantes de nudos) e incluso algunos de los principales inventos (como el cálculo) los hiciesen de forma simultánea varias personas trabajando de modo independiente.

¿Habla matemática?

En una sección anterior he comparado la trascendencia del concepto abstracto de un número con el del significado de una palabra. La matemática ¿es un tipo de lenguaje? Desde el punto de vista de la lógica matemática, por un lado, y de la lingüística, por otro, parece que, hasta cierto punto, lo es. Las obras de Boole, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Gödel y sus actuales seguidores (en especial en áreas tales como la sintaxis y la semántica filosóficas, en paralelo con la lingüística) han demostrado que la gramática y el razonamiento están íntimamente relacionados con el álgebra de la lógica simbólica. Entonces, ¿por qué hay más de 6.500 lenguas pero sólo una matemática? En realidad, las distintas lenguas tienen numerosas características de diseño comunes. Por ejemplo, en la década de 1960, el lingüista norteamericano Charles F. Hockett (1916-2000) señaló que todas las lenguas tienen incorporados mecanismos para la adquisición de nuevas palabras y expresiones (por ejemplo, «ratón», «portátil», «música indie», etc.)[272] Del mismo modo, las lenguas humanas permiten expresar la abstracción (por ejemplo, surrealismo, ausencia o grandeza), la negación (como «no» o «ninguno») y la hipótesis («si la abuela hubiese tenido ruedas podría haber sido un autobús»). Quizá dos de las características más importantes de las lenguas sean *el hecho de que son abiertas* y *su libertad para responder a estímulos.* La primera represen ta la capacidad para crear y comprender frases que nunca antes se han dicho.[273] Por ejemplo, yo podría crear con facilidad una frase como «No se puede reparar la presa de Hoover con chicle» y, aunque lo más probable es que nunca antes haya oído esa frase, la entenderá sin ningún problema. La libertad de respuesta a estímulos es la capacidad de elegir cómo responder a un estímulo recibido, o incluso si queremos responder. Por ejemplo, la respuesta a la pregunta de la cantautora Carole King en su canción *Will You Still Love Me Tomorrow?* podría ser cualquiera de éstas: «No sé si seguiré vivo mañana», «Por supuesto», «Ni siquiera te quiero hoy», «No tanto como a mi perro», «Esta es sin duda tu mejor canción» o incluso «Me pregunto quién ganará el Open de Australia este año». Muchas de estas características (abstracción, negación, apertura y capacidad de evolución) son también típicas de la matemática.[274] Los lingüistas cognitivos señalan también que las lenguas humanas utilizan metáforas para expresar casi cualquier cosa. Y lo que es aún más importante: desde 1957, el año en que el célebre lingüista Noam Chomsky publicó su revolucionaria obra *Syntactic Structures*,[275] una gran parte de los esfuerzos de los lingüistas se han dedicado al concepto de gramática universal, es decir, los principios subyacentes a todas las lenguas. Dicho de otro modo, lo que parece una Torre de Babel de diversidad puede en realidad ocultar una sorprendente similitud estructural. De hecho, si no fuese así, probablemente los diccionarios nunca hubiesen servido para nada.

Es lícito seguir preguntándose por la uniformidad de la matemática, tanto en términos temáticos como de notación simbólica. La primera parte de esa pregunta es especialmente enigmática. Casi todos los matemáticos opinan que la matemática tal como la conocemos ha evolucionado a partir de las ramas básicas de la geometría y la aritmética practicadas en las antiguas civilizaciones de Babilonia, Egipto y Grecia. No obstante, ¿era realmente inevitable que los inicios de la matemática se hallasen precisamente en esas disciplinas? En su monumental trabajo *Un nuevo tipo de ciencia,* el científico computacional Stephen Wolfram sostenía que no tenía por qué ser así.[276] En concreto, Wolfram demostraba cómo, a partir de conjuntos de reglas básicas que actúan como breves programas informáticos (lo que se denomina *autómatas celulares)* es posible desarrollar un tipo de matemática radicalmente distinto. Estos autómatas celulares se podrían utilizar (en principio) como herramientas básicas para modelar los fenómenos naturales, en sustitución de las ecuaciones diferenciales que han dominado las ciencias durante tres siglos. Entonces, ¿qué fue lo que hizo que las antiguas civilizaciones descubriesen e inventasen nuestro «tipo» determinado de matemática? No estoy seguro, pero creo que las particularidades del sistema de percepción de los seres humanos pueden haber tenido un papel fundamental en ello. Los humanos detectan y perciben con facilidad aristas, líneas rectas y curvas suaves. Obsérvese, por ejemplo, la precisión con la que se puede determinar a simple vista si una línea es perfectamente recta o el poco esfuerzo que cuesta distinguir entre un círculo y una forma ligeramente elíptica. Estas capacidades perceptivas pueden haber modelado nuestra experiencia del mundo y, por tanto, habernos guiado hacia una matemática basada en objetos discretos (aritmética) y figuras geométricas (geometría euclidiana).

En cuanto a la uniformidad de la notación simbólica, quizá sea un resultado de lo que se podría denominar «efecto Microsoft Windows»: todo el mundo utiliza el sistema operativo de Microsoft, no porque fuese inevitable conformarse a ese estándar, sino porque, una vez que el sistema operativo empezó a dominar el mercado de ordenadores, todos tuvieron que adoptarlo para facilitar las comunicaciones y la disponibilidad de los productos. De forma similar, la notación simbólica occidental ha impuesto su uniformidad en el mundo de la matemática.

La astronomía y la astrofísica pueden aún ofrecer interesantes contribuciones a la cuestión del «invento y descubrimiento». Los estudios más recientes de planetas extrasolares parecen indicar que alrededor del 5 por 100 de las estrellas poseen al menos un planeta girando a su alrededor, y que esta proporción permanece, en promedio, aproximadamente constante en toda la Vía Láctea. No se sabe aún qué proporción de estos planetas es *similar a la Tierra,* pero es posible que la galaxia contenga miles de millones de ellos. Aunque sólo una parte pequeña (pero no despreciable) de esas Tierras estuviesen en la *zona habitable* (el intervalo de órbitas que permiten la existencia de agua en estado líquido en la superficie) de sus estrellas, la probabilidad de que se desarrolle en esos planetas vida en general y, en particular, vida inteligente, no es nula. Si descubriésemos otra forma de vida inteligente *con la que podernos comunicar,* obtendríamos valiosísima información acerca de los formalismos que esta civilización habría desarrollado para explicar el cosmos. Esto supondría, no sólo un colosal avance en nuestra comprensión acerca del origen y la evolución de la vida, sino que nos permitiría comparar nuestro sistema lógico con el de estos avanzados seres.

Desde un punto de vista más especulativo, ciertos escenarios cosmológicos (por ejemplo, el denominado de *inflación eterna)* predicen la posible existencia de múltiples universos. Algunos de estos universos pueden caracterizarse por poseer no sólo valores distintos de las constantes de la naturaleza (como la intensidad de las distintas fuerzas o las relaciones entre las masas de las partículas subatómicas) sino incluso leyes naturales completamente distintas. El astrofísico Max Tegmark sostiene que incluso debería haber un universo que correspondiese a (o, en su lenguaje, que *fuese)* cada posible estructura matemática.[277] En tal caso, estaríamos hablando de una forma radical de la perspectiva «el universo *es* la matemática»; no sólo hay un mundo que se puede identificar con la matemática, sino un conjunto de ellos. Por desgracia, esta especulación no sólo es extremadamente radical e imposible de comprobar; también parece contradecir (al menos, en su forma más simple) lo que se ha dado en denominar *principio de mediocridad*.[278] Como describí en el capítulo 5, si se elige una persona al azar en la calle, la probabilidad de que su altura se encuentre dentro de dos desviaciones estándar de la altura media es del 95 por 100. Se puede aplicar un argumento similar a las propiedades de los universos. Pero el número de posibles estructuras matemáticas se incrementa de forma espectacular al aumentar la complejidad. Esto se traduce en que la estructura más «mediocre» (más cercana a la media) debería de ser increíblemente compleja, lo que parece contradecir la relativa simplicidad de nuestra matemática y de nuestras teorías del universo e incumplir así las naturales perspectivas de que nuestro universo debería de ser un caso típico.

El enigma de Wigner

La pregunta «La matemática ¿es descubierta o inventada?» no está bien formulada, porque implica que la respuesta debe ser una o la otra y que ambas posibilidades se excluyen mutuamente. Mi sugerencia es que la matemática es en parte inventada y en parte descubierta. Lo habitual es que los seres humanos inventen los conceptos matemáticos y descubran las relaciones entre estos conceptos. Ciertos descubrimientos empíricos se efectuaron sin duda antes de la formulación de los conceptos, pero los propios conceptos ofrecieron un incentivo para el descubrimiento de teoremas adicionales. También se debe mencionar que ciertos filósofos de la matemática, como el norteamericano Hilary Putnam, adoptan una posición intermedia denominada *realismo:*[279] creen en la objetividad del discurso matemático (es decir, las frases son ciertas o falsas, y lo que hace que lo sean es externo a los seres humanos) sin comprometerse (a diferencia de los platónicos) con la existencia de «objetos matemáticos». La cuestión es la siguiente: ¿ofrece alguna de estas perspectivas una explicación satisfactoria del enigma de Wigner acerca de la «eficacia inexplicable» de la matemática?

Antes de responder, examinaré algunas de las posibles soluciones formuladas por algunos pensadores contemporáneos.[280] El premio Nobel de Física David Gross escribe:[281]

> …un punto de vista que, según mi experiencia, no es inusual entre los matemáticos creativos, a saber, que las estructuras matemáticas que alcanzan no son creaciones de la mente humana, sino que están dotadas de una característica de naturaleza propia tan real como las estructuras creadas por los físicos para describir el mundo denominado real. Dicho de otra forma, los matemáticos no inventan nueva matemática, sino que la descubren. Si éste fuera el caso, quizá una parte de los enigmas que venimos explorando* [* La «eficacia inexplicable». *(N. del a.)*] no sean en realidad tan misteriosos. Si la matemática versa sobre estructuras que forman parte real del mundo natural, tan real como los conceptos de la física teórica, no es sorprendente que se trate de una herramienta eficaz en el análisis del mundo real.

Dicho de otro modo, la postura de Gross es una versión de la perspectiva «matemática como descubrimiento» que se halla en algún punto intermedio entre el mundo platónico y el mundo de «el universo *es* matemática» (aunque más próxima al punto de vista platónico). Sin embargo, como hemos podido ver, es complicado apoyar el punto de vista de «matemática como descubrimiento». Es más: el platonismo no puede dar respuesta a la fabulosa precisión que he descrito en el capítulo 8 (algo que el propio Gross ha reconocido).

Sir Michael Atiyah, cuya perspectiva acerca de la *naturaleza* de la matemática comparto en general, plantea el siguiente argumento:[282]

> Si se observa el cerebro en su contexto evolutivo, el misterioso éxito de la matemática dentro de las ciencias físicas queda explicado, al menos parcialmente. El cerebro ha evolucionado para tratar con el mundo físico, de modo que no debería sorprendernos que haya desarrollado un lenguaje, la matemática, adecuado para esta finalidad.

Este tipo de razonamiento es muy similar a las soluciones propuestas por los científicos cognitivos. Sin embargo, Atiyah reconoce también que no se trata de una explicación satisfactoria para los aspectos más peliagudos del problema (por ejemplo, la forma en que la matemática arroja luz sobre los aspectos más esotéricos del mundo físico) y, en particular, deja completamente en el aire la cuestión de lo que he venido denominando *eficacia pasiva* (es decir, los conceptos matemáticos que hallan aplicación tiempo después de su invención). Señala Atiyah: «El escéptico puede argumentar que la lucha por la supervivencia sólo nos exige enfrentarnos a fenómenos en la escala humana; sin embargo, la teoría matemática parece ser eficaz en todas las escalas, de la atómica a la galáctica». A lo que sugiere: «Puede que la única explicación resida en la naturaleza jerárquica abstracta de la matemática, que nos permite subir y bajar en la escala del mundo de forma comparativamente sencilla».

El matemático y científico computacional norteamericano Richard Hamming (1915-1998) hizo extensas e interesantes aportaciones al debate del enigma de Wigner en 1980.[283] En primer lugar, acerca de la naturaleza de la matemática, su conclusión era: «La matemática ha sido fabricada por el hombre y es, por tanto, susceptible de ser continuamente alterada por él». A continuación proponía cuatro posibles respuestas para la eficacia inexplicable: (i) los efectos de selección; (ii) la evolución de las herramientas matemáticas; (iii) el poder de explicación limitado de la matemática, y (iv) la evolución del ser humano.Voy a explicar brevemente lo que Hamming quiere decir en cada una de estas respuestas y señalar los posibles puntos débiles. Los efectos de selección son sesgos en los resultados de los experimentos, provocados por la instrumentación o por la metodología utilizadas. Por ejemplo, un pescador que utilice una red con agujeros de 25 centímetros de diámetro puede llegar a la conclusión de que todos los peces miden más de 25 centímetros. Dicho de otra forma, lo que Hamming sugiere es que, en ciertos casos, «el fenómeno original surge de las propias herramientas matemáticas utilizadas, y no del mundo real … una gran parte de lo que vemos está relacionado con el color del cristal con el que miramos». Para ilustrar su argumento indica que se puede mostrar que cualquier fuerza que emane simétricamente de un punto (y conserve la energía) en el espacio de tres dimensiones debe seguir una ley del cuadrado inverso, de modo que no es sorprendente que la ley de gravitación de Newton sea aplicable. Aunque el argumento de Hamming es correcto, los efectos de selección no son capaces de explicar el fantástico nivel de precisión de algunas teorías.

La segunda posible solución de Hamming se basa en el hecho de que los seres humanos seleccionan y mejoran de forma continua la matemática para que se adapte a situaciones concretas. En otras palabras, Hamming propone que estamos asistiendo a lo que podríamos llamar una «evolución y selección natural» de las ideas matemáticas: los humanos inventan un gran número de conceptos matemáticos y sólo se seleccionan los más aptos. Durante años yo mismo he creído que este argumento ofrecía una explicación completa. El premio Nobel de Física Steven Weinberg proponía una interpretación similar en su libro *El sueño de una teoría final*.[284] ¿Podría ser ésta *la explicación* del enigma de Wigner? No cabe la menor duda de que, en efecto, estos procesos de selección y evolución tienen lugar. Después de filtrar numerosos formalismos y herramientas matemáticas, los científicos conservan las que funcionan y las actualizan y modifican a medida que surgen otras mejores. Pero, aunque aceptemos esta idea, ¿por qué *existen* teorías matemáticas capaces de explicar el universo?

