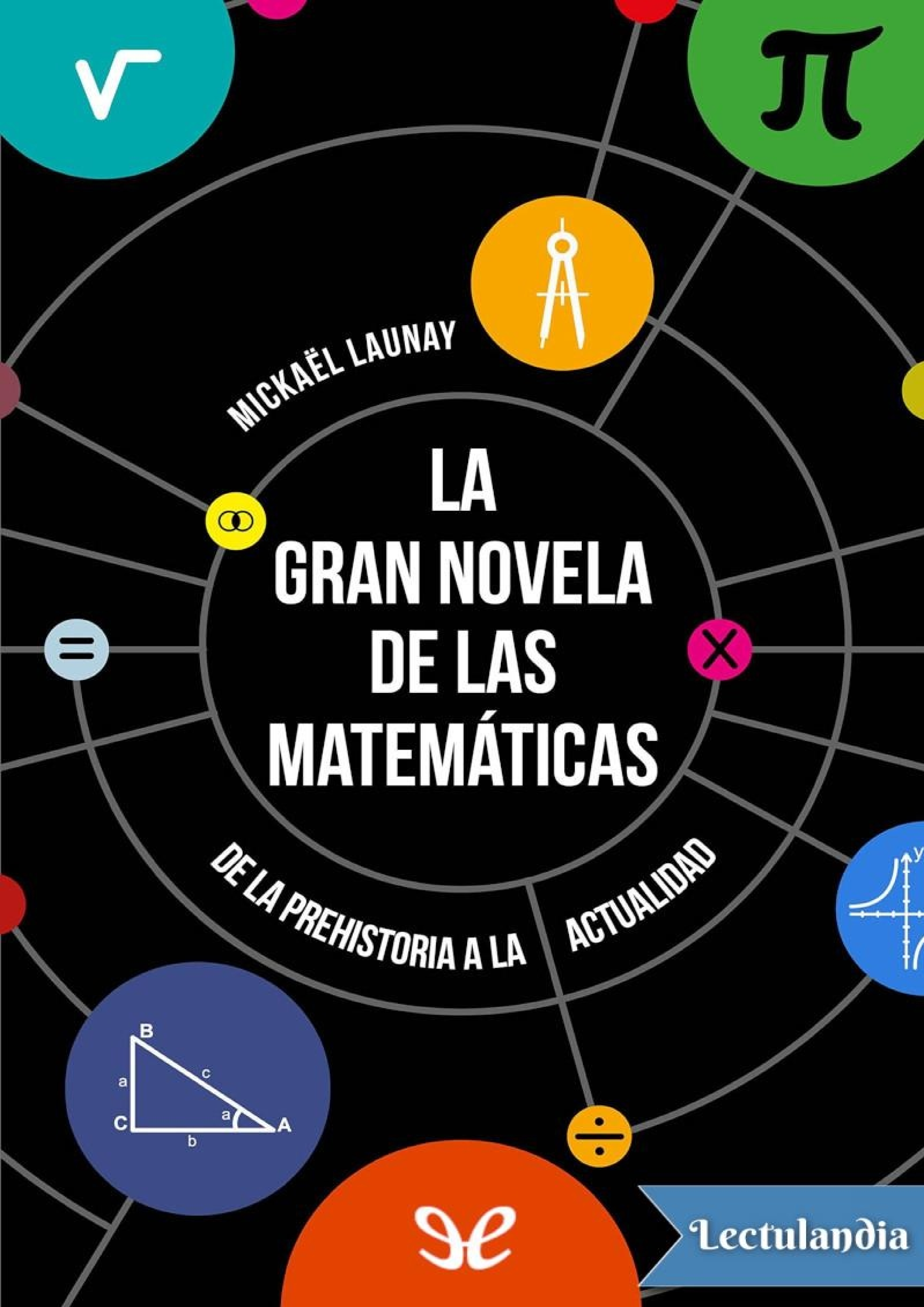

MICKAËL LAUNAY
LA GRAN NOVELA DE LAS MATEMÁTICAS
DE LA PREHISTORIA A LA ACTUALIDAD
B
a
c
C
a
A
b
Lectulandia

A la mayoría nos gustan las matemáticas, el problema es que no lo sabemos. La historia de las matemáticas fue escrita por hombres y mujeres con un intelecto sorprendente, pero no se equivoquen: los verdaderos héroes de esta gran novela son las ideas. Esas pequeñas ideas que germinan un día y se propagan de un siglo a otro, las que nos dicen que hay un mundo de impresionante riqueza justo delante de nuestros ojos.

Mickaël Launay

La gran novela de las matemáticas

De la prehistoria a la actualidad

ePub r1.0
Titivillus 12.12.2022

Título original: *Le grand roman des maths*
Mickaël Launay, 2016
Traducción: Pablo Hermida Lazcano

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

—¡Oh, yo siempre he sido una negada para las matemáticas!

Estoy un poco harto. Debe de ser por lo menos la décima vez que oigo esta frase hoy.

Sin embargo, hace un cuarto de hora largo que esta señora se ha definido en mi estand, en medio de un grupo de transeúntes, y que escucha atentamente mi presentación de diversas curiosidades geométricas. Ahí es donde ha pronunciado la frase de marras.

—¿Y a qué se dedica usted? —me ha preguntado.

—Soy matemático.

—¡Oh, yo siempre he sido una negada para las matemáticas!

—¿De veras? Sin embargo, parecía interesada en lo que acabo de contar.

—Bueno, sí, pero en realidad eso no son matemáticas…, se entiende bien.

¡Vaya, esta sí que es buena! Entonces ¿las matemáticas son, por definición, una disciplina incomprensible?