El tercer argumento de Hamming es que nuestra impresión de la eficacia de la matemática puede ser, de hecho, ilusoria, ya que una gran parte del mundo que nos rodea no puede explicarse mediante la matemática. Esta perspectiva toma fuerza, por ejemplo, en esta cita del matemático Israïl Moiseevich Gelfand:[285] «Sólo hay una cosa que sea más inexplicable que la inexplicable eficacia de la matemática en física, y es su inexplicable *ineficacia* en biología». (Las cursivas son mías.) Pero no creo que esto baste para dar explicación al problema de Wigner. Es cierto que, a diferencia de lo que sucede en la *Guía del autoestopista galáctico*, no podemos decir que la respuesta a la vida, el universo y todo lo demás sea 42. Sin embargo, el número de fenómenos que la matemática *sí* ayuda a dilucidar es lo bastante grande como para justificar una explicación. Es más: la variedad de hechos y procesos que se pueden interpretar desde un punto de vista matemático no hace más que ampliarse continuamente.

Hamming tomó en consideración una posible cuarta explicación, muy similar a la que había sugerido Atiyah: que la «evolución darwiniana seleccionaría de forma natural para su supervivencia las formas de vida en competición que tuviesen en su mente los mejores modelos de la realidad, siendo «los mejores» los más aptos para la supervivencia y la propagación.

El científico computacional Jef Raskin (1943-2005), uno de los iniciadores del proyecto Macintosh para Apple Computer, tenía un punto de vista similar, con especial énfasis en la función de la lógica. Su conclusión era que:

> La lógica humana nos ha sido impuesta por el mundo físico y es, por tanto, coherente con él. La matemática deriva de la lógica, y por ese motivo es coherente con el mundo físico. No es ningún misterio, pero eso no significa que debamos perder nuestra capacidad de sorprendernos y maravillarnos ante la naturaleza a medida que llegamos a comprenderla mejor.

Hamming, que no estaba tan convencido, a pesar de la solidez de sus propios argumentos, señaló que:

> Si se toma como edad de la ciencia 4.000 años, se obtiene generalmente un límite superior de 200 generaciones. Considerando los efectos de la evolución mediante la selección de pequeñas variaciones aleatorias, no me parece que la evolución sea capaz de explicar más que una pequeña parte de la eficacia inexplicable de la matemática.

Raskin sostenía que «los fundamentos de la matemática se habían establecido mucho antes de la llegada de nuestros antepasados, probablemente a lo largo de millones de generaciones[286]». Pero debo decir que este argumento no me parece especialmente convincente. Aunque la lógica esté firmemente arraigada en los cerebros de nuestros antepasados, es difícil ver cómo este hecho puede haber conducido a la aparición de teorías matemáticas abstractas del mundo subatómico (como la mecánica cuántica o los formalismos conocidos como teorías «gauge») de fabulosa precisión.

Es sorprendente constatar que Hamming concluía su artículo admitiendo que «todas las explicaciones que he ofrecido, una vez unidas, no bastan para aclarar lo que pretendía» (la eficacia inexplicable de la matemática).

Entonces, ¿debemos concluir que esta eficacia sigue siendo igual de enigmática que al principio?

Antes de rendirnos, vamos a intentar llegar a la esencia del misterio de Wigner; para ello vamos a examinar lo que se denomina método científico. En primer lugar, los científicos averiguan, a través de una serie de experimentos y observaciones, hechos acerca de la naturaleza. Estos hechos se utilizan inicialmente para desarrollar una especie de «modelos» cualitativos de los fenómenos (por ejemplo, la Tierra atrae las manzanas, la colisión de partículas subatómicas puede producir otras partículas, el universo se expande, etc.). En muchas de las ramas de la ciencia, las teorías incipientes pueden incluso no ser matemáticas. Uno de los mejores ejemplos de una teoría de este tipo con una inmensa capacidad para explicar los fenómenos es la teoría de la evolución de Darwin. Aunque la selección natural no está basada en formalismo matemático alguno, es notable su éxito en la explicación del origen de las especies. En física fundamental, por el contrario, el paso siguiente suele consistir en intentar construir teorías cuantitativas, *matemáticas* (por ejemplo, la relatividad general, la electrodinámica cuántica, la teoría de cuerdas, etc.). Finalmente, los investigadores utilizan esos modelos matemáticos para predecir nuevos fenómenos, nuevas partículas y resultados de experimentos y observaciones nunca realizados. Lo que confundía a Wigner y a Einstein era la increíble precisión del resultado de estos dos últimos procesos. ¿Cómo es posible que, una y otra vez, los físicos puedan hallar herramientas matemáticas que no sólo expliquen los resultados experimentales y las observaciones anteriores, sino que lleven a descubrir nuevos criterios y efectuar nuevas predicciones? Voy a intentar dar respuesta a esta versión de la pregunta a partir de un ejemplo del matemático Reuben Hersh. Hersh proponía que, en el espíritu del análisis de muchos de estos problemas de la matemática (y, desde luego, de la física teórica), se debía examinar el más simple de los casos posibles.[287] Pensemos en el experimento aparentemente trivial de introducir guijarros en un jarrón opaco. Supongamos que metemos primero cuatro guijarros blancos y luego siete guijarros negros. En algún momento de la historia, los humanos aprendieron que, en algunos casos, podían representar un grupo de guijarros de cualquier color mediante un concepto abstracto que habían inventado: un número natural. Es decir, el conjunto de guijarros blancos se podía asociar con el número 4 (o IIII, IV o cualquiera que fuese el símbolo utilizado en la época) y el de guijarros negros, con el número 7. A través de experimentos como el descrito, los seres humanos descubrieron que otro concepto inventado (la adición aritmética) representaba correctamente el acto físico de acumular. Dicho de otra forma, el resultado del proceso abstracto denotado simbólicamente por 4 + 7 puede predecir de forma no ambigua el número final de guijarros en el jarrón. ¿Qué significa todo esto? ¡Significa que los seres humanos han desarrollado una increíble herramienta matemática, capaz de predecir de forma fiable el resultado de *cualquier* experimento de este tipo! Esto puede parecer una trivialidad, pero no lo es, porque esta misma herramienta no sirve, por ejemplo, con gotas de agua. Si se vierten cuatro gotas de agua en el jarrón una a una y, a continuación, otras siete gotas, no se obtienen once gotas de agua independientes. De hecho, para poder efectuar predicciones en experimentos similares con líquidos o gases, los seres humanos tuvieron que inventar conceptos completamente distintos (como el de peso) y darse cuenta de que era necesario pesar cada gota de agua o volumen de gas de forma individual.

La conclusión es clara: las herramientas matemáticas no se han elegido de forma arbitraria, sino precisamente por su capacidad para predecir de forma correcta los resultados de los experimentos u observaciones pertinentes. De manera que, al menos en este caso tan simple, su eficacia estaba garantizada. Los seres humanos no tuvieron que adivinar a priori cuáles eran las matemáticas correctas: la Naturaleza tuvo la gentileza de permitirles utilizar el ensayo y error para determinar qué era lo que funcionaba. Tampoco tenían que utilizar obligatoriamente las mismas herramientas para todas las circunstancias. A veces, el formalismo matemático apropiado para determinado problema no existía y alguien tuvo que inventarlo (es el caso de Newton y su invención del cálculo, o de las diversas ideas en geometría y topología surgidas en el contexto de los actuales estudios en teoría de cuerdas). En otros casos, el formalismo ya existía, pero era necesario descubrir que se trataba de una solución en espera del problema adecuado (como en el caso del uso de la geometría de Riemann por Einstein, o de la teoría de grupos en física de partículas). La cuestión es que su extraordinaria curiosidad, su perseverancia, su imaginación creativa y su intensa determinación han permitido a los seres humanos hallar los formalismos matemáticos relevantes para crear modelos de un gran número de fenómenos físicos.

Una de las características de la matemática que ha resultado esencial para lo que he venido denominando su eficacia «pasiva» ha sido su validez esencialmente eterna. La geometría euclidiana sigue siendo tan correcta en la actualidad como lo era en el año 300 a.C. Ahora comprendemos por qué sus axiomas no son inevitables y, en lugar de representar verdades absolutas acerca del espacio, representan verdades dentro del universo particular que los seres humanos percibimos y de su formalismo asociado. Sin embargo, una vez que hemos comprendido que su contexto es más limitado, todos sus teoremas siguen siendo ciertos. Dicho de otro modo, las distintas ramas de la matemática se incorporan a ramas más amplias (por ejemplo, la geometría euclidiana es sólo una de las posibles versiones de la geometría), pero la corrección se conserva dentro de cada rama. Esta longevidad indefinida ha permitido que los científicos de cada época buscasen las herramientas adecuadas dentro del arsenal de formalismos desarrollados.

De todos modos, el ejemplo sencillo de los guijarros en el jarrón deja en el aire dos de los elementos del enigma de Wigner. En primer lugar se halla la siguiente cuestión: ¿por qué en algunos casos parece que, en términos de exactitud, obtenemos de la teoría más de lo que hemos puesto? En el experimento de los guijarros, la exactitud de los resultados «predichos» (la acumulación de otros conjuntos de guijarros) no es mejor que la exactitud de los experimentos que condujeron a la formulación inicial de la teoría (la adición aritmética). Por otro lado, se ha demostrado que la exactitud de las predicciones de la teoría de la gravitación de Newton supera en gran medida la de los resultados observacionales que motivaron la formulación de la teoría. ¿Por qué? Vamos a recapitular brevemente sobre la historia de la teoría de Newton.

El modelo geocéntrico de Ptolomeo fue el dominante durante unos quince siglos. Aunque el modelo no pretendía ser universal (el movimiento de cada planeta se trataba de forma individual) y no mencionaba nada acerca de causas físicas (como fuerzas o aceleraciones), se ajustaba razonablemente a las observaciones. Nicolaus Copernicus (1473-1543) publicó su modelo heliocéntrico en 1543, y Galileo le proporcionó una base sólida. Galileo estableció también los fundamentos de las leyes del movimiento. Pero fue Kepler quien dedujo las primeras leyes matemáticas (aunque sólo fenomenológicas) del movimiento planetario a partir de observaciones. Kepler utilizó una colosal cantidad de datos recopilados por el astrónomo Tycho Brahe (1546-1601) para determinar la órbita de Marte.[288] A los centenares de páginas de cálculos que tuvo que llevar a cabo los denominó «mi guerra personal con Marte». Salvo por un par de discrepancias, las observaciones se ajustaban a una órbita circular. Sin embargo, Kepler no quedó satisfecho con esta solución, y más adelante describió así sus cavilaciones: «Si hubiese pensado que podía hacer caso omiso de esos ocho minutos [de arco, alrededor de una cuarta parte del diámetro de la luna llena], hubiese modificado mis hipótesis … en consecuencia. Pero no era aceptable ignorarlos, de modo que esos ocho minutos señalaron el camino de una reforma total de la astronomía». Las consecuencias de esta meticulosidad fueron fenomenales. Kepler dedujo que las órbitas de los planetas no son circulares, sino elípticas, y formuló dos leyes cuantitativas adicionales que podían aplicarse a todos los planetas. Unidas a las leyes de movimiento de Newton, se convirtieron en la base para la ley de la gravitación universal. Recordemos, no obstante, que Descartes había propuesto antes su teoría de los vórtices, en la que los planetas eran transportados alrededor del Sol por vórtices de partículas en movimiento circular. Esta teoría no tuvo demasiado predicamento, ni siquiera antes de que Newton demostrase que era incoherente, porque Descartes no había desarrollado un tratamiento sistemático de los vórtices.

¿Qué lección podemos extraer de esta breve historia? No cabe duda de que la ley de la gravitación de Newton fue la obra de un genio. ¡Pero este genio no se encontraba aislado en el vacío! Una parte de los cimientos habían sido establecidos anteriormente con gran meticulosidad por otros científicos. Como ya señalé en el capítulo 4, matemáticos de un nivel mucho menor que el de Newton, como el arquitecto Christopher Wren y el físico Robert Hooke, habían sugerido de forma independiente la ley de atracción del cuadrado inverso. La grandeza de Newton consistió en su capacidad única para ligarlo todo en forma de una teoría unificada y su terquedad para hallar demostraciones matemáticas de las consecuencias de su teoría. Podemos preguntarnos por qué este formalismo resultó ser tan preciso. En parte se debió a que trataba el problema más fundamental: las fuerzas entre dos cuerpos graves y el movimiento resultante, sin otros factores que complicasen el escenario. Newton sólo obtuvo una solución completa para este problema. Así, la teoría fundamental era extraordinariamente precisa, pero sus implicaciones tuvieron que sufrir una continua corrección. El sistema solar se compone de más de dos cuerpos. Cuando se incluyen los efectos de otros planetas (siguiendo igualmente la ley del cuadrado inverso), las órbitas dejan de ser simples elipses. Por ejemplo, se ha hallado que la órbita de la Tierra cambia lentamente su orientación en el espacio (un movimiento denominado *precesión),* algo parecido a lo que sucede con el eje de una peonza en rotación. De hecho, los estudios más modernos han mostrado que, en contradicción con las expectativas de Laplace, es posible que las órbitas de los planetas acaben convirtiéndose en caóticas.[289] La propia teoría fundamental de Newton fue, desde luego, destronada por la relatividad general de Einstein, y esa misma teoría apareció después de una serie de salidas en falso y de «casi» dianas. Esto demuestra que no es posible prever la exactitud. Para probar el pastel es necesario comérselo: hasta obtener la precisión deseada, se efectúan todas las correcciones y modificaciones necesarias. Los casos en los que se logra una exactitud superior en un solo paso parecen milagros.

En segundo plano tenemos, parece claro, un hecho esencial que hace que la búsqueda de leyes fundamentales valga la pena. Se trata del hecho de que la naturaleza ha sido tan amable de obedecer leyes universales, en lugar de simples normas locales. Un átomo de hidrógeno *se comporta exactamente del mismo modo* en la Tierra, en el otro extremo de la Vía Láctea o en una galaxia a diez mil millones de años luz de distancia. Y esto se cumple en todas las direcciones y momentos.

Los matemáticos y físicos han inventado un término para referirse a estas propiedades: se denominan *simetrías,* y dan cuenta de la inmunidad a los cambios en la ubicación, en la orientación o el momento en que se pone en marcha el reloj. Si no fuese por estas (y otras) simetrías, la esperanza de descifrar algún día el gran plan de la naturaleza se hubiese perdido, porque los experimentos deberían haberse repetido en todos los lugares del espacio (si es que hubiese sido posible la aparición de la vida en un universo así). Otra de las propiedades del cosmos que subyace tras las teorías matemáticas es lo que se ha venido en llamar *localidad*. Esta propiedad refleja nuestra capacidad para construir la «imagen global» como si fuese un rompecabezas, empezando por una descripción de las interacciones más básicas entre partículas elementales.

Y ahora llegamos al último elemento del enigma de Wigner: ¿qué es lo que garantiza que deba existir siquiera una teoría matemática? En otras palabras: ¿por qué existe, por ejemplo, una teoría de la *relatividad general?* ¿Podría ser que *no* existiese una teoría matemática de la gravedad?