Estamos a principios de agosto, en el paseo Félix Faure de La Flotte-en-Ré. En este mercadillo estival, tengo a mi derecha un estand de tatuajes de jena y trenzas africanas, a mi izquierda un vendedor de accesorios para teléfonos móviles y enfrente un puesto de joyas y toda clase de baratijas. En medio de todo ello, he instalado mi estand de matemáticas. En el frescor de la tarde, los veraneantes deambulan apaciblemente. Me gusta especialmente hacer matemáticas en lugares insólitos. Allí donde la gente no se lo espera y no está recelosa.

—¡Cuando les cuente a mis padres que he hecho mates durante las vacaciones! —me lanza un estudiante de secundaria que pasaba por ahí de regreso de la playa.

Es cierto, los cojo un poco a traición, pero a veces no queda más remedio. Es uno de mis momentos preferidos. Observar la expresión de las personas que se creían irremediablemente peleadas con las matemáticas, en el momento en que les enseño que llevan un cuarto de hora dedicadas a ellas. ¡Y mi estand está siempre lleno! Hacemos papiroflexia, trucos de magia, juegos, enigmas…; hay para todos los gustos y todas las edades.

Por mucho que me divierta, en el fondo me resulta desolador. ¿Cómo hemos llegado a tener que ocultarle a la gente que está haciendo matemáticas para que disfrute con ellas? ¿Por qué asusta tanto la palabra? A buen seguro que, si hubiera colocado sobre mi mesa un cartel que indicase «matemáticas» con la misma visibilidad con la que podían leerse las palabras «joyas y collares», «teléfonos» o «tatuajes» en los estands que me rodean, no tendría ni una cuarta parte del éxito. La gente no se detendría. Puede que incluso se apartasen y desviasen la mirada.

No obstante, la curiosidad está ahí. La constato a diario. Las matemáticas dan miedo, pero fascinan más aún. A la gente no le gustan, pero le gustaría que le gustasen. O, al menos, ser capaces de asomarse furtivamente a sus tenebrosos misterios. Se antojan inaccesibles, pero no lo son. Es perfectamente posible amar la música sin ser músico o disfrutar compartiendo una buena comida sin ser un gran cocinero. ¿Por qué habría de ser preciso entonces ser matemáticos o poseer una inteligencia excepcional para que nos hablen de matemáticas y para que el álgebra o la geometría deleiten nuestro espíritu? No es necesario entrar en los detalles técnicos para comprender las grandes ideas y poder maravillarse con ellas.

Desde la noche de los tiempos, muchos artistas, creadores, inventores, artesanos o, simplemente, soñadores y curiosos hicieron matemáticas sin saberlo siquiera. Eran matemáticos a su pesar. Ellos fueron los primeros interrogadores, los primeros investigadores, los primeros que se devanaron los sesos. Si queremos comprender el porqué de las matemáticas, tenemos que seguir sus huellas, pues con ellos empezó todo.

Así pues, es hora de comenzar un viaje. Si te parece bien, permíteme que, a lo largo de estas páginas, te lleve conmigo por los meandros de una de las disciplinas más fascinantes y asombrosas que jamás ha practicado la especie humana. Partamos al encuentro de quienes han forjado su historia a golpe de descubrimientos inesperados y de ideas fabulosas.

Abramos juntos la gran novela de las matemáticas.

Capítulo 1

Matemáticos a su pesar

De vuelta en París, decido iniciar nuestra investigación en el museo del Louvre, en el corazón de la capital. ¿Hacer matemáticas en el Louvre? Puede parecer incongruente. La antigua residencia real reconvertida en museo parece ser hoy territorio de pintores, escultores, arqueólogos o historiadores mucho antes que de matemáticos. No obstante, es ahí donde nos disponemos a rastrear sus primeras huellas.

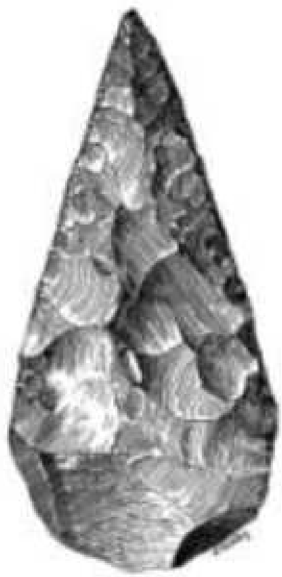
Desde mi llegada, la aparición de la gran pirámide de vidrio que preside el centro del patio de Napoleón es ya una invitación a la geometría. Pero hoy tengo una cita con un pasado mucho más remoto. Penetro en el museo y se pone en marcha la máquina del tiempo. Paso delante de los reyes de Francia, recorro el Renacimiento y la Edad Media para llegar a la Antigüedad. Las salas desfilan, me cruzo con unas estatuas romanas, con los jarrones griegos y los sarcófagos egipcios. Voy todavía un poco más lejos. Entro en la prehistoria y, al descender rápidamente por los siglos, he de olvidarlo todo poco a poco. Olvidar los números. Olvidar la geometría. Olvidar la escritura. Al principio nadie sabía nada. Ni siquiera que había algo que saber.

Primera parada en Mesopotamia. He retrocedido diez mil años.

Pensándolo bien, habría podido continuar más lejos. Remontar un millón y medio de años más para retrotraerme al corazón del Paleolítico. En aquella época, todavía no se había domesticado el fuego y el *Homo sapiens* no era sino un proyecto lejano. Estamos en el reino del *Homo erectus* en Asia, del *Homo ergaster* en África y quizás de algunos otros primos pendientes de descubrir. Es el tiempo de la piedra tallada. Está de moda el bifaz.

En un rincón del campamento, los talladores están en plena faena. Uno de ellos coge un bloque de sílex todavía virgen, tal como lo encontró unas horas antes. Se sienta sobre la tierra —probablemente con las piernas cruzadas—, apoya la piedra en el suelo, la sujeta con una mano y, con la otra, golpea el borde con una piedra maciza. Se desprende una primera esquirla. Observa el resultado, da la vuelta a su sílex y golpea una segunda vez por el otro lado. Las dos primeras esquirlas así desprendidas en ambas caras dejan una arista cortante en el borde del sílex. Ya solo falta repetir la operación por todo el contorno. En algunos lugares, el sílex es demasiado grueso o demasiado ancho, y hay que quitar trozos más grandes para dar al objeto final la forma deseada.