La respuesta, en realidad, es más simple de lo que podría parecer.[290] ¡No hay garantía alguna! Hay multitud de fenómenos para los que *ni siquiera en principio* es posible efectuar predicciones precisas. En esta categoría se hallan, por ejemplo, una amplia gama de sistemas dinámicos que desarrollan comportamientos caóticos, en los que un cambio nimio en las condiciones iniciales puede provocar resultados finales completamente distintos. Entre los fenómenos con este tipo de comportamientos se encuentran el mercado de valores, el tiempo atmosférico sobre las Montañas Rocosas, una bola rebotando en una ruleta, el humo que sale de un cigarrillo y, por supuesto, las órbitas de los planetas en el sistema solar. Esto no significa que los matemáticos no hayan desarrollado formalismos ingeniosos para tratar aspectos importantes de estos problemas, pero no existe una teoría determinista predictiva para ellos. Los campos de la probabilidad y la estadística se han creado precisamente para abordar las cuestiones en las que no se dispone de una teoría que permita obtener resultados más allá de las observaciones. De forma similar, el concepto denominado *complejidad computacional* delimita nuestra capacidad para resolver problemas mediante algoritmos prácticos, y los teoremas de incompletitud de Gödel determinan ciertas limitaciones dentro de la propia matemática. Así, aunque la matemática es extremadamente eficaz para ciertas descripciones, en especial las que tienen que ver con la ciencia, es incapaz de describir nuestro universo en *todas* sus dimensiones. Hasta cierto punto, los científicos han *seleccionado* los problemas en los que trabajan basándose en cuáles pueden recibir un tratamiento matemático.

Entonces, ¿hemos resuelto definitivamente el misterio de la inexplicable eficacia de la matemática? Dudo mucho que los argumentos que he expuesto en este libro hayan dejado completamente convencidas a todas las personas. Sin embargo, puedo citar a Bertrand Russell en *Los problemas de la filosofía*:[291]

> Para resumir nuestro análisis sobre el valor de la filosofía: la filosofía debe ser estudiada, no por las respuestas concretas a los problemas que plantea, puesto que, por lo general, ninguna respuesta precisa

puede ser garantizada como verdadera, sino más bien por el valor de los problemas mismos; porque estos problemas amplían nuestra concepción de lo posible, enriquecen nuestra imaginación intelectual y disminuyen la seguridad dogmática que cierra el espíritu a la investigación; pero, ante todo, porque por la grandeza del Universo que la filosofía contempla, el espíritu se hace a su vez grande, y llega a ser capaz de la unión con el Universo que constituye su supremo bien.

BIBLIOGRAFÍA

Aczel, A. D. 2000, *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah and the Search for Infinity* (Four Walls Eight Windows, Nueva York).

—, 2004, *Chance: A Guide to Gambling, Love, the Stock Market, and Just about Everything Else* (Thunder's Mouth Press, Nueva York).

—, 2005, *Descartes ' Secret Notebook* (Broadway Books, Nueva York).

Adams, C. 1994, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots* (W. H. Freeman, Nueva York).

Adam, C. y Tannery, P. 1897-1910, *Oeuvres des Descartes.* Edición revisada 1964-1976 (París: Vrin/CNRS). La traducción al inglés más exhaustiva es: (Nottingham, J., Stoothoff, R. y Murdoch, D. 1985, *The Philosophical Writing of Descartes* (Cambridge University Press, Cambridge).

Alexander, J. W. 1928, *Transactions of the American Mathematical Society,* 30, 275.

Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V. y Cook, W.J. 2007, *The Traveling Salesman Problem* (Princeton University Press, Princeton).

Archibald, R. C. 1914, *American Mathematical Society Bulletin,* vol. 20, 409.

Aronoff, M. y Rees-Miller, J. 2001, *The Handbook of Linguistics* (Blackwell Publishing, Oxford).

Ashley, C. W. 1944, *The Ashley Book of Knots* (Doubleday, Nueva York).

Atiyah, M. 1990, *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge University Press, Cambridge).

—, 1993, *Proceedings of the American Philosophical Society,* vol. 137, num. 4, 517.

—, 1994, *Supplement to Royal Society Netos,* vol. 7, num. 12.

—, 1995, *Times Higher Education Supplement,* 29 de septiembre.

Atiyah, M. F. 1989, *Publications Mathématiques de Uns t. des Hautes Eludes*

Scientifiques, Paris, 68, 175. Baillet, A. 1691, La Vie de M. Des-Cartes (Daniel Horthemels, Paris). Un facsímil fotográfico se publicó en 1972 (Olms, Hildesheim) y 1987

(Garner, Nueva York). Balz, A. G. A. 1952, *Descartes and the Modem Mind* (Yale University Press, New Haven).

Barnes, J. y Lawrence, G. (trad.) 1984, Aristóteles ca. 350 a.C, *Metaphysics*, en *The Complete Works of Aristotle*, ed. J. Barnes (Princeton University Press, Princeton).

Barrow, J. D. 1992, *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being* (Clarendon Press, Oxford).

—, 2005, *The Infinite Booh: A Short Guide to the Boundless, Timeless and Endless* (Pantheon, Nueva York).

Beaney, M. 2003, en N. Griffin (ed.). *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge University Press, Cambridge).

Begsadde, M. 1993, en *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes*, ed. S. Voss (Oxford University Press, Oxford).

Bell, E. T. 1937, *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré* (Touchstone, Nueva York).

—, 1940, *The Development of Mathematics* (McGraw-Hill, Nueva York).

—, 1951, *Mathematics: Queen and Servant of Science* (McGraw-Hill, Nueva York).

Bel tran Mari, A. 1994, en la introducción al *Diálogo Sobre los Dos Máximos Sistemas del Mundo* (Alianza Editorial, Madrid).

Bennett, D. 2004, *Logic Made Easy: How to Know When Language Deceives You* (W. W. Norton, Nueva York).

Berger. E. B. y Starbird, M. 2005, *Coincidences, Chaos, and All That Math Jazz: Making Light of Weighty Ideas* (W. W. Norton, Nueva York).

Berkeley, G. 1734, *The Analyst: Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*, D. R. Wilkins (ed), http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.html.

Berlin ski, D. 1996, *A Tour of the Calculus* (Pantheon Books, Nueva York).

Bernardini, G. y Fermi, L. (trad.) 1965, *The Little Balance*, en *Galileo and the Scientific Revolution* (Nueva York; Fawet Premier). Se trata de una traducción de 1890-1909, *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. A. Favaro (G. Barbero, Florencia).

Bernoulli,J 1713, *Ars Conjectandi* (Thamisiorum, Basilea).

Black, F. y Scholes, M. 1973, *Journal of Political Economy,* 81 (3), 637.

Bloom, A. (trad.) 1968, Platon, *The Republic* (Basic Books, Nueva York).

Blumberg, R. B., *Mendel's Paper in English,* http://www.mendelweb.org/Mendel.plain.html.

Bodanis, D. 2000, *E = me: A Biography of the World's Most Famous Equation* (Walker, Nueva York).

Bonola, R. 1955, *Non-Euclidean Geometry,* H. S. Carshaw (trad.) (Dover Publications, Nueva York). Se trata de una reedición de la traducción de 1912 (publicada por Open Court Publishing Company).

Boole, G. 1847, *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay totoards a Calculus of Deductive Reasoning,* reproducido en Ewald 1996.

—, 1854. *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Macmillan, Londres). Reimpreso en 1958 (Dover Publications, Mineóla, NY).

Boolos, G. 1985, *Mind*, 94, 331.

—, 1999, *Logic, Logic, Logic* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Borovik, A. 2006, *Mathematics under the Microscope,* http://www.maths.manchester.ac.uk/~avb/micromathematics/downloads.

Brewster. D. 1831, *The Life of Sir Isaac Netuton* (John Murray, Albemarle Street, Londres).

Bukowski. J. 2008, *The College Mathematics Journal*, vol. 39, num. 1, 2.

Burkert, W. 1912, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Cajori, F. 1926, *The American Mathematical Monthly,* vol. 33, num. 8, 397.

—, 1928, en *Sir Isaac Newton 1727-1927: A Bicentenary Evaluation of His Work,* The History of Science Society (The Williams & Wilkins Company, Baltimore).

Cardano, G. 1545, *Artis Magnae, sive de regulis algebraices,* editado en 1968 con el título *The Great Art or the Rules of Algebra,* T. R. Witmer (trad, y ed.) (MIT Press, Cambridge, MA).

Caspar, M. 1993, *Kepler,* C. D. Hellman (trad.) (Dover Publications, Mineóla, NY).

Chandrasekhar, S. 1995, *Newton's Principia for the Common Reader* (Clarendon Press, Oxford).

Changeaux, J.-P. y Connes, A. 1995, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics* (Princeton University Press, Princeton).

Cherniss, H. 1945, *The Riddle of the Early Academy* (University of California Press Berkeley), reimpreso en 1980 (Garland, Nueva York).

—, 1951, *Review of Metaphysics*, 4, 395.

Chomsky, N. 1957, *Syntactic Structures* (Mouton & Co., The Hague).

Clark, M. 2002, *Paradoxes from A to Z* (Routledge, Londres).

Clarke, D. M. 1992, en *The Cambridge Companion to Descartes*, ed. J. Cot-

tingham (Cambridge University Press, Cambridge). Cohen, I. B. 1982, en *Contemporary Newtonian Research*, ed. Z. Bechler

(Reidel, Dordrecht). —, 2006, *The Triumph of Numbers* (W. W. Norton *8c* Company, Nueva York).

Cohen, I. B. y Whitman, A. (con la asistencia de J. Budenz) 1999, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* (University of California Press, Berkeley).

Cohen, P.J. 1966, *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (W. A. Benjamin, Nueva York).

Cole, J. R. 1992, *The Olympian Dreams and Youthful Rebellion of René Descartes* (University of Illinois Press, Champaign, IL).

Connor, J. A. 2006, *Pascal's Wager: The Man Who Played Dice with God* (Harper Collins, Nueva York).

Conway, J. H. 1970, en *Computational Problems in Abstract Algebra*, ed. J. Leech (Pergamon Press, Oxford), 329.

Coresia, G. 1612, *Operetta intorno al galleggiare de' corpi solidi*. Reimpreso en *Le Opere di Galileo Galilei*. Favoro A. (ed.) 1968, *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, (Barbero, Florencia). Primera aparición en 1890-1909.

Cottingham,J. 1986, *Descartes* (Blackwell, Oxford).

Craig, SirJ. 1946, *Newton at the Mint* (Cambridge University Press, Cambridge).

Curley, E. 1993, en *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes,* ed. S. Voss (Oxford University Press, Oxford).

Curzon, G. 2004, *Wotton and His Words: Spying, Science and Venetian Intrigues* (Xlibris Corporation, Filadelfia).

Davies, P. 2001, *How to Build a Time Machine* (Allen Lane, Nueva York).

Davis, P.J. y Hersh, R 1981, *The Mathematical Experience* (Birkhaüser, Boston). También 1998 (Mariner Books, Boston).

Dawkins, R. 2006, *The God Delusion* (Houghton Mifflin Company, Nueva York).

Dawson, J. 1997, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel* (A. K.

Peters, Natick, MA). De Santillana, G. 1955, *The Crime of Galileo* (University of Chicago Press, Chicago).

Dehaene, S. 1997, *The Number Sense* (Oxford University Press, Oxford).

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. y Spelke, E. 2006, *Science,* 311, 381.

DeLong, H. 1910, *A Profile of Mathematical Logic* (Reading, MA: Addison-Wesley). Reeditado en 2004 (Dover Publications, Mineola, NY).

Demopoulos, W. y Clark, P. 2005, en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford University Press, Oxford).

DeMorgan, A. 1885, *Newton: His Friend: and His Niece* (Elliot Stock, Londres). Dennett, D. C. 2006, *Breaking the Spell: Religion as a Natural Phenomenon*

(Viking, Nueva York). Descartes, R. 1644, *Principles of Philosophy,* II: 64, en 1985, *Philosophical*

Works of Descartes, eds. J. Cotringham, R. Stoothoff y D. Murdoch

(Cambridge University Press, Cambridge). Detlefsen, M. 2005, en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, ed. S. Shapiro (Oxford University Press, Oxford).

Deutsch, D. 1997, *The Fabric of Reality* (Allen Lane, Nueva York).

Devlin, K. 1993, *The joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory,* segunda edición (Springer Verlag, Nueva York).

—, 2000, *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are like Gossip* (Basic Books, Nueva York).

Dijksterhuis, E.J. 1957, *Archimedes* (The Humanities Press, Nueva York).

Dillon, J. y HershbellJ. (trad.) 1991, Jámblico ca. 300 d.C, *On the Pythagorean Life* (Scholar Press, Atlanta).

Doxiadis, A. K. 2000, *UnclePetros and Goldbach's Conjecture* (Bloomsbury, Nueva York).

Drabkin, I. E. (trad.) 1960, *On Motion* (University of Wisconsin Press, Madison, WI).

Drake, S. (trad.) 1960, Galileo 1623, *The Assayer* (título original *IlSaggia-tore),* en *The Controversy of the Comets of 1618* (University of Pennsylvania Press, Filadelfia).

—, (trad.) 1960, Grassi, O. 1619, *Lilrra Astronómica acPhilosophica,* en *The Controversy of the Comets of 161.6* (University of Pennsylvania Press, Filadelfia).

—, (trad.) 1960, *On Mechanics* (University of Wisconsin Press, Madison, WI).

—, (trad.) 1967, Galileo 1632, *Dialogue Concerning the Tiuo Chief World Systems* (University of California Press, Berkeley.

—, (trad.) 1974, Galileo 1638, *Discourses on the TiuoNeiu Sciences* (University of Wisconsin Press, Madison, WI).

—, 1978, *Galileo at Work: His Scientific Biography* (University of Chicago Press, Chicago).

—, (trad.) 1983, Galileo 1610, *Sidereus Nuncius* (o *The Sidereal Messenger),* en *Telescopes, Tides and Tactics* (University of Chicago Press, Chicago)-

—, 1990, *Galileo: Pioneer Scientist* (University of Toronto Press, Toronto). Dryden,J. (trad.) 1992, Plutarco ca. 75 d.C, *Marcellus,* en *Plutarch's Lives,*

ed. A. H. Clough (Modern Library, Nueva York). Dumett, M. 1978, *Truth and Other Enigmas* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Dunham, W. 1994, *The Mathematical Universe. An Alphabetical journey through the Great Proofs, Problems and Personalities* (John Wiley *8c* Sons, Nueva York).

Dunnington, G. W. 1955, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science* (Hafner Publishing, Nueva York).

Einstein, A. 1934, «Geometrie und Erfuhrung», en *Man Weltbild* (Ulls-tein Materialien, Frankfurt am Main).