Porque la forma del bifaz no se deja al azar ni a la inspiración del momento. Se piensa, se trabaja y se transmite de generación en generación. Encontramos diferentes modelos según la época y el lugar de fabricación. Algunos tienen forma de gota de agua con una punta sobresaliente; otros, más redondeados, presentan el perfil de un huevo, mientras que otros se acercan más a un triángulo isósceles con los lados levemente abombados.



Bifaz del Paleolítico inferior.

No obstante, todos tienen algo en común: un eje de simetría. ¿Tendría una finalidad práctica esta geometría o sería simplemente una intención estética lo que empujó a nuestros antepasados a adoptar estas formas? Es difícil de saber. Lo cierto es que esta simetría no puede ser fruto del azar. El tallador debía premeditar su golpe. Pensar en la forma antes de realizarla. Construirse una imagen mental, abstracta, del objeto que quería ejecutar. En otros términos, hacer matemáticas.

Una vez acabado el perímetro, el tallador observa su nuevo instrumento, lo tiende a la luz con el brazo estirado para escrutar mejor el perfil y retoca algunos filos con dos o tres golpes adicionales hasta quedar satisfecho. ¿Qué siente en ese instante? ¿Experimenta ya esta exaltación formidable de la creación científica, la de haber sabido, mediante una idea abstracta, aprehender y modelar el mundo exterior? Poco importa, todavía no es el turno de la abstracción. Son tiempos de pragmatismo. El bifaz podrá utilizarse para tallar madera, cortar carne, perforar pieles o cavar la tierra.

Pero no, nosotros no iremos tan lejos. Dejemos dormir estos tiempos remotos y estas interpretaciones, acaso demasiado aventuradas, para regresar al que será el verdadero punto de partida de nuestra aventura: la región mesopotámica del octavo milenio antes de nuestra era.

A lo largo del Creciente Fértil, en una zona que cubre aproximadamente lo que un día se llamará Irak, la revolución neolítica ya está en marcha. Desde hace algún tiempo, la gente se instala aquí. En las mesetas del norte, la sedentarización es un éxito. La región es el laboratorio de las últimas innovaciones. Las viviendas de ladrillos de adobe forman las primeras aldeas y los constructores más osados añaden ya una planta. La agricultura es una tecnología avanzada. El generoso clima permite cultivar la tierra sin irrigación artificial. Poco a poco se van domesticando animales y plantas. La alfarería se dispone a entrar en escena.

¡Sí, hablemos de la alfarería! Y es que, si son muchos los testimonios desaparecidos de estas épocas, irremediablemente extraviados por los meandros del tiempo, los arqueólogos reúnen en cambio millares de tarros, jarrones, vasijas, platos, cuencos… A mi alrededor, las vitrinas están llenas de estos objetos. Los primeros datan de hace nueve mil años y, de sala en sala, como las piedrecitas de Pulgarcito, nos guían a través de los siglos. Los hay de todos los tamaños y formas, y diversamente decorados, esculpidos, pintados o grabados. Unos tienen pies y otros, asas. Los hay intactos, resquebrajados, rotos o reconstruidos. De algunos solo quedan fragmentos dispersos.

La cerámica es el primer arte del fuego, muy anterior al bronce, el hierro o el vidrio. A partir de la arcilla, esa masa de tierra maleable que se encuentra en abundancia en esas zonas húmedas, los artesanos alfareros pueden moldear los objetos a su manera. Cuando logran la forma deseada, solo es preciso dejarlos secar unos días y luego cocerlos en medio de un gran fuego para solidificarlos. Esta técnica se conoce desde tiempo atrás. Hace veinte mil años se hacían ya pequeñas estatuillas. No obstante, hasta épocas recientes, con la sedentarización, no surgirá la idea de hacer objetos de uso cotidiano. El nuevo modo de vida necesita medios de almacenamiento, por lo que se fabrican recipientes a mansalva.

Estos recipientes de terracota se imponen rápidamente como objetos indispensables de la vida cotidiana, necesarios en la organización colectiva de la aldea. Por tanto, además de fabricar una vajilla resistente, se busca belleza. Pronto se decorará la cerámica. Y existen varias escuelas decorativas. Unos graban sus motivos en la arcilla todavía fresca con ayuda de una concha o de una simple ramita, antes de la cocción. Otros cuecen primero las piezas antes de grabar sus decoraciones con ayuda de piedras talladas. Y otros prefieren pintar sobre la superficie con pigmentos naturales.

Al recorrer las salas de la sección de antigüedades orientales, me quedo impresionado por la riqueza de los motivos geométricos imaginados por los mesopotámicos. Como en el bifaz de nuestro antiguo tallador de piedras, algunas simetrías son demasiado ingeniosas para no haber sido cuidadosamente premeditadas. Las cenefas que recorren los rebordes de estos jarrones atraen especialmente mi atención.

Las cenefas son esas franjas decoradas que presentan un mismo motivo, el cual se repite en toda la circunferencia de la vasija. Entre las más frecuentes, destacan las de dientes de sierra triangulares. Encontramos también cenefas de dos cordones que se van entrelazando. Luego vienen las cenefas de espigas, las cenefas de cuadrados, cenefas de rombos punteados, de triángulos sombreados, de círculos encajados…

Al pasar de una zona o de una época a otra, aparecen modas. Ciertos motivos son muy populares. Se retoman, se transforman, se perfeccionan en múltiples variantes. Luego, unos siglos más tarde, se abandonan, se convierten en viejas glorias y son sustituidos por otros dibujos en boga.