Ewald, W. 1996, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of*

Mathematics (Clarendon Press, Oxford). Favoro A. (ed.) 1890-1909, *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale

(Barbera, Florencia). Se ha reimpreso varias veces, la mas reciente en 1964-1966. Hay una version *online en:* http://www.imss.fl.it/istituto/index.html.

Fearnley-Snyder, D. 1979, *The American Mathematical Monthly*, vol. 86, num. 10, 809.

—, 1982, *The American Mathematical Monthly*, vol. 89, num. 3, 161.

Feldberg, R. 1995, *Galileo and the Church: Political Inquisition or Critical Dialogue* (Cambridge University Press, Cambridge).

Ferris, T. 1997, *The Whole Shebang* (Simon & Schuster, Nueva York).

Finkel, B. F. 1898, «Biography: René Descartes», *American Mathematical Monthly*, vol. V, num. 8-9,191.

Fisher, R. A. 1936, *Annals of Science*, vol. 1, 115.

—, 1956, reimpreso en *The World of Mathematics*, ed. J. R. Newman (Simon & Schuster, Nueva York).

Fowler, D. 1999, *The Mathematics of Plato's Academy* (Clarendon Press, Oxford).

Franzén, T. 2005, *GòdeVs Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse* (A. *JL* Peters, Weilesley, MA).

Frege, G. 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (L. Nebert, Halle, Alemania); traducido al ingles por S. Bauer-Mengelberg en van Heijenoort 1967.

—, 1884, *Der Grundlagen der Arithmetik* (Koebner, Breslau), traducido al inglés por J. L. Austin 1974, *The Foundations of Arithmetic*, (Basil Blackwell, Oxford).

—, 1893, *Grundgesetze der Arithmetik* (Verlag Hermann Pohle, Jena), Bond I. Traducido parcialmente en 1964, M. Furth (ed.), *The Basic Laws of Arithmetic* (University of California Press, Berkeley).

—, 1903, *Grundgesetze der Arithmetik* (Verlag Hermann Pohlejena), Bond II.

Fritz, IL von 1945, «The Discovery of Incommensurability by Hipposus of Metapontum», *Annals of Mathematics*, 46, 242.

Garber, D. 1992, en *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge University Press, Cambridge).

Gardner, M. 2003, *Are Universes Thicker than Blackberries?* (W. W. Norton, Nueva York).

Gaukroger, S. 1992, en *The Cambridge Companion to Descartes*, ed. J. Cot-tingham (Cambridge University Press, Cambridge).

—, 2002, *Descartes' System of Natural Philosophy* (Cambridge University Press, Cambridge).

Gingerich, O. 1973, «Kepler, Johannes» en *Dictionary of Scientific Biography,* ed. Charles Coulston Gillespie, vol. 7 (Scribners, Nueva York), 289.

Girifalco, L. A. 2008, *The Universal Force* (Oxford University Press, Oxford).

Glaisher, J. W. L. 1888, Bicentenary Address, *Cambridge Chronicle,* 20 de abril de 1888.

Gleick, J. 1987, *Chaos: Making a New Science* (Viking, Nueva York).

—, 2003, *IsaacNewlon* (Vintage Books, Nueva York).

Glucker, J. 1978, *Antiochus and the Late Academy*, Hypomnemata 56 (Van-denhoeck & Ruprecht, Göttingen).

Gödel, K 1947, en 1983 *Philosophy of Mathematics: Selected Readings,* segunda edición, eds. P. Benaceroff y H. Putnam (Cambridge University Press, Cambridge).

Godwin, M. e Irvine, A. D. 2003, en N. Griffin (ed.), *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge University Press, Cambridge).

Goldstein, R. 2005, *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt GÖdel* (W. W. Norton & Company, Nueva York).

Gosling,J. C. B. 1973, *Platón* (Routledge & Kegan Paul, Londres).

Gott, J, R. 2001, *Time Travel in Einstein's Universe* (Houghton Mifilin, Boston).

Grant, M. (trad.) 1971, Cicerón siglo I a.C, *Discussion at Tusculam* (o, en otras traducciones, *Tusculan Disputations),* en *Cicero: On the Good Life*

(Penguin Classics, Londres). Graunt, J. 1662, *Natural and Political Observations Mentioned in aFollotving*

Index, and Made Upon the Bills of Mortality (Tho Roycroft, Londres). Gray, J. J. 2004, *janos Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space*

(Burady Library, Cambridge, MA). Grayling, A. C. 2005, *Descartes: The Life and, Times of a Genius* (Walker *8c*

Company, Nueva York). Greenberg, M.J. 1974, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and Ilistory* (W. H. Freeman and Company, Nueva York), tercera edición 1933.

Greene, B. 1999, *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (W. W. Norton, Nueva York).

—, 2004, *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality* (Alfred A. Knopf, Nueva York).

Greve, D. (trad.) 1988, Herodoto 440 a.C, *The History,* libro III (University of Chicago Press, Chicago).

Gross, D. 1988, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Estados Unidos, vol.85, 8371.

Guthrie, K S. 1987, *The Pythagorean Sourcebook and Library: An Anthology of Ancient Writings which Relate to Pythagoras and Pythagorean Philosophy* (Phanes Press, Grand Rapids, MI).

Hald, A. 1990, *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750* (John Wiley *8c* Sons, Nueva York).

Hall, A R. 1992, *Isaac Newton: Adventurer in Thought* (Oxford: Blackwell). Reeditado en 1996 (Cambridge University Press, Cambridge).

Hamilton, E. y Huntington, C. 1961, *The Collected Dialogues of Plato* (Pantheon, Nueva York).

Hamming, R. W. 1980, *The American Mathematical Monthly,* vol. 87, num. 2,81.

Hankins, F. H. 1908, *Adolphe Quetelet as Statistician* (Columbia University, Nueva York); publicado *online* por R. E. Wyllys en: http://www.ischool.utexas.edu/~wyllys/QueteletResources/index.html.

Hardie, R. P. y Gaye, R. K. (trad.), Aristóteles ca. 330 a.C, *Physics* http://people.bu.edu/wwildman/WeirdWildWeb/courses/wphil/readings/wphil_rdg07_physics_entire.htm (traducción inglesa con licencia Public Domain).

Hardy, G. H. 1940, *A Mathematician's Apology* (Cambridge University Press, Cambridge).

Havelock, E. 1963, *Preface to Plato* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Hawking, S. 2005, *God Created the Integers: The Mathematical Breakthroughs that Changed History* (Running Press, Filadelfia).

—, (ed.) 2007, *A Stubbornly Persistent Illusion: The Essential Scientific Writings of Albert Einstein* (Running Press, Filadelfia).

Hawking, S. y Penrose, R. 1996, *The Nature of Space and Time* (Princeton University Press, Princeton).

Heath, T. 1921, *A Histoiy of Greek Mathematics* (Clarendon Press, Oxford); reeditado en 1981 por (Dover, Nueva York).

Heath, T. L. 1897, *The Works of Archimedes* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hedrick, P. W. 2004, *Genetics of Populations* (Jones *8c* Bartlett, Sudbury, MA).

Heiberg, J. L. (ed.) 1910-1915, *Archimedes Opera Omnio cum Commentarees Eutocii* (Leipzig); el texto está en griego con su traducción al latín.

Hellman, H. 2006, *Great Feuds in Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever* (John Wiley *8c* Sons, Hoboken, NJ).

Hermite, C. 1905, *Correspondence d'Hermite et de Stieltjes* (Gauthier-Villars, Paris).

Hersh, R, 2000, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (Springer, Nueva York).

Herz-Fischier, R. 1998, *A Mathematical History of the Golden Number* (Dover Publications, Mineóla, NY).

Hicks, R. D. (trad.) 1925, Laercio, D. ca. 250 d.C, *Lives of Eminent Philosophers* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Hobbes, T. 1651, *Leviathan,* aparece por ejemplo en 1982 (Penguin Classics, Nueva York).

Hockett, C. F. 1960, *Scientific American,* 203, número de septiembre, 88. Höffe, O. 1994, *Immanuel Kant,* M. Farrier (trad.) (SUNY Press, Albany, NY).

Hofstadter, D. 1979, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (Basic

Books, Nueva York). Holden, C. 2006, *Science*, vol. 311, 317.

Huffman, C. 2006, «Pythagoras» en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/pythagoras/.

Huffman, C. A. 1999, en *The Cambridge Companion to Early Greek Philosophy*, ed. A. A. Long (Cambridge University Press, Cambridge).

Hume, D. 1748, *An Enquiry Concerning Llaman Understanding*, reeditado 2000 en *The Clarendon Edition of the Works of David Hume*, ed. T. L. Beauchamp (Oxford University Press, Oxford).

Irvine, A. D. 2003, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/.

Isaacson, W. 2007, *Einstein: His Life and Universe* (Simon & Schuster, Nueva York).

Jaeger, M. 2002, *The Journal of Roman Slud/ies*, vol. 92, 49. Jeans, J. 1930, *The Mysterious Universe* (Cambridge University Press, Cambridge).

Jones, V. F. R. 1985, *Bulletin of the America/n Mathematical Society*, 12, 103.

Joost-Gaugier, C. L. 2006, *Measuring Heaven: Pythagoras and His Influence on Thought and Art in Antiquity and the Middle Ages* (Cornell University Press, Ithaca).

Kaku, M. 2004, *Einstein's Cosmos* (Atlas Books, Nueva York).

Kant, I. 1781, *Critique of Pure Reason)* una de las numerosas traducciones inglesas es Müller, F. M. 1881, *Immanuel Kant's Critique of Pure Reason* (MacMillan, Londres).

Kaplan, M. y Kaplan, E. 2006, *Chances Are: Adventures in Probability* (Viking, Nueva York).

Kapner, D. J., Cook, T. S., Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Heckel, B. R., Hoyle, C. D. y Swanson, H. E. 2007, *Physical Review Letters*, 98, 021101.

Kasner, E. y Newman, J. R. 1989, *Mathematics and, the Imagination* (Tempus Books, Redmond, Washington).

Kauffman, L. H. 2001, *Knots and Physics*, tercera edicion (World Scientific, Singapur).

Keeling, S. V. 1968, *Descartes* (Oxford University Press, Oxford). Kepler,J. 1981, *Mysterium Cosmographicum* (Abaris Books, Nueva York). —, 1997, *The*

Harmony of the World (American Philosophical Society, Filadelfia).

Klessinger, N., Szczerbinski, M. y Varley, R. 2007, *Neuropsychologia*, 45, 1642.

Kline, M. 1967, *Mathematics for Liberal Arts* (Addison-Wesley, Reading, MA). Reeditado en 1985 con el titulo *Mathematics for the Nonmathe-maticians* (Dover Publications, Nueva York).

—, 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, Oxford).

Knott, C. G. 1911, *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait* (Cambridge University Press, Cambridge).

Koyre, A. 1978, *Galileo Studies*, trad. J. Mepham (Humanities Press, Atlantic Highlands, NJ).

Kramer, M., Stairs, I. H., Manchester, R. N., *et al.* 2006, *Science*, vol. 314, num. 5796, 97.

Krauss, L. 2005, *Hiding in the Mirror: The Mysterious Allure of Extra Dimensions, from Plato to String Theory and Beyond* (Viking Penguin, Nueva York).

Kraut, R. 1992, *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge University Press, Cambridge).

Kruger, L. 1987, en *The Probabilistic Revolution*, eds. L. Kruger, L. J. Daston y M. Heidelberger (MIT Press, Cambridge, MA).

Kuehn, M. 2001, *Kant: A Biography* (Cambridge University Press, Cambridge) .

Lagrange, J. 1797, *Theorie desFonctions Analytiques*, p. 223.

Lahanas, M. *Archimedes and his Burning Mirrors*, www.mlahanas.de/Greeks/Mirrors.htm.

Lakoff, G. y Nunez, R. E. 2000, *Where Mathematics Comes From* (Basic Books, Nueva York).

Lawlor, R. y Lawlor, D. (trad.) 1979, Teon de Esmirna ca. 130 d.C, *Mathematics, Useful for Understanding Plato* (Wizards Bookshelf, San Diego).

Lecar, M., Franklin, F. A., Holman, M.J. y Murray, N. W. 2001, *Annual*

Review of Astronomy and Astrophysics, 39, 581. Lightman, A. 1993, *Einstein's Dreams* (Pantheon Books, Nueva York). Litde, C. N. 1899, *Transaction of the Royal Society of Edinburgh*, 39, part III, 771.

Livio, M. 2002, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (Broadway Books, Nueva York).

—, 2005, *The Equation that Couldn't Be Solved* (Simon & Schuster, Nueva York).

Lottin, J. 1912, *Quetelet Staticien et Sociologue* (Institut Supérieur de Philosophie, Louvain).

MacHale. D. 1985, *George Boole: His Life and Work* (Boole Press Limited, Dublin).

Machamer, P. 1998, en *The Cambridge Companion to Galileo*, ed. P. Pachamer (Cambridge University Press, Cambridge).

Manning, H. P. 1914, *Geometry of Four Dimensions* (MacMillan, Londres), reimpresión 1956 (Dover Publications, Nueva York).

Maor, E. 1994, *e: The Story of a Number* (Princeton University Press, Princeton).

McManus, J. (trad.) 2006, Frova, A. y Marenzana, M. 1998, *Thus Spoke Galileo: The Great Scientist's Ideas and Their Relevance to the Present Day* (Oxford University Press, Oxford).

McMullin, E. 1998, en *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge University Press, Cambridge).

Mekler, S. (ed.) 1902, *Academicorum Philosophorum index Herculanensis* (Weidmann, Berlin).

Menasco, W. y Rudolph, L. 1995, American Scientist, vol. 83, enero-febrero, 38.

Merton, R. K. 1993, *On the Shoulders of Giants: A Shandean Postscript* (University of Chicago Press, Chicago).

Messer, R. y Straffin, P. 2006, *Topology Now* (The Mathematical Association of America, Washington, DC).

Miller, V. R. y Miller, R. P. (eds.) 1983, *Descartes, Principles of Philosophy* (Reidel, Dordrecht).

Mitchell, J. C. 1990, en *Handbook of Theoretical Computer Science*, ed. J. van Leeuwen (MIT Press, Cambridge, MA).

Monk, R. 1990, *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius* (Jonathan Cape, Londres).

Moore, G. H. 1982, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and*

Influence (Springer Verlag, Nueva York). Morgenstern, O. 1971, Borrador «Mémorandum from Mathematica»,

Asunto: History of the Naturalization of Kurt Gôdel. Morris, T. 1999, *Philosophy for Dummies* (IDG Books, Foster City, GA). Morrow, G. (trad.) 1970, *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's*

Elements, (Princeton University Press, Princeton). Motte, A. 1729, *Sir Isaac Neiuton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*, revisado por F. Cajori 1947 (University of California Press, Berkeley) También como 1995, *The Principia* (Prometheus Books, Nueva York).

Mueller, I. 1991, en *Science and Philosophy in Classical Greece*, ed. A. Bowen (Garland, Londres).

—, 1992, en *The Cambridge Companion to Plato*, ed. R. Kraut (Cambridge University Press, Cambridge).

—, 2005, en *Mathematics and the Divine: A Historical Study*, eds. T. Koetsier y L. Bergmans (Elsevier, Amsterdam).

Nagel, E. y Newman, J. 1959, *Gödel's Proof (Rouüedge* & KeganPaul, Nueva York). Reeditado 2001 (New York University Press, Nueva York).

Netz, R. 2005, en *Mathematics and the Divine: A. Historical Study*, eds. T. Koetsier y L. Bergmans (Elsevier, Amsterdam).

Netz, R. y Noel, W. 2007, *The Archimedes Codex: Hoto a Medieval Prayer Booh Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist* (Da Capo Press, Filadelfia).

Neuwirth, L. 1979, *Scientific American*, vol. 240, número de junio, 110. Newman, J. R. 1956, *The World of Mathematics* (Simon *8c* Schuster, Nueva York).

Newton, Sir I. 1730, *Opticks, or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light* (Londres, cuarta edición). Reeditado en 1952 (Dover Publications, Nueva York).

Nicolson, M. 1935, *Modern Philology*, vol. 32, núm. 3, 233.

O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. 2003, *Peter Guthrie Tait*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tait.html.

—, 2005, *Hermann Günter* Grassmann*, http://www-history.mcs.st-an-d r e ws. ac. u k/ Ma th e m a tic i ans/ Grass m an n. h tm 1.

—, 2007, G. H. Hardy addresses the British Association in 1922, http:// www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/BA_1922_l.html.

Obler, L. K. y Gjerlow, K 1999, *Language and the Brain* (Cambridge University Press, Cambridge).

Odom, B., Hanneke, D., D'Urso, B. y Gabrielse, G. 2006, *Physical Review Letters*, 97, 030801.

Oiscamp, P.J. (trad.) 1965, Descartes, R. 1637, *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology* (The Bobbs-Merrill Company, Indianapolis).

Ooguri, H. y Vafa, C. 2000, *Nuclear Physics B*, 577, 419. Orel, V. 1996, *Gregor Mendel: The First Geneticist* (Oxford University Press, Nueva York).

Overbye, D. 2000, *Einstein in Love: A Scientific Romance* (Viking, Nueva York).

Pais, A. 1982, *Subtle Is the Lord: The Science and Life of Albert, Einstein* (Oxford University Press, Oxford). Panek, R. 1998, *Seeing and Believing: How the Telescope Opened Our Eyes and Minds to the Heavens* (Viking, Nueva York).

Paulos, J. A. 2008, *Irreligion: A Mathematician Explains Wtiy the Arguments for God Just Don't Add Up* (Hill and Wang, Nueva York).

Penrose, R. 1989, *The Emperor's Neio Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics* (Oxford University Press, Oxford). —, 2004, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Latos of the Universe* (Jonathan Cape, Londres).

Perko, K. A. Jr. 1974, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45, 262.

Pesie, F. 2007, *Beyond Geometry: Classic Papers from Riemann to Einstein* (Dover Publications, Mineóla, NY).

Peterson, I. 1988, en *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics* (W. H. Freeman and Company, Nueva York).

Petsche,J.-J. 2006, *Grassmann* (Birkhàuser Verlag, Basilea).

Pinker, S. 1994, *The Language Instinct* (William Morrow and Company, Nueva York).

Poincaré, H. 1891, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées 2*, 769. El artículo está reeditado en inglés en Pesie 2007. Porfirio ca. 270 d.C, *Life of Pythagoras* en M. Hadas y M. Smith (eds.) 1965, *LIeroes and Gods* (Harper and Row, Nueva York).

Przytycki, J. H. 1991, *Proceedings of the Mexican National Congi'ess of Mathematicians* (noviembre 1991).

Putnam, H. 1975, *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers,* vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge), 60. Que tele t, L. A. J. 1828, *Instructions Populaires sur le Calcul des Probabilités* (H. Tarbier *8c* M. Hayez, Bruselas).

Quine, W. V. 1982, *Methods of Logic,* cuarta edición (Harvard University Press, Cambridge, MA).

—, 1966, *The Ways of Paradox and Other Essays* (: Random House, Nueva York).

Radelet-de Grave, P. (ed.) 2005, *Bernoulli-Edition,* http://www.ub.unibas. ch/spez/bemoull.htm.

Ramachandran, V. S. y Blakeslee, S. 1999, *Phantoms of the Brain* (Quill, Nueva York).

Randall, L. 2005, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions* (Ecco, Nueva York).

Raskin, J. 1998, *Effectiveness of Mathematics,* http://jef.raskincenter.org/unpublished/effectiveness_mathematics.html.

Raymond, E. S. 2005, *The Utility of Mathematics,* http://catb.org/~esr/writings/utility-of-math/.

Redondi, P. 1998, en *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge University Press, Cambridge).

Rees, M.J. 1997, *Before the Beginning* (Addi son-Wesley, Reading, MA).

Reeves, E. 2008, *Galileo's Glassworks: The Telescope and the Mirror* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Renon, L. y Felliozat, J. 1947, *L'Inde Classique: Manuel des Etudes Indiennes* (Payot, Paris).

Rescher, N. 2001, *Paradoxes: Their Roots, Range, and Resolution* (Open Court, Chicago).

Resnik. M. D. 1980, *Frege and the Philosophy of Mathematics* (Cornell University Press, Ithaca). Reston, J. 1994, *Galileo: A Life* (Harper Collins, Nueva York). Ribenboim, P. 1994, *Catalan's Conjecture* (Academic Press, Boston). Ricoeur. P. 1996, *Synthèse*, 106, 57.

Riedweg. C; traducido por S. Rendall 2005, *Pythagoras: His Life and Influence* (Cornell University Press, Ithaca).

Rivest, R., Shamir, A. y Adleman. L. 1978, *Communications of the Association fo?~ Computing Machinery,* vol. 21 (2), 120.

Rodis-Lewis, G. 1998, *Descartes: His Life and Thought* (Cornell University Press, Ithaca).

Rosenthal, J. S. 2006, *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities* (Joseph Henry Press, Washington, DC).

Ross, W. D. 1951, *Plato's Theory of Ideas* (Clarendon Press, Oxford).

Rouse Ball, W. W. 1908, *A Short Account of the History of Mathematics* (4-ediciôn), reeditado I960 (Dover Publications, Mineola, NY).

Rucker, R. 1995, *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite* (Princeton University Press, Princeton).

Russell, B. 1919, *Introduction to Mathematical Philosophy* (George Allen and Unwin, Londres). Reimpreso 1993, ed. J. Slater (Routledge, Londres) . Reimpreso 2005 (Barnes & Noble, Nueva York).

—, 1945, *History of Western Philosophy,* reimpreso 2007 (Touchstone, Nueva York).

—, 1997, *The Problems of Philosophy* (Oxford University Press, Oxford). Sainsbury, R. M. 1988, *Paradoxes* (Cambridge University Press, Cambridge).

Sarrukai, S. 2005, *Current Science,* vol. 88, num. 3, 415.

Schmitt, C. B. 1969, «Expérience and Experiment: A Comparison of Zabarella's Views with Galileo's in De Motu», *Studies in the Renaissance,* 16, 80.

Sedgwick, W. T. y Tyler, H. W. 1917, *A Short History of Science* (The MacMillan Company, Nueva York).

Shapiro, S. 2000, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford University Press, Oxford).

Shea, W. 1998, en *The Cambridge Companion to Galileo*, ed. P. Machamer (Cambridge University Press, Cambridge).

—, 1972, *Galileo's Intellectual Revolution: Middle Period 1610-1632* (cience History Publications, Nueva York).

Smith, D. E. y Latham, M. L. (trad.) 1954, *The Geometry of René Descartes* (Dover

Publications, Mineóla, NY).

Smolin, L. 2001, *Three Roads to Quantum Gravity* ((Basic Books, Nueva York).

—, 2006, *The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, The Fall of Science, and What Comes Next* (Houghton Mifflin, Boston).

Sobel, D. 1999, *Galileo's Daughter* (Walker & Company, Nueva York).

Sommerville, D. M. Y. 1929, *An introduction to the Geometry of N Dimensions* (Mathuen, Londres).

Sorell, T. 2005, *Descartes Reinvented* (Cambridge University Press, Cambridge) .

Sorenson, R. 2003, *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind* (Oxford University Press, Oxford).

Sossinsky, A. 2002, *Knots: Mathematics with a Twist* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Stanley, T. 1687, *The History of Philosophy,* sección novena, editado 1970 como facsímil fotográfico con el título *Pythagoras: His Life and Teachings* (The Philosophical Research Society, Los Angeles).

Steiner, M, 2005, en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* ed. S. Shapiro (Oxford University Press, Oxford).

Stewart, I. 2004, *Galois Theory* (Chapman *8c* Hall/CRC, Boca Raton, FL).

Stewart, J. A. 1905, *The Myths of Plato* (MacMillan and Co., Londres).

Stigler, S. M. 1997, en *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, *Mémoires,* Colección 8 (3), 13, 47.

Strohmeier, J. y Westbrook, P. 1999, *Divine Harmony* (Berkely Hills Books, Berkeley, CA).

Stuckely. W. 1752, *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life.* Reimpreso 1936 (Taylor and Frances, Londres).

Summers, D. W. 1995, *Notices of the American Mathematical Society,* vol. 42, num. 5, 528.

Swerdlow, N. 1998, en *The Cambridge Companion to Galileo,* ed. P. Machamer (Cambridge University Press, Cambridge). Sylla, E. D. (trad.) 2006, Bernoulli, J. 1713, *(Ars Conjectandi) The Art of Conjecturing,* con introducción y notas (Johns Hopkins University Press, Baltimore).

Tabak, J. 2004, *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty* (Facts on File, Nueva York).

Tait, P. G. 1898, en *Scientific Papers* (Cambridge University Press, Cambridge), 273.

Tait, W. W. 1996, en *The Philosophy of Mathematics,* ed. W. D. Hart (Oxford

University Press, Oxford). Taylor, T. (trad.) 1986, *Iamblichus' Life of Pythagoras* (Inner Traditions, Rochester, VT).

Tegmark, M. 2004, en *Science and Ultimate Reality,* eds. J. D. Barrow, P. C. W. Davies, y C. L. Harper, Jr. (Cambridge University Press, Cambridge).

—, 2007a, «Shut Up and Calcinate», arXiv 0709.4024 [hep-th]. —, 2007b, «The Mathematical Universe», arXiv 0704.0646 [gr-qc]. Ten nan t. N. 1997, *The Taming of the True* (Oxford University Press, Oxford).

Tiles, M. 1996, en *The Blackwell Companion to Philosophy,* eds. N. Bunin y E. P. Tsui-James (Blackwell Publishing, Oxford).

Todd, J. M. (trad.) 1998, Rodis-Lewis, G. 1998, *Descartes: His Life and Thought* (Cornell University Press, Ithaca).

Todhunter, I. 1865, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Mac-Mil lan and Co., Cambridge).

Toffler, A. 1970, *Future Shock* (Random House, Nueva York).

Trudeau, R.J. 1987, *The Non-Euclidean Revolution* (Berkhäuser, Boston).

Truesdell, C. 1960, *The Rotational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788, Leonhardi Euler Opera Omnia,* ser. II, vol. 11, parte 2 (Orell Fiissli, Zurich).

Truscot, F. W. y Emory, F. L. (trad.) 1902, Laplace, P. S. Marquis de 1814, *A Philosophical Essay on Probabilities* (John Wiley *8c* Sons, Nueva York). Reeditado en 1995 (Dover, Mineola, NY).

Turnbull, H. W., Scott, J. F., Hall, A. R. y Tilling, L. (eds.) 1959-1977, *The Correspondence of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge).

Urquhart, A. 2003, en *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* ed. N. Griffin (Cambridge University Press, Cambridge).

Vafa, C. 2000, en *Mathematics: Frontiers and Perspectives,* eds. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax y B. Mazur (American Mathematical Society, Providence, RI).

Van der Waerden, B. L. 1983, *Geometry and Algebra in Ancient Civilisations* (Springer-Verlag, Berlin).

Van Heijenoort, J. (ed.) 1967, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (Harvard University Press, Cambridge, MA).

Van Helden, A. 1996, en *Proceedings of the American Philosophical Society,* 140, 358.

Van Helden, A. (trad.) 1989, Galileo 1610, *Sidéreas Nuncius or The Sidereal Messenger, Galileo Galilei* (University of Chicago Press, Chicago).

Van Helden, A. y Burr, E. 1995, *The Galileo Project,* http://galileo.rice.edu/index.html.

Van Stegt, W. P. 1998, in *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s,* ed. P. Mancosu (Oxford University Press, Oxford).

Vandermonde, A. T. 1771, *Mémoires de TAcademie Royale des Sciences,* París, 566.

Varley, R., Kiessinger, N., Romanowski, C. y Siegal, M. 2005, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Estados Unidos, 102, 3519. Vawter, B. 1972, *Biblical Inspiration* (Westminster, Filadelfia).

Veitch, J. (trad.) 1901, *The Philosophy of Descartes: Containing the Method, Meditations and Other Work* (Tudor Publishing, Nueva York).

Vi le n kin, A. 2006, *Many Worlds in One: The Search for Other Universes* (Hill and Wang, Nueva York).

Vitruvius, M. P. siglo I a.C, *De Architecture,* en I. D. Rowland y T. N. Howe (eds.) 1999, *Ten Books on Architecture* (Cambridge University Press, Cambridge).

Vlostos, G. 1975, *Plato's Universe* (University of Washington Press, Seattle).

Von Gebler, K. 1879, *Galileo Galilei and the Roman Curia,].* Sturge (trad.). Reimpreso en 1977 (Richwood Publishing Company, Merrick, NY).

Vrooman, J. R. 1970, *René Descartes: A Biography* (Putnam, Nueva York).

Waisman, F. 1979, *Wittgenstein and the Vienna Circle,* conversaciones grabadas por F. Waismann, ed. B. McGuinness, trad. J. Schulte y B. McGuinness (Basii Blackwell, Oxford).

Wallace, D. F. 2003, *Everything and More: A Compact History of Infinity* (W. W. Norton, Nueva York).

Wallechinsky, D. y Wallace, I. 1975-1981, *Biography of Scottish Child Prodigy Marjory Fleming Part 1*, http://www.trivia-libraiy.com/b/biography-of-sco tti sh-c h i 1 d-piodigy-marj o ry-fle m i ng-par t-1. h tm.

Wallis, J. 1685, *Treatise of Algebra*, citado en Manning 1914.

Wang, H. 1996, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (MIT Press, Cambridge, MA).