Los veo desfilar y mi ojo de matemático se ilumina. Veo simetrías, rotaciones, traslaciones. Entonces empiezo a ordenar y a clasificar en mi mente. Me vienen a la memoria algunos teoremas de mis años de estudiante. La clasificación de las transformaciones geométricas: eso es lo que necesito. Saco una libreta y un lápiz y comienzo a garabatear.

Para empezar están las rotaciones. Tengo justo delante de mí una cenefa compuesta de motivos en forma de «S» encajados unos tras otros. Giro la cabeza para convencerme. Sí, está claro, esta permanece invariante al darle media vuelta: si cogiera la tinaja e invirtiera su posición, la cenefa mantendría exactamente el mismo aspecto.

Luego están las simetrías. Existen varios tipos. Poco a poco, completo mi lista y empieza la búsqueda del tesoro. Para cada transformación geométrica, busco la cenefa correspondiente. Paso de una sala a otra y vuelvo atrás. Algunas piezas están dañadas; tengo que entornar los ojos para intentar reconstruir los motivos que recorrían este barro hace milenios. Cuando encuentro una nueva, la anoto. Miro las fechas para intentar reconstruir la cronología de su aparición.

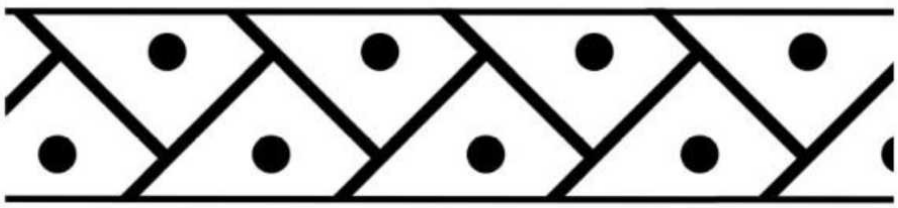
¿Cuántas he de encontrar en total? Con un poco de reflexión, logro recordar al fin aquel famoso teorema. Existen en total siete categorías de cenefas. Siete grupos de transformaciones geométricas diferentes que pueden dejarlas invariantes. Ni una más, ni una menos.

Por supuesto, los mesopotámicos no lo sabían. Y no es de extrañar: la teoría en cuestión solo se empezará a formalizar a partir del Renacimiento. No obstante, sin sospecharlo, y sin otra pretensión que la de decorar sus vasijas con trazos armoniosos y originales, estos alfareros prehistóricos estaban haciendo los primeros razonamientos de una disciplina fantástica, que agitará a toda una comunidad de matemáticos miles de años más tarde.

Consulto mis notas: tengo casi todas. ¿Casi? Una de estas cenefas se me escapa todavía. Era de esperar, pues es claramente la más complicada de la lista. Busco una cenefa que, si se invierte horizontalmente, tendrá el mismo aspecto, pero desplazada la longitud de medio motivo. Hoy la conocemos como simetría deslizante. ¡Un auténtico desafío para nuestros mesopotámicos!

Sin embargo, todavía estoy lejos de haber recorrido todas las salas, por lo que no pierdo la esperanza. Prosigo la búsqueda. Observo el mínimo detalle, el mínimo indicio. Las otras seis categorías, las que ya he observado, se acumulan. En mi cuaderno se enmarañan las fechas, los esquemas y otros garabatos. Pero todavía no hay ni rastro de la misteriosa séptima cenefa.

De repente me atraviesa una descarga de adrenalina. Detrás de esta vitrina, acabo de descubrir una pieza de aspecto algo maltrecho, un simple fragmento. Sin embargo, de arriba abajo, se superponen cuatro cenefas parciales pero bien visibles, y una de ellas acaba de despertar súbitamente mi atención. La tercera empezando por arriba. Está compuesta de lo que parecen fragmentos de rectángulos inclinados que se encajan formando espigas. Entorno los ojos. La observo atentamente y garabateo rápidamente el motivo en mi libreta, como si temiera que se desvanezca ante mis ojos. Es la simetría que buscaba. Se trata de la simetría deslizante. He descubierto la séptima cenefa.



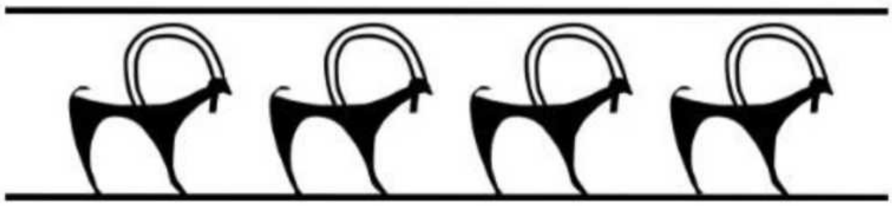
Al lado de la pieza, el letrero indica: «Fragmento de vaso con decoración horizontal de franjas y rombos punteados, mediados del quinto milenio a. C.».

La sitúo mentalmente en mi cronología. Mediados del quinto milenio a. C. Estamos todavía en la prehistoria. Más de mil años antes de la invención de la escritura, los alfareros mesopotámicos ya habían enumerado todos los casos de un teorema que no se enunciaría y demostraría hasta seis mil años después.

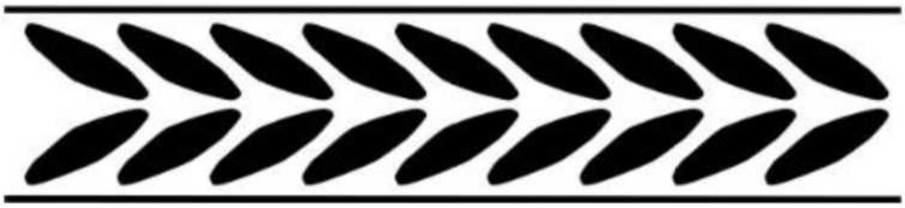
Algunas salas más allá encuentro una jarra con tres asas que también resulta pertenecer a la séptima categoría: aunque el motivo se ha transformado en espiral, la estructura geométrica se mantiene. Un poco más lejos aparece otra. Quiero continuar, pero de repente cambia el escenario: he llegado al final de las colecciones orientales. Si prosigo, entro en Grecia. Echo un último vistazo a mis notas; las cenefas con simetría deslizante se cuentan con los dedos de la mano. Por los pelos.