Washington, G. 1788, Carta a Nicholas Pike, 20 de junio de 1788, en *Writings of George Washington*, ed. J. C. Fitzpatrick (Government Printing Office, Washington, 1931-44). Citado en K. L. Deutsch y W. Nicgorski (eds.) 1994, *Leo Strauss: Political Philosopher and Jewish Thinker* (Rowrnan & Littlefield, Lanham, MD).

Wasserman, S. A. y Cozzarelli, N. R. 1985, *Science*, 232, 951.

Watson, R. 2002, *Cogito, Ergo Sum: The Life of René Descartes* (David R. Godine, Boston).

Weinberg, S. 1993, *Dreams of a Final Theory* (Pantheon Books, Nueva York).

Wells, D. 1986, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (Penguin, Londres). Edición revisada 1997.

Westfall, R. S. 1983, *Never at Rest: A Biography of Isaac Netoton* (Cambridge University Press, Cambridge).

Whiston, W. 1753, *Memoirs of the Life and Writings of Mr. William Whiston, Containing Memoirs of Several of His Friends Also*, segunda edición (impreso para J. Whiston y B. White, Londres).

White, L. A. 1947, *Philosophy of Science*, vol. 14, num. 4, 289.

White, N. P. 1992, en *The Cambridge Companion to Plato*, ed. R. Kraut (Cambridge University Press, Cambridge).

Whitehead, A. N. 1911, *An Introduction to Mathematics* (Williams & Norga-te, Londres). Reimpreso, por ejemplo, en 1992 (Oxford University Press, Oxford).

—, 1929, *Process and Reality: An Essay in Cosmology*, reeditado en 1978, eds. D. R. Griffin y D. W. Sherburne (Free Press, Nueva York).

Whitehead, A. N. y Russell, B. 1910, *Principia Mathematica* (Cambridge University Press, Cambridge). Segunda edición 1927.

Wickstead, P. H. y Cornford F. M. (trad.) 1960, Aristóteles ca. 330 a.C, *Physics* (Heinemann, Londres).

Wigner, E. P. 1960, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, num. 1,1. Reimpreso en T. L. Saatz y F.J. Weyl (eds.) 1969, *The Spirit and the Uses of the Mathematical Sciences* (McGraw-Hill, Nueva York).

Wilczek, F. 2006, *Physics Today*, Noviembre, 8. Wilczek, F. 2007, *Physics Today*, Mayo, 8.

Witten, E. 1989, *Communications in Mathematical Physics*, 121, 351. Wolfram, S. 2002, *A New Kind of Science* (Wolfram Media, Champaign, IL).

Wolterstorff, N. 1999, en T. Sorell (ed.) *Descartes* (Ashgate, Dartmouth). Woodin, W. H. 2001a, *Notices of the American Mathematical Society*, 48 (6), 567.

—, 2001a, *Notices of the American Mathematical Society*, 48 (7), 681.

Wright, C. 1997, *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, ed. R. Heck (Oxford University Press, Oxford).

Zalta, E. N. 2005, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/frege/.

—, 2007, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/.

Zweibach, B. A. 2054, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).

MARIO LIVIO. Experto astrónomo, ha sido director de la División de Ciencias del Space Telescope Science Institute (STScI), el instituto que desarrolla el programa científico encargado de desarrollar el programa del telescopio espacial Hubble. Se doctoró en astrofísica teórica en la Universidad de Tel Aviv y fue profesor en el Departamento de Física del Technion-Israel Institute of Technology desde 1981 hasta 1991, momento en el que se incorporó al STScI. Ha publicado más de 400 ensayos científicos y ha recibido numerosos premios por sus investigaciones. Es autor de *The Accelerating Universe*, *La proporción áurea* y *La ecuación jamás resuelta*.

NOTAS

[1] Jeans 1930. <<

[2] Einstein 1934. <<

[3] Hobbes l651. <<

[4] Penrose comenta de forma sublime estos «tres mundos» en Penrose 1989 y Penrose 2004.<<

[5] Wigner 1960. Volveré diversas veces a este artículo en el transcurso del libro.<<

[6]Hardy 1940.<<

[7] Para un comentario sobre la ley de Hardy-Weinberg en su contexto véase, por ejemplo, Hedrick 2004.<<

[8]En 1973, Cocks inventó lo que se ha popularizado con el nombre de algoritmo de cifrado RSA, pero en aquel momento era secreto. Años después, R. Rivest, A. Shamir y L. Adleman del MIT reinventaron el algoritmo de forma independiente. Véase Rivest, Shamir y Adleman 1978.<<

[9]Se puede hallar una descripción para profanos de la teoría de grupos y su historia en Livio 2005.<<

[10]Véase Gleick 1987 para una descripción divulgativa de la aparición de la teoría del caos.<<

[11]Black y Scholes 1973.<<

[12]En Applegate *et al.* 2007 se ofrece una soberbia (aunque técnica) descripción del problema y de sus soluciones.<<

[13]Changeux y Connes 1995.<<

[14]Gardner 2003.<<

[15]Atiyah l995.<<

[16]Changeux y Connes 1995.<<

[17]Véase, por ejemplo, Wallechinsky y Wallace 1975-1981 para una breve biografía de Marjory Fleming.<<

[18]Stewart 2004.<<

----

[19]Véase el capítulo 4 para una descripción más detallada de la aportación de Descartes.<<

[20]Descartes 1644.<<

[21]Laercio ca. 250 d.C; Porfirio ca. 270 d.C; Jámblico ca. 300 d.C. Véase Hicks 1925, Dillon y Hershbell 1991, Taylor 1986.<<

[22]Jámblico ca. 300 d.C; comentado en Guthrie 1987.<<

[23]Aristóteles ca. 350 a.C. (Barnes y Lawrence 1984); comentado en Burkert 1972. <<

[24]Herodoto 440 a.C. (Greve 1988)<<

[25]Porfirio ca. 270 d.C.7. <<

[26]Véase Strohmeier y Westbrook 1999 para un comentario certero de la perspectiva pitagórica.<<

[27]Stanley 1687.<<

[28]Para una fascinante recopilación de propiedades de los números véase Wells 1986.
<<

[29]Citado en Heath 1921.<<

[30]Jámblico ca. 300 d.C; comentado en Guthrie 1987.<<

[31]Strohmeier y Westbrook 1999; Stanley 1687.<<

[32]En Heath 1921 se comenta ampliamente el término y su significado en distintas épocas. El matemático Teón de Esmirna (ca. 70-135 d.C.) utilizaba el término en relación con la expresión figurativa de los números descritos en el texto del libro (Lawlor y Lawlor 1979).<<

[33]Como se puede ver, en sus comentarios Proclo no detalla específicamente su propia opinión sobre si Pitágoras fue el primero en formular el teorema. La historia del buey aparece en los escritos de Laercio, Porfirio y el historiador Plutarco (ca. 46-120 d.C.) Se basa en poemas de Apolodoro. Sin embargo, los versos sólo mencionan «esa famosa proposición» sin mencionar a qué proposición se refiere. Véase también Hicks 1925, Dryden 1992.<<

[34]Renon y Felliozat 1947, Van der Waerden 1983.<<

[35]Esta cosmología se basaba en la idea de que la realidad surge del hecho de que la Forma (que se considera el límite) da forma a la Materia (que se considera indefinida).<<

[36]Morris 1999.<<

[37]Joost-Gaugier 2006.<<

[38]Véase Huffman 1999, Riedweg 2005, Joost-Gaugier 2006 y Huffman 2006 en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* para obtener información sobre las aportaciones pitagóricas y su influencia.<<

[39]Fritz l945.<<

[40]En este libro no se tratan temas como los números transfinitos ni las obras de Cantor y Dedekind. Aczel 2000, Barrow 2005, Devlin 2000, Rucker 1995 y Wallace 2003 son excelentes referencias para no expertos.<<

[41]Jámblico ca. 300 d.C. (Dillon y Hershbell 1991, Taylor 1986).<<

[42]Véase comentario en Netz 2005.<<

[43]Whitehead 1929.<<

[44]Los títulos de los textos acerca de Platón y sus ideas podrían llenar por sí mismos un volumen entero. Estos son únicamente algunos de los más útiles, a mi juicio. Sobre Platón en general: Hamilton y Hun-tingdon 1961, Havelock 1963, Gosling 1973, Ross 1951, Kraut 1992. Sobre su matemática: Heath 1921, Cherniss 1951, Mueller 1991, Fowler 1999, Herz-Fischler 1998.<<

[45]La alocución se escribió en 362 d.C, pero no daba detalles acerca del contenido de la inscripción. El texto de la inscripción viene de una nota al margen en un manuscrito de Elio Arístides. La nota pudo haberla escrito el orador del siglo IV Sopratos, y dice (según la traducción de Andrew Barker): «En el frontispicio de la Escuela de Platón una inscripción rezaba "Nadie entre aquí sin saber geometría" y nada decía acerca de ser injusto o desleal, pues la geometría persigue la imparcialidad y la justicia». La nota parece implicar que Platón sustituyó en su inscripción la habitual referencia a la injusticia o la deslealtad que aparecía en carteles en los lugares sagrados («Nadie entre aquí si es injusto o desleal») por «sin saber geometría». Esta historia la repitieron posteriormente al menos cinco filósofos de Alejandría en el siglo VI, y finalmente llegó a la obra *Chiliades* del erudito del siglo XII Joannes Tzetzes (ca. 1110-1180). Véase Fowler 1999 para un comentario detallado acerca de la obra.<<

[46]Véase Glucker 1978 para un resumen de los numerosos intentos arqueológicos fallidos.<<

[47]Comentado en Chemiss 1945, Mekler 1902.<<

[48]Chemiss 1945, Morrow 1970.<<

[49]Platón (Bloom 1968).<<

[50]Washington 1788.<<

[51]Stewart 1905 contiene un interesante comentario acerca de la alegoría.<<

[52]Se pueden hallar interesantes reflexiones acerca del platonismo y su lugar en la filosofía de la matemática en Tiles 1996, Mueller 1992, White 1992, Russell 1945, Tait 1996, por ejemplo. Son textos excelentes para profanos Davis y Hersh 1981 y Barrow 1992.<<

[53]Véase un comentario al respecto en Mueller 2005.<<

[54]Los comentarios de Platón sobre astronomía y movimiento planetario aparecen en la *República* (Bloom 1968), en *Timeo* y en *Leyes*. Vlos-1975 y Mueller 1992 comentan las implicaciones de la postura de Platón.<<

[55]Por Doxiadis 2000.<<

[56]Para una descripción detallada véase Ribenboim 1994.<<

[57]Comentaré estas opiniones con amplitud en el capítulo 9.<<

[58]Bell 1940.<<

----

[59]Aristóteles ca. 330 a.C. (Hardy y Gaw, Wickstead y Comford 1960); véase también Koyre 1978. <<

[60]Galileo 1589-1592 (Drablein y Drake 1960). <<

[61]En el capítulo 7 se tratarán exhaustivamente estas y otras construcciones lógicas. <<

[62] Bell 1937. <<

[63] Se menciona en los comentarios de *Medición de un círculo* del matemático Eutocio (ca. 480-540 d.C); Heiberg 1910-1915. <<

[64] Plutarco ca. 75 d.C. (Dryden 1992). <<

[65] Su año de nacimiento se ha determinado a partir del documento histórico denominado Chiliades, del escritor bizantino del siglo XII Joannes Tzetzes. <<

[66] En Dijksterhuis 1957 se comentan las pruebas de ello. <<

[67] El arquitecto romano Marco Vitruvio Polio (siglo I a.C.) nos cuenta esta historia en su tratado *De Architectura* (véase Vitruvio, siglo I a.C). Explica que Arquímedes sumergió en agua un trozo de oro y un trozo de plata, ambos del mismo peso que la corona, y halló que la corona desplazaba más agua que el oro pero menos que la plata. No es difícil demostrar que, a partir de la diferencia de volumen desplazado se puede calcular la proporción de pesos del oro y la plata en la corona. Así, a diferencia de lo que dicen algunas de las narraciones populares, Arquímedes no tuvo que utilizar las leyes de la hidrostática para resolver el problema de la corona. <<

[68] En una carta de Thomas Jefferson a M. Correa de Serra en 1814, escribía: «la buena opinión de la humanidad, como la palanca de Arquímedes, mueve el mundo si cuenta con el punto de apoyo adecuado». Lord Byron menciona la frase de Arquímedes en *Don Juan.* John Fitzgerald Kennedy la utilizó en un discurso de su campaña, citado en el periódico *The New York Times* el 3 de noviembre de 1960. Mark Twain la usó en un artículo titulado «Arquímedes» en 1887. <<

[69] Un grupo de estudiantes del MIT intentó reproducir la quema de un barco mediante espejos en octubre de 2005. Algunos de ellos repitieron también el experimento en el programa de TV *Cazadores de mitos*.
Los resultados no fueron muy definitivos; aunque los estudiantes lograron producir un área que quemaba y se mantenía sola, no lograron producir un fuego demasiado grande. Un experimento similar efectuado en Alemania en septiembre de 2002 logró encender las velas de un barco mediante el uso de 500 espejos. Véase el sitio web de Michael Lahanas para un comentario acerca de los espejos incendiarios. <<

[70] Exactamente estas palabras se mencionan en *Chiliades* de Tzetzes; véase Dijksterhuis 1957. En 75 d.C, Plutarco dice que Arquímedes simplemente se negó a ser conducido ante Marcelo hasta no haber resuelto el problema que captaba su atención. <<

[71] Whitehead l911. <<

[72] Heath 1897 es un trabajo estupendo acerca de Arquímedes. Otras obras excelentes son Dijksterhues 1957 y Hawking 2005. <<

[73] Heath 1897. <<

[74] Véase Netz y Noel 2007 para una magnífica descripción del Proyecto Palimpsesto. <<

[75] Probablemente en 975 d.C. <<

[76] Netz y Noel 2007. <<

[77] Will Noel, director del proyecto, organizó una reunión con William Christensen-Barry, Roger Easton y Keith Knox. Éste fue el equipo que diseñó el sistema de captación de imágenes de banda estrecha e inventó el algoritmo utilizado para revelar parte del texto. Los investigadores Anna Tonazzini, Luigi Bedini y Emanuele Salerno han desarrollado técnicas de proceso de imágenes adicionales. <<

[78] Dijksterhuis 1957. <<

[79] Berlinski 1996 contiene una bella descripción sobre la historia y el significado del cálculo. <<

[80] Heath 1921. <<

[81] Plutarco ca. 75 d.C. (Dryden 1992) <<

[82] Cicerón, siglo I a.C. Para un análisis académico del texto de Cicerón en términos de estructura, retórica y simbolismo, véase Jaeger 2002. <<

[83] Una biografía moderna muy fidedigna es Drake 1978. Una versión más popular es Reston 1994. Véase también Van Helden y Burr 1995. La obra completa de Galileo (en italiano) aparece en Favaro 1890-1909. <<