¿CÓMO RECONOCER LAS SIETE CATEGORÍAS DE CENEFAS?

La primera categoría es la de las cenefas… que no poseen ninguna propiedad geométrica particular. Simplemente un motivo que se repite sin simetrías ni centros de rotación. Es sobre todo el caso de las cenefas que no se basan en figuras geométricas, sino en dibujos figurativos como, por ejemplo, unos animales.



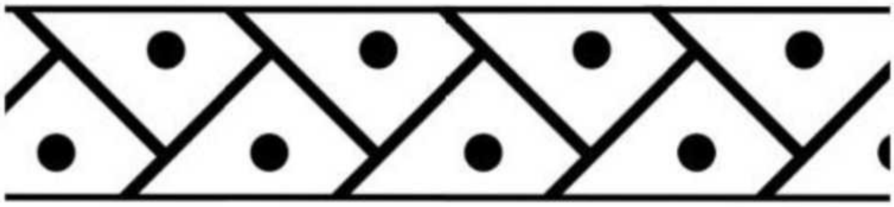
La segunda categoría comprende aquellas en las que la línea horizontal que divide la cenefa en dos es un eje de simetría.



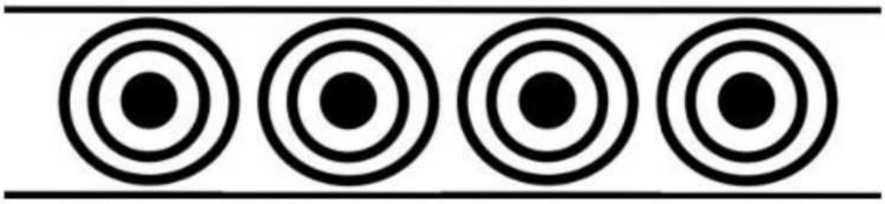
La tercera categoría agrupa las cenefas que poseen un eje de simetría vertical. Dado que la cenefa consiste en un motivo que se repite horizontalmente, los ejes de simetría verticales también se repiten.

La cuarta categoría es la de las cenefas invariantes en una rotación de media vuelta. Tanto si miramos estas cenefas cabeza arriba como si las observamos cabeza abajo, veremos siempre lo mismo.

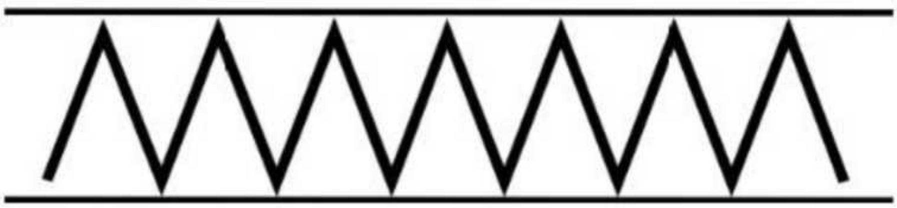
La quinta categoría es la de las simetrías deslizantes. Es la célebre categoría que descubrí en último lugar en la sección de Mesopotamia. Si invertimos una de estas cenefas por una simetría de eje horizontal (como en la segunda categoría), la cenefa obtenida es similar, pero se encuentra desplazada medio motivo en sentido longitudinal.



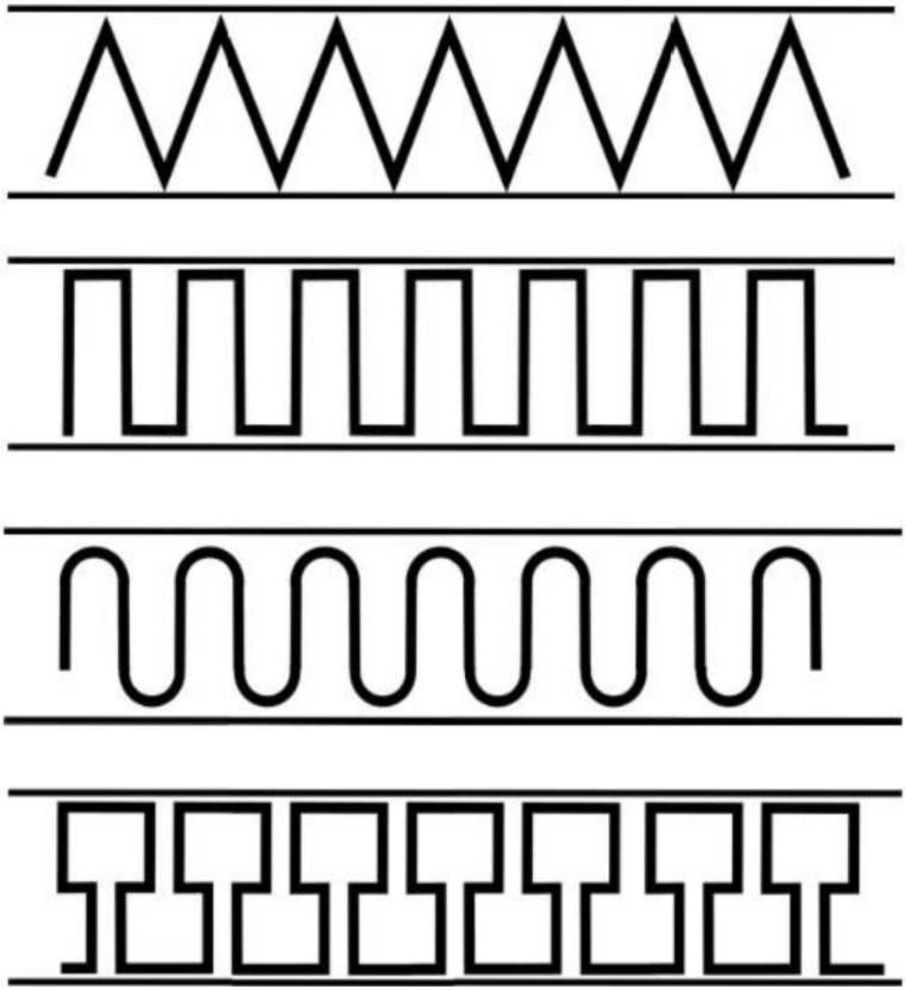
La sexta y la séptima categorías no corresponden a nuevas transformaciones geométricas, sino que combinan varias de las propiedades halladas en las categorías precedentes. Así, las cenefas de la sexta categoría son las que tienen a la vez una simetría horizontal, una simetría vertical y un centro de rotación de media vuelta.