[84] Bernardini y Fermi 1965. <<

[85] Galileo 1589-1592 (Drablein 1960; Drake 1960). Schmitt 1969 sugiere (siguiendo a D. A. Maklich) que la afirmación de Galileo puede ser consecuencia de que la mano que sujeta la bola de plomo está más fatigada que la que sujeta la de madera y, por tanto, la bola de madera se suelta algo antes. Véase McMannus 2006 para una excelente presentación de las ideas correctas de Galileo sobre la caída de los cuerpos. Koyre 1978 contiene un soberbio comentario sobre la física de Galileo. <<

[86] Shea 1972 y Machamer 1998 contienen rigurosos comentarios acerca de los métodos y los procesos mentales de Galileo. <<

[87] Galileo 1589-1592. En *De Motu* Galileo critica con liberalidad a Aristóteles. Véase Drablein y Drake 1960. <<

[88] Una bella narración de la vida de Virginia, llamada posteriormente hermana María Celeste, se puede hallar en *Galileo's Daughter,* Dava Sobel 1999. <<

[89] Galileo 1610 (Drake 1983, Van Helden 1989). Reeves 2008 contiene una excelente descripción de los trabajos que condujeron al telescopio. <<

[90] Swerdlow 1998. Para una descripción detallada de los descubrimientos de Galileo mediante el telescopio véase Shea 1972, Drake 1990. <<

[91] Panek 1998 realiza una descripción menos erudita pero encantadora de los descubrimientos de Galileo, así como una historia general del telescopio. <<

[92] El copernicanismo de Galileo se trata de forma exhaustiva en Shea 1998 y Swerdlow 1998. <<

[93] La carta en sí fue escrita al embajador de Toscana en Praga, pero Galileo incluyó en ella el anagrama para Kepler. <<

[94] De hecho, escribió a Galileo: «Os exhorto a que no prolonguéis durante más tiempo la duda del significado, pues estáis tratando con verdaderos alemanes. Pensad por un momento la inquietud que provoca en mí vuestro silencio». Citado en Caspar 1993. <<

[95] El episodio se trata con detalle en Shea 1972. <<

[96] El epigrama estaba en latín. Seggett (1570-1627) había sido alumno de Galileo en Padua. El epigrama aparece en *Le Opere* de Favaro. Nicolson 1935 trata con gran belleza el asunto de la poesía relacionada con los telescopios. <<

[97] Curzon 2004. <<

[98] Coresio 1612. Citado asimismo en Shea 1972. <<

[99] Aparece en *Considerazioni* de Di Grazia (1612), reimpreso en *Opere di Galileo*, Vol. 4, p. 385. <<

[100] Citado en Shea 1972. <<

[101] El relato completo sobre la controversia acerca de la naturaleza de las manchas solares se narra a la perfección en Van Helden 1996 y en Swerdlow 1998. Véase también Shea 1972. <<

[102] Antonio Favaro, que editó toda la obra de Galileo, halló que fragmentos significativos del manuscrito de Guiducci (con los textos de las clases) estaban escritos de puño y letra por Galileo. <<

[103] Drake 1960. <<

[104] Drake 1960. <<

[105] Drake 1960. <<

[106] Drake 1974. <<

[107] Feldberg 1995 y McMullin 1998 comentan estupendamente las opiniones de Galileo sobre la relación entre la ciencia y las Escrituras. <<

[108] Aparece también en Von Gebler 1879. <<

[109] En 1585, el teólogo Melchor Cano afirmaba que «no sólo las palabras, sino que hasta la última coma [de las Escrituras] había sido dictada por el Espíritu Santo». Citado en Vawter 1972. <<

[110] Redondi 1998 contiene una amplia descripción de ello. <<

[111] Drake 1967. <<

[112] De Santillana 1955. <<

[113] De Santillana 1955. <<

[114] Beltrán Mari 1994. Véase también comentario en McMannus 2006.<<

----

[115] Citado en Sedgwick y Tyler 1917. <<

[116] Existen numerosas biografías de Descartes. La clásica es Baillet 1691, y otras obras que me han resultado útiles son Vrooman 1970 y la relativamente reciente Rodis-Lewis 1998. En Bell 1937 se incluye un breve pero bello resumen. También son de gran interés Finkel 1898, Watson 2002 y Grayling 2005. <<

[117] Aunque no parece haber dudas de que Descartes conoció a Beeckman ese día, éste nunca menciona en su diario nada acerca de un problema en un cartel. Lo que Beeckman dice es que «Descartes se esforzó cuanto pudo para demostrar que el ángulo no existía en la realidad».<<

[118] Para una descripción véase Gaukroger 2002. <<

[119] Casi todos los biógrafos sitúan esa noche en la ciudad de Ulm, en el estado de Neuburg. El propio Descartes narró la historia en un cuaderno de notas que sus primeros biógrafos pudieron ver, del que sólo ha llegado hasta nuestros días la transcripción de algunos párrafos. Descartes repitió sus impresiones en su Discurso (Adam y Tannery 1897-1910). Véase Grayling 2005 y Cole 1992 para una descripción bastante exhaustiva de los sueños y de sus posibles interpretaciones. <<

[120] Carta a Pierre Chanut, embajador de Francia ante Suecia, que además era aficionado a la filosofía. Adam y Tannery 1897-1910. <<

[121] Su sepultura original se hallaba en el cementerio de Nord-Malmoe. Cuando sus restos se trasladaron a Francia, hubo rumores (Adam y Tannery 1897-1910) de que parte de ellos, el cráneo para ser exactos, permaneció en Suecia. En Francia, los restos se inhumaron en primer lugar en la abadía de Sainte Genevieve y, posteriormente, en el convento de los Petits-Augustines. Finalmente, se trasladaron a la catedral de Saint-Germain-des-Prés, en lo que actualmente es la capilla de Saint-Benoit. Me costó encontrar el lugar, simplemente porque no podía creer que Descartes no estuviese enterrado solo. La verdad es que en la misma capilla están enterrados los benedictinos Mabillon y Montfaucon, y lo único visible es el busto de Mabillon. <<

[122] Para un punto de vista véase Balz 1952. <<

[123] La recopilación estándar fidedigna de la obra de Descartes es la de Adam y Tannery 1897-1910. Casi todas mis citas provienen de esa fuente. Hay muchas traducciones inglesas de algunas obras, como La filosofía de Descartes, de Veitch 1901, que contiene el Discurso del Método, las Meditaciones y los Principios de filosofía. Véase también Clarke 1992 en referencia a la filosofía de la ciencia de Descartes. <<

[124] Cottingham 1986 contiene una introducción excelente a la filosofía de Descartes en general. Para un comentario acerca de la duda cartesiana y el subsiguiente Cogito… véanse, por ejemplo, Wolterstorff 1999, Ricoeur 1996, Sorell 2005, Curley 1993 y Begssade 1993. <<

[125] Descartes 1637. Una de las traducciones inglesas del libro completo es Olscamp 1965. Smith y Latham 1954 es una preciosa traducción de La Geometría, que contiene un facsímil de la primera edición. <<

[126] Los logros matemáticos de Descartes están resumidos con precisión en Rouse Bail 1908. Aczel 2005 es una bella descripción de la vida y la obra de Descartes para el público en general. El nivel de abstracción que se manifiesta en el álgebra de Descartes se analiza en Gaukroger 1992. <<

[127] Descartes estaba convencido de la existencia de «leyes de la naturaleza», como se puede deducir de la carta que escribió a Mersenne en mayo de 1632: «… ahora he adquirido la audacia necesaria para investigar la causa de la posición de todas las estrellas fijas. Pues, aunque su distribución parezca irregular en diversos lugares del universo, no me cabe la menor duda de que siguen un orden natural regular y determinado».<<

[128] Adam y Tannery 1897-1910. Véase también Miller y Miller 1983. Garber 1992 contiene un buen comentario acerca de la física de Descartes. Para una descripción más general de la filosofía de Descartes véase Keeling 1968. <<

[129] El monumento, que se erigió en 1731, fue encargado a William Kent y al escultor flamenco Michael Rysbrock. Aparte de la figura de Newton, que tiene los codos apoyados sobre algunas de sus obras, el escultor ha incorporado figuras de jóvenes con emblemas de los principales descubrimientos de Newton. Tras el sarcófago hay una pirámide, de cuyo interior se eleva un globo con dibujos de constelaciones y la ruta de paso del cometa en 1681. <<

[130] No es posible saber con seguridad si Newton escribió el artículo como insulto. Merton 1993 halló que «en los hombros de gigantes» era una frase común en la época de Newton. <<

[131] En una gesta impresionante, la totalidad de la correspondencia de Newton se halla recogida en Turnbull, Scott, Hall y Tilling 1959-1977. <<

[132] Se describe en gran detalle en algunas excelentes biografías de Newton, como Westfall 1983, Hall 1992 y Gleick 2003. <<

[133] En un ensayo publicado en 1674, Hooke escribió acerca de la gravedad que «su poder de atracción es mucho mayor cuanto más se acerquen entre sí los centros de los cuerpos». Así, aunque su intuición era correcta, fue incapaz de darle una descripción matemática. <<

[134] Existen diversas traducciones excelentes al inglés actual de los Principia de Newton, como Motte 1729 y Cohen y Whitman 1999. La más accesible, que incluye notas de gran utilidad, es la versión de Chandrasekhar editada en 1995. El concepto general de ley de la gravitación y su historia se comenta exhaustivamente en Girifalco 2008, Greene 2004, Hawking 2004 y Penrose 2004. <<

[135] Newton 1730. <<

[136] Stukeley 1752. Aparte de las biografías completas, se pueden encontrar pequeños textos en los que se narran determinados episodios de la vida de Newton o de personas relacionadas con él. Quisiera destacar en concreto De Morgan 1885 y Craig 1946. <<

[137] En su biografía de Newton de 1931, David Brewster escribe: «El célebre manzano, la caída de cuyo fruto se dice que atrajo la atención de Newton hacia el estudio de la gravedad, fue arrancado por el viento hace unos cuatro años, pero Mr. Tumor [el propietario de la casa de Newton en Woolsthorpe] lo ha conservado en forma de silla». Brewster 1831. <<

[138] En Hall 1992 se incluye una buena descripción del estudio de las matemáticas por parte de Newton. <<

[139] El informe se halla en la Colección Portsmouth. Otros documentos sugieren también que Newton concibió la ley del cuadrado inverso durante los años de la plaga. Véase por ejemplo Whiston 1753. <<

[140] Para ver un comentario general de las razones para el retraso en el anuncio de la ley de la gravitación por parte de Newton véase también Cajon 1928 y Cohen 1982. En la sección siguiente ofrezco un resumen de lo que, en mi opinión, son los dos puntos más convincentes. <<

[141] De Moivre recordaba aquí lo que Newton le había descrito. <<

[142] Esto se sugiere, por ejemplo, en Cohen 1982. <<

[143] Glaisher 1888. <<

[144] En Principia dice acerca de Dios: «Es omnipresente, no sólo virtualmente, sino también en sustancia … Es todo ojos, todo oídos, todo cerebro, todo propósito, todo fuerza de sentir, de comprender y de actuar.» En un manuscrito de principios del XVIII, adquirido en Sotheby's en 1936 y expuesto en Jerusalén en 2007, Newton utilizaba el libro bíblico de Daniel para calcular la fecha del Apocalipsis. Por si se ha quedado preocupado, llegó a la conclusión de que no veía motivo alguno para que [el mundo] se acabara antes del año 2060. <<

[145] En Dennett 2006, Dawkins 2006 y Paulos 2008 hallará excelentes comentarios recientes sobre la historia de estos argumentos y una evaluación de su solidez lógica. <<

[146] Véase Dennett 2006, Dawkins 2006, Paulos 2008. <<

----

[147] Hallará descripciones extraordinariamente accesibles sobre el cálculo y sus aplicaciones en Berlinski 1996, Kline 1967, Bell 1951. Kline 1972 es algo más técnica, pero magnífica.<<

[148] Para conocer algunos de los logros de esta notable familia véase Maor 1994, Dunham 1994. Véase también la Bernoulli-Edition en la página web de la Universidad de Basilea. <<

[149] Descrito en Hellman 2006. <<

[150] Bukowski 2008 contiene una excelente descripción del problema y, en concreto, de la solución de Huygens. Las soluciones de Ber-noulli, Leibniz y Huygens aparecen en Truesdell 1960. <<

[151] Citado en Truesdell 1960. <<

[152] Laplace 1814 (Truscot y Emory 1902). <<

[153] Hallará magníficas descripciones de la vida y obra de Graunt en Hald 1990, Cohen 2006 y Graunt 1662. <<

[154] Una reimpresión del documento se encuentra en Newman 1956. <<

[155] Citado en Newman 1956. Su obra está resumida en Todhunter 1865. <<

[156] Dos libros excelentes sobre Quetelet y su obra son Hankins 1908 y Lottin 1912. Stigler 1997, Krüger 1987 y una parte de Cohen 2006 son más breves pero también informativos. <<

[157] Quetelet 1828. <<

[158] Quetelet escribió en sus memorias acerca de la propensión al crimen: «Si el hombre promedio estuviera determinado para una nación representaría el tipo de esa nación; si pudiera determinarse a partir del conjunto de todos los hombres representaría el tipo de toda la raza humana».<<

[159] En Kaplan y Kaplan 2006 se explica de forma divulgativa la obra de Galton y Pearson. <<

[160] Entre las publicaciones de divulgación recientes acerca de la probabilidad, su historia y sus usos se encuentran Aczel 2004, Kaplan y Kaplan 2006, Connor 2006, Burger y Starbird 2005 y Tabak 2004. <<

[161] Todhunter 1865, Hald 1990. <<

[162] Kline 1967 contiene una descripción breve y sencilla de algunos de los principios fundamentales de la teoría de probabilidades. <<

[163] Rosenthal 2006 describe con gran exactitud la relevancia de la teoría de probabilidades en numerosas situaciones del mundo real. <<

[164] Para una excelente biografía véase Orel 1996. <<

[165] Se puede acceder a una traducción inglesa en la página web creada por R. B. Blumberg. <<

[166] Véase, por ejemplo, Fisher 1936. <<

[167] Tabak 2004 incluye una descripción breve de una parte de su obra. Fisher escribió un artículo no técnico y muy original acerca del diseño de experimentos, titulado «Mathematics of a Lady Tasting Tea»; véase Fisher 1956). <<

[168] Para una magnífica traducción inglesa, véase Bernoulli 1713. <<

[169] Reimpreso en Newman 1956. <<

[170] El artículo «The Vice of Gambling and the Virtue of Insurance» aparece en Newman 1956. <<

[171] El panfleto lo escribió George Berkeley en 1734. En Internet se puede encontrar una versión editada por David Wilkins. Véase Berkeley 1734. <<