La séptima categoría, por su parte, comprende las cenefas que muestran una simetría vertical, un centro de rotación y una simetría deslizante.



Cabe señalar que estas categorías solo conciernen a la estructura geométrica de las cenefas y no impiden ciertas variaciones en la forma de los motivos. Así, las cenefas siguientes, pese a ser diferentes, pertenecen todas ellas a la séptima categoría.



Todas las cenefas que cabe imaginar pertenecen, pues, a una de estas siete categorías. Cualquier otra combinación es geométricamente imposible. Curiosamente, las dos últimas categorías son las más frecuentes. Espontáneamente, es más fácil dibujar figuras que tienen muchas simetrías que figuras que tienen pocas.

Orgulloso de mis éxitos mesopotámicos, al día siguiente estoy dispuesto a lanzarme al asalto de la Grecia antigua. Acabo de llegar y ya ando al retortero. Aquí, la búsqueda de las cenefas es un juego de niños. Me bastan unos pasos, unas vitrinas y unas ánforas negras con figuras rojas para localizar las siete cenefas de mi lista.

Ante semejante abundancia, renuncio rápidamente a hacer estadísticas como en Mesopotamia. La creatividad de estos artistas me deja estupefacto. Hacen su aparición nuevos motivos, cada vez más complejos e ingeniosos. En varias ocasiones tengo que detenerme y concentrarme para deshacer mentalmente esta maraña que me envuelve.

Al entrar en una sala, un lutróforo con figuras rojas me deja sin palabras.

Un lutróforo es un jarrón con dos asas cuya función es transportar el agua del baño; este mide cerca de un metro de alto. En él se acumulan las cenefas y comienzo a clasificarlas por categorías. Una. Dos. Tres. Cuatro. Cinco. En unos segundos, identifico cinco de las siete estructuras geométricas. El jarrón está pegado a la pared, pero, inclinándome un poco, puedo constatar que en su cara oculta se encuentra la sexta categoría. Solo me falta una. Demasiado bonito para ser cierto. Sorprendentemente, la ausente no es la misma que la del día anterior. Los tiempos han cambiado y también las modas, y la que me falta ya no es solo la simetría deslizante, sino la combinación compuesta de simetría vertical, rotación y simetría deslizante.

La busco frenéticamente, escaneo con la mirada hasta el último rincón del objeto. No la encuentro. Un poco decepcionado, estoy a punto de renunciar cuando mis ojos se posan en un detalle. En el centro del jarrón se representa una escena entre dos personajes. A primera vista, la escena no parece contener ninguna cenefa. No obstante, un objeto atrae mi atención en la parte inferior derecha: un jarrón sobre el que se apoya el personaje central. ¡Un jarrón dibujado en el jarrón! La construcción en abismo o de cajas chinas es ya suficiente para hacerme sonreír. Entorno los ojos; la imagen está un poco dañada, pero no cabe duda de que este jarrón dibujado contiene una cenefa y, ¡milagro!, ¡se trata de la que me falta!

Pese a mis reiterados esfuerzos, no encontraré ninguna otra pieza que presente esta misma particularidad. Este lutróforo parece ser único en su género en las colecciones del Louvre: el único que contiene las siete categorías de cenefas.

Un poco más lejos, me espera otra sorpresa. ¡Cenefas en 3D! ¡Y yo que creía que la perspectiva era una invención del Renacimiento! Zonas oscuras y claras hábilmente dispuestas por el artista forman un juego de luces y sombras que produce un efecto de volumen en las formas geométricas dispuestas en el perímetro de este gigantesco recipiente.

A medida que avanzo, me surgen nuevas preguntas. Algunas piezas no están recubiertas de cenefas sino de teselados. Dicho de otro modo, los motivos geométricos no se contentan con llenar una fina banda que da la vuelta al objeto, sino que invaden toda su superficie, multiplicando así las posibles combinaciones geométricas.

Después de los griegos vienen los egipcios, los etruscos y los romanos. Descubro ilusiones de encajes tallados en la propia roca. Los hilos de piedra se entrelazan, pasan alternativamente por encima y por debajo en una malla perfectamente regular. Luego, como si las obras no bastaran, pronto me sorprendo observando el propio Louvre. Sus techos, sus embaldosados, los marcos de sus puertas. De regreso a casa, tengo la impresión de no poder parar. En la calle, miro los balcones de los edificios, los motivos en la ropa de los transeúntes, las paredes de colores del metro…

Basta con cambiar nuestra forma de mirar el mundo para ver aparecer las matemáticas. Su búsqueda es fascinante e infinita.

Y la aventura solo acaba de comenzar.

Capítulo 2

Y al principio fue el número

Por aquel entonces, en Mesopotamia las cosas avanzaban a buen ritmo. Al final del cuarto milenio antes de nuestra era, las pequeñas aldeas que vimos anteriormente se han metamorfoseado en ciudades florecientes. Algunas reúnen a partir de entonces varias decenas de miles de habitantes. En ellas progresan las tecnologías como jamás se había visto antes. Ya se trate de arquitectos, orfebres, alfareros, tejedores, carpinteros o escultores, los artesanos han de demostrar un ingenio siempre renovado para dar respuesta a los desafíos técnicos que se les plantean. Todavía no se ha desarrollado del todo la metalurgia, pero se trabaja en ello.

Poco a poco, se teje por toda la región una red de caminos. Se multiplican los intercambios culturales y comerciales. Se establecen jerarquías cada vez más complejas y el *Homo sapiens* descubre las bondades de la administración. Todo esto exige una extraordinaria organización. Para poner un poco de orden, es hora de que nuestra especie invente la escritura y entre en la historia. En esta revolución que se avecina, las matemáticas van a desempeñar un papel de vanguardia.

Siguiendo el curso del Éufrates, dejemos las mesetas del norte que vieron nacer las primeras aldeas sedentarias y tomemos la dirección de la región de Sumeria que cubre las llanuras de la Baja Mesopotamia. Es aquí, en las estepas del sur, donde se concentrarán a partir de ahora los principales asentamientos humanos. A lo largo del río, atravesamos las ciudades de Kish, Nippur y Shuruppak. Son ciudades todavía jóvenes, pero los siglos venideros prometen grandeza y prosperidad.

Y entonces, de repente, destaca Uruk en el horizonte.

La ciudad de Uruk es un hormiguero humano, que ilumina todo el Oriente Próximo con su prestigio y su poderío. Construida principalmente con ladrillos de tierra cocida, la ciudad despliega sus tonalidades anaranjadas por más de cien hectáreas y el paseante puede deambular durante horas por sus abarrotadas callejuelas. En el corazón de la ciudad, se han edificado varios templos monumentales. Allí se venera a An, padre de todos los dioses, pero sobre todo a Inanna, la Señora del Cielo. En su honor se erigió el templo de Eanna, cuyo mayor edificio mide ochenta metros de largo por treinta de ancho, e impresiona a los numerosos viajeros.

Se acerca el verano y, como todos los años por esta época, se ha apoderado de la ciudad una agitación particular. Pronto, los rebaños de ovejas partirán hacia los pastizales del norte para no regresar hasta el final de la estación cálida. Durante varios meses, los pastores se encargarán de conducir el ganado y asegurar su subsistencia y su seguridad para devolvérselo íntegro a sus propietarios. El propio templo de Eanna posee varios rebaños, los más grandes de los cuales constan de decenas de miles de cabezas. Las caravanas son tan impresionantes que algunas van acompañadas de soldados que las protegen de los peligros de la expedición.

No obstante, a los propietarios no se les ocurre dejar marchar sus ovejas sin haber tomado antes algunas precauciones. Con los pastores, el contrato está claro: deben regresar tantas cabezas como las que han marchado. Se trata de que no se extravíe una parte del rebaño y de que no se comercie con algunas de ellas bajo cuerda.

Se plantea entonces un problema: ¿cómo comparar el tamaño del rebaño que ha marchado con el del que ha regresado?

Para responder esta pregunta, desde hace ya algunos siglos se ha desarrollado un sistema de fichas de arcilla. Existen varios tipos de fichas, cada uno de los cuales representa uno o varios objetos o animales según su forma y los motivos dibujados en ellas. Para una oveja, se trata de un simple disco marcado con una cruz. En el momento de la partida, se coloca en un recipiente una cantidad de fichas equivalente al tamaño del rebaño. Bastará con comparar a la vuelta el rebaño con el contenido del recipiente para verificar que no falta ningún animal. Mucho más adelante, estas fichas recibirán el nombre latino de *calculi*, «piedrecitas», que darán origen a la palabra *cálculo*.

Este método es práctico, pero posee un inconveniente. ¿Quién guarda las fichas? Y es que la desconfianza es mutua, y los pastores pueden temer a su vez que los propietarios poco escrupulosos añadan algunas fichas a la urna durante su ausencia y aprovechen para reclamar indemnizaciones por ovejas que jamás han existido.

Entonces buscan, se devanan los sesos y acaban hallando una solución. Se guardarán las fichas en una bola de barro hueca y herméticamente cerrada. En el momento de cerrarla, cada uno pone su firma en la superficie de la bola de barro a fin de certificar su autenticidad. A partir de entonces resulta imposible modificar el número de fichas sin romper la bola. Los pastores pueden marchar tranquilos.

Pero de nuevo son los propietarios quienes encuentran inconvenientes en este método. Para sus negocios, necesitan conocer en todo momento el número de animales que integran sus rebaños. ¿Cómo hacer entonces? ¿Recordar de memoria el número de ovejas? No es nada fácil, cuando sabemos que la lengua sumeria no posee todavía palabras para designar números tan grandes. ¿Poseer un duplicado no sellado de las fichas de recuento contenidas en todas las bolas de barro? No resulta muy práctico.

Finalmente se halla una solución. Con ayuda de una caña, se traza en la superficie de cada bola el dibujo de las fichas que se encuentran en el interior. Así se hace posible consultar a placer el contenido del recipiente sin necesidad de romperlo.

Este método parece convenir de aquí en adelante a todo el mundo. Se emplea ampliamente, no solo para contar ovejas, sino también para cerrar toda suerte de acuerdos. Los cereales como la cebada o el trigo, la lana y los tejidos, el metal, las joyas, las piedras preciosas, el aceite o incluso la cerámica tienen también sus fichas. Hasta los impuestos se controlan con fichas. En resumidas cuentas, a finales del cuarto milenio, en Uruk, todo contrato en regla debía cerrarse con una bola provista de sus fichas de barro.

Todo esto funciona de maravilla y entonces, un buen día, surge una idea brillante. Ese género de idea genial a la par que simple, que nos preguntamos cómo no se nos ha ocurrido antes. Dado que el número de animales está inscrito en la superficie de la bola, ¿para qué continuar introduciendo fichas en su interior? ¿Y para qué seguir haciendo bolas? Bastaría simplemente con dibujar la imagen de nuestras fichas en un trozo de barro cualquiera. Por ejemplo, en una tablilla plana.