----

[172] Tofflerl970. <<

[173] Hume 1748. <<

[174] Según Kant, una de las tareas fundamentales de la filosofía es explicar la posibilidad de un conocimiento sintético a priori de los conceptos matemáticos. Entre las numerosas referencias, quisiera destacar Hoffe 1994 y Kuehn 2001 para los conceptos generales. Trudeau 1987 incluye un excelente comentario sobre su aplicación a la matemática. <<

[175] Kant 1781. <<

[176] Véase Greenberg 1974 para una introducción no demasiado compleja a la geometría euclidiana y no euclidiana. <<

[177] En Trudeau 1987 se trata acerca de los teoremas demostrados sin el Quinto postulado. <<

[178] En Bonola 1955 se puede hallar una magnífica descripción de
los esfuerzos que condujeron finalmente al desarrollo de la geometría no euclidiana.
<<

[179] La traducción inglesa de George Bruce Halsted 1891 de *Estudios geométricos sobre la teoría del paralelismo* de Lobachevsky se incluye en Bono-la 1955. <<

[180] Véase Gray 2004 para una biografía y una descripción de su obra. El motivo por el que no he incluido un retrato de Janos Bolyai es que la autenticidad del retrato que se suele presentar es dudosa. Al parecer, el único retrato fiable es un relieve en la fachada del Palacio de Cultura de Marosvásárhely. <<

[181] Gray 2004 incluye un facsímil del original (en latín) y la traducción al inglés de George Bruce Halsted. <<

[182] Véase Dunnington 1955 para una excelente descripción del episodio desde la perspectiva de la vida y obra de Gauss. Véase Kline 1972 para un resumen detallado de las manifestaciones de prioridad por parte de Lobachevsky y Bolyai. En Ewald 1996 se presenta parte de la correspondencia de Gauss acerca de la geometría no euclidiana. <<

[183] Una traducción inglesa de la conferencia, así como otros documentos fundamentales sobre geometrías no euclidianas con esclarece-doras notas, se pueden hallar en Pesic 2007. <<

[184] Poincaré 1891. <<

[185] Cardano 1545. <<

[186] Wallis 1685. Véase Rouse Ball 1908 para un conciso resumen sobre la vida y obra de Wallis. <<

[187] Véase Cajori 1926 para un breve resumen de la historia. <<

[188] Este artículo apareció en la *Encyclopédie* editada por Diderot. Citado en Archibald 1914. <<

[189] Lagrange 1797. <<

[190] Petsche 2006 es una excelente biografía y descripción de la obra de Grassmann (en alemán). Véase O'Connor y Robertson 2005 para un breve y excelente resumen. <<

[191] Feamly-Sander 1979, 1982 incluye descripciones relativamente accesibles (aunque algo técnicas) de su trabajo en álgebra lineal. <<

[192] Sommerville 1929 es un buen texto introductorio. <<

[193] El texto aparece en Ewald 1996. <<

[194] El texto aparece en Ewald 1996. <<

[195] La primera carta de Stieltjes a Hermite tenía fecha de 8 de noviembre de 1882. La correspondencia entre ambos matemáticos consta de 432 cartas. Hermite 1905 contiene la correspondencia completa. Yo mismo traduje al inglés el texto que aparece aquí. <<

[196] La conferencia se encuentra en O'Connor y Robertson 2007. <<

----

[197] La paradoja del barbero se trata en numerosos textos. Véanse, por ejemplo, Quine 1966, Rescher 2001, Sorensen 2003. <<

[198] Russell 1919. Se trata de la más célebre de las exposiciones de Russell acerca de sus ideas sobre lógica. <<

[199] El plan intuicionista de Brouwer se resume con precisión en Van Stegt 1998. Véase Barrow 1992 para una excelente explicación divul-gativa. El debate entre formalismo e intuicionismo está descrito con sencillez en Hellman 2006. <<

[200] Dummett agrega: «Una persona no puede comunicar aquello que no se puede observar que comunique: si una persona asocia un contenido mental a un símbolo o fórmula matemática y la asociación no tiene que ver con el uso que efectúe del símbolo o fórmula, la persona no podrá transmitir ese contenido a través de ese símbolo o fórmula, porque su público ignoraría la asociación y carecería de medios para averiguarla». Dummett 1978. <<

[201] Véase Bennett 2004 para una introducción extremadamente accesible a la lógica. Quine 1982 es más técnico, aunque brillante. La *Encyclopaedia Britannica* contiene un espléndido resumen de la historia de la lógica escrito por Czeslaw Lejewski. <<

[202] Ewald 1996 incluye una descripción concisa pero perspicaz de su vida y obra. <<

[203] Boole 1847. <<

[204] Para una biografía completa véase MacHale 1985. <<

[205] Boole 1854. <<

[206] La conclusión de Boole fue que, en lo que respecta a la creencia en la existencia de Dios, los «débiles avances ilógicos y basados en la fe de un entendimiento de facultades y conocimientos limitados son más provechosos que los ambiciosos intentos de llegar a una certidumbre inalcanzable en el terreno de la religión natural». <<

[207] Frege 1879. Se trata de una de las obras esenciales en la historia de la lógica. <<

[208] Frege 1893, 1903. <<

[209] Para un comentario general sobre las ideas y el formalismo de Frege véanse, por ejemplo, Resnik 1980, Demopoulos y Clark 2005, Zalta 2005, 2007 y Boolos 1985. Para un excelente comentario general sobre la lógica matemática véase DeLong 1970. <<

[210] Frege 1884. <<

[211] La paradoja de Russell y sus implicaciones y posibles soluciones se tratan, por ejemplo, en Boolos 1999, Clark 2002, Sainsburg 1988 e Irvi-ne 2003. <<

[212] Whitehead y Russell 1910. Véase Russell 1919 para una descripción sencilla pero esclarecedora sobre el contenido de los *Principia*.<<

[213] Para conocer más acerca de la interacción entre las ideas de Russell y de Frege véase Beaney 2003. Para más información sobre el logicismo de Russell véase Shapiro 2000 y Godwyn e Irvine 2003. <<

[214] Urquhart 2003 contiene un excelente comentario al respecto. <<

[215] La teoría de tipos ha perdido predicamento entre la mayoría de los matemáticos. Sin embargo, una construcción similar ha hallado nuevas aplicaciones en programación de ordenadores. Véase por ejemplo Mitchell 1990. <<

[216] Una descripción de sus contribuciones se puede ver en Ewald 1996. <<

[217] Véase Van Heijemoort 1967 para traducciones inglesas de los documentos originales de Zermelo, Fraenkel y el lógico Thoralf Skolem. Devlin 1993 contiene una relativamente sencilla introducción a los conjuntos y a los axiomas de Zermelo-Fraenkel. <<

[218] En Moore 1982 se puede hallar un detallado comentario acerca del axioma. <<

[219] Cantor ideó un método para comparar la cardinalidad de conjuntos infinitos. En concreto, demostró que la cardinalidad del conjunto de los números reales es mayor que la del conjunto de los números enteros. A continuación formuló la hipótesis del continuo, que afirmaba que no hay ningún conjunto cuya cardinalidad se halle estrictamente entre la de los números enteros y la de los números reales. Cuando David Hilbert planteó sus famosos problemas de la matemática en 1900, el primero fue la cuestión de la verdad o falsedad de la hipótesis del continuo. Woodin 2001a,b contiene un comentario relativamente reciente de este problema. <<

[220] Describió su trabajo en Cohen 1966. <<

[221] Una buena descripción de los planes de Hilbert se puede hallar en Seig 1988. En Shapiro 2000 se presenta un repaso excelente y actualizado de la filosofía de la matemática y un resumen de las tensiones entre logicismo, formalismo e intuicionismo. <<

[222] Hilbert pronunció esta conferencia en Leipzig en septiembre de 1922. El texto se encuentra en Ewald 1996. <<

[223] Véase Detlefsen 2005 para un excelente comentario sobre formalismo. <<

[224] Monk 1990 presenta una magnífica biografía. <<

[225] En Waismann 1979. <<

[226] Véase Goldstein 2005 para una biografía reciente. La biografía estándar ha sido Dawson 1997. <<

[227] Hofstadter 1979, Nogel y Newman 1959 y Franzen 2005 son textos excelentes acerca de los teoremas de Gödel, su significado y su relación con otras ramas del conocimiento. <<

[228] Gódel 1947. <<

[229] Wang 1996 contiene una descripción exhaustiva de los puntos de vista filosóficos de Gódel y de cómo relacionaba estas ideas con las bases de la matemática. <<

[230] Morgenstem 1971. <<

[231] Se trata claramente de una simplificación excesiva, sólo admisible en un texto divulgativo. De hecho, aún en la actualidad prosiguen algunos intentos serios de dar vida al logicismo. Estos suelen asumir que muchas de las verdades matemáticas se pueden conocer a priori. Véanse, por ejemplo, Wright 1997, Tennant 1997. <<

----

[232] Un interesante libro sobre la elaboración de nudos es Ashley 1944. <<

[233] Vandermonde 1771. Véase Przytycki 1991 para un excelente repaso de la historia de la teoría de nudos. Adams 1994 es una amena introducción a la teoría en sí. Una versión divulgativa de la misma se puede hallar en Neuwirth 1979, en Peterson 1988 y en Menasco y Rudolph 1995. <<

[234] Sossinsky 2002 y Atiyah 1990 presentan excelentes descripciones. <<

[235] Tait 1898; Sossinsky 2002. O'Connor y Robertson 2003 incluye una breve y magnífica biografía de Tait. <<

[236] Knott l911. <<

[237] Little 1899. <<

[238] Véase Messer y Straffin 2006 para acceder a una introducción elemental, aunque algo técnica, a la topología. <<

[239] Perko 1974. <<

[240] Alexander 1928. <<

[241] Conway l970. <<

[242] Jones 1985. <<

[243] Por ejemplo, el matemático Louis Kauffman ha demostrado la relación entre el polinomio de Jones y la física estadística. Un texto excelente, pero técnico, sobre las aplicaciones en física es Kauffman 2001. <<

[244] Véase Summers 1995 para una excelente descripción sobre teoría de nudos y la acción de las enzimas. Véase también Wasserman y Coz-zarelli 1986. <<

[245] En Greene 1999, Randall 2005, Krauss 2005 y Smolin 2006 se pueden hallar magníficas explicaciones divulgativas sobre la teoría de cuerdas, sus éxitos y sus problemas. Para un texto técnico de introducción, véase Zweibach 2004. <<

[246] Ooguri yVafa 2000. <<

[247] Witten 1989. <<

[248] Atiyah 1989; véase Atiyah 1990 para una perspectiva más amplia. <<

[249] Kapner et al. 2007. <<

[250] Hay muchas y buenas explicaciones de las ideas de la relatividad especial y general. Mencionaré algunas que me han gustado especialmente: Davies 2001, Deutsch 1997, Ferris 1997, Gott 2001, Greene 2004, Hawking y Penrose 1996, Kaku 2004, Penrose 2004, Rees 1997 y Smolin 2001. Una reciente y soberbia descripción acerca de la personalidad y las ideas de Einstein es Isaacson 2007. Otras magníficas descripciones anteriores de Einstein y su mundo son Bodanis 2000, Lightman 1993, Overbye 2000 y Pais 1982. Hawking 2007 incluye una bonita colección de documentos originales. <<

[251] Kramer *et al* 2006. <<

[252] Odom *et al* 2006. <<

[253] Weinberg 1993 contiene una excelente descripción. <<

----

9. Acerca de la mente humana, la matemática y el universo

[254] Davis y Hersh 1981. <<

[255] Hardy l940. <<

[256] Kasner y Newman 1989. <<

[257] Barrow 1992 incluye una de las mejores explicaciones divulgati-vas sobre la naturaleza de la matemática. Un repaso un poco más técnico, pero accesible, de algunas de las principales ideas se halla en Kline 1992. <<

[258] Véase Barrow 1992 para otro excelente comentario de muchos de los temas de este libro. <<

[259] Tegmark 2007a,b. <<

[260] Changeux y Connes 1995. <<

[261] Dehaene 1997. <<

[262] Dehaene *et al* 2006. <<

[263] Véase por ejemplo Holden 2006. <<

[264] Changeux y Connes 1995. <<

[265] Lakoff y Núñez 2000. <<

[266] Véase por ejemplo Ramachandran y Biakeslee 1999. <<

[267] Varley *et al* 2005; Klessinger *et al* 2007. <<

[268] Atiyah 1995. <<

[269] Para una descripción en detalle de la razón áurea, su historia y sus propiedades, véase Livio 2002 y también Herz-Fischler 1998. <<

[270] Hersh 2000 contiene un artículo de Yehuda Rav con un comentario acerca de estas ideas. <<

[271] White 1947. <<

[272] Para una descripción de nivel divulgativo véase Hockett 1960. <<

[273] Véase Obler y Gjerlow 1999 para un ameno comentario acerca del lenguaje y el cerebro. <<

[274] Las similitudes entre el lenguaje y la matemática se tratan también en Sanukai 2005 y Atiyah 1994. <<

[275] Chomsky 1957. Para más información sobre lingüística, Aro-noff y Rees-Miller 2001 incluye un excelente resumen. Una interesante perspectiva de nivel divulgativo es Pinker 1994. <<

[276] Wolfram 2002. <<

[277] Para un excelente comentario sobre este asunto véase Vilenkin 2006. <<

[278] Tegmark identificó cuatro tipos distintos de universos paralelos. En el «Nivel I» hay universos con las mismas leyes de la física pero condiciones iniciales distintas. En el «Nivel II» hay universos con las mismas ecuaciones físicas pero quizá con restricciones naturales diferentes. El «Nivel III» utiliza la interpretación de los «muchos mundos» de la mecánica cuántica, y en el «Nivel IV» hay estructuras matemáticas distintas. Tegmark 2003. <<

[279] Putnam 1975. <<

[280] Hay otras opiniones que no he comentado. Por ejemplo, Stei-ner (2005) argumenta que Wigner no prueba que sus ejemplos de la «eficacia inexplicable» tengan relación alguna con el hecho de que los conceptos sean matemáticos. <<

[281] Gross 1988. Para un comentario más amplio acerca de la relación entre la matemática y la física, véase Vafa 2000. <<

[282] Atiyah 1995, y véase también Atiyah 1993. <<

[283] Hamming 1980. <<

[284] Weinberg 1993. <<

[285] En Borovik 2006. <<

[286] Raskin 1998. <<

[287] Hersh 2000 contiene excelentes artículos escritos por Hersh. <<

[288] Los propios libros escritos por Kepler, Kepler 1981 y 1997, son una interesante lectura para los interesados en la historia de la ciencia. Excelentes biografías son Caspar 1993 y Gingerich 1973. <<

[289] Para una revisión véase, por ejemplo, Lecar *et al.* 2001. <<

[290] Raymond 2005 contiene una interesante explicación sobre la utilidad de la matemática. Certeros puntos de vista sobre el enigma de Wigner se pueden también hallar en Wilczek 2006, 2007. <<

[291] Russell 1997. <<