Y esto se llamará escritura.

Estoy de nuevo en el Louvre. Las colecciones de la sección de antigüedades orientales atestiguan esta historia. Lo primero que me llama la atención de estas bolas es su tamaño. Estas pequeñas esferas de arcilla, que los sumerios modelaban simplemente girándolas con sus pulgares, apenas son más grandes que las pelotas de pimpón. En cuanto a las fichas, no superan el centímetro.

Un poco más lejos aparecen las primeras tablillas, que se multiplican y llenan rápidamente vitrinas enteras. Poco a poco, la escritura se precisa y adopta su aspecto cuneiforme, compuesta por pequeñas muescas en forma de clavo. Tras la desaparición de las primeras civilizaciones de Mesopotamia al inicio de nuestra era, la mayor parte de estas piezas dormirán durante siglos bajo las ruinas de las ciudades desiertas antes de ser exhumadas por los arqueólogos europeos a partir del siglo XVII. Solo se descifrarán progresivamente en el transcurso del siglo XIX.

Estas tablillas tampoco son muy grandes. Algunas tienen el tamaño de simples tarjetas de visita, pero están cubiertas de centenares de signos minúsculos que se amontonan unos tras otros. ¡Los escribas mesopotámicos no quieren desperdiciar ni la menor porción de arcilla para escribir! Los letreros del museo colocados al lado de las piezas me permiten interpretar estos misteriosos símbolos. Se trata de ganado, joyas o cereales.

A mi lado, algunos turistas hacen fotos… con sus tabletas. Curioso guiño de la historia, cuyo tiovivo arrastró la escritura sobre tantos soportes diferentes, desde el barro hasta el papel pasando por el mármol, la cera, el papiro o el pergamino y que, en un último giro ocurrente, volvió a dar a las tabletas electrónicas la forma de sus antepasadas de tierra. En el encuentro cara a cara de los dos objetos hay algo singularmente conmovedor. Quién sabe si, dentro de cinco mil años, estas dos tabletas no volverán a encontrarse, esta vez del mismo lado de la vitrina.

El tiempo ha pasado y nos hallamos ahora a comienzos del tercer milenio antes de nuestra era. Se ha superado una etapa adicional: ¡el número se ha liberado del objeto que cuenta! Antes, con las bolas de barro y las primeras tablillas, los símbolos de recuento dependían de los objetos considerados. Una oveja no es una vaca, por lo que el símbolo para contar una oveja no era el mismo que el que contaba una vaca. Y cada objeto que podía contarse poseía sus propios símbolos, al igual que había tenido sus propias fichas.

Pero ahora todo esto ha terminado. Los números han adquirido sus símbolos propios. Esto significa que, para contar ocho ovejas, ya no se utilizan ocho símbolos que designan una oveja, sino que se escribe el número ocho, seguido del símbolo de la oveja. Y, para contar ocho vacas, basta con reemplazar el símbolo de la oveja por el de la vaca. El número sigue siendo el mismo.

Esta etapa de la historia del pensamiento es absolutamente fundamental. Si hubiera que fechar el acta de nacimiento de las matemáticas, yo elegiría sin duda este instante. Este instante en que el número comienza a existir por y para sí mismo, este instante en que se libera de lo real para observarlo desde más arriba. Todo lo precedente era solo la gestación. Bifaces, cenefas, fichas, como preludios de este nacimiento programado del número.

A partir de entonces, el número ha pasado al lado de la abstracción, y esto es lo que conforma la identidad de las matemáticas: son la ciencia de la abstracción por excelencia. Los objetos que estudian las matemáticas carecen de existencia física. No son materiales, no están hechos de átomos. No son sino ideas. Ahora bien, ¡qué formidable la eficacia de estas ideas para comprender el mundo!

Sin duda no es casual que la necesidad de escribir los números fuese, en ese momento, determinante en la aparición de la escritura. Y es que, si otras ideas podían transmitirse oralmente sin problema, parece difícil en cambio establecer un sistema numérico sin pasar por una notación escrita.

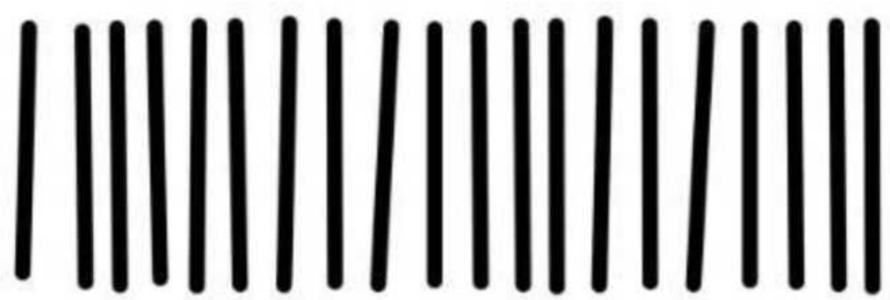
Todavía hoy, ¿la idea que nos hacemos de los números es acaso disociable de su escritura? Si te pido que pienses en una oveja, ¿cómo la ves? Sin duda te representas un animal que bala, con cuatro patas y el lomo cubierto de lana. No se te ocurrirá visualizar las cinco letras de la palabra *oveja*. Sin embargo, si te hablo ahora del número ciento veintiocho, ¿qué ves? ¿Percibes el 1, el 2 y el 8 que cobran forma en tu cerebro y se encadenan como escritos con la tinta impalpable de tus pensamientos? La representación mental que nos formamos de los grandes números parece indispensablemente encadenada a su forma escrita.

El ejemplo carece de precedentes. Mientras que, para todas las demás cosas, la escritura no es más que un medio para transcribir lo que existía antes en el lenguaje oral, en el caso de los números es la escritura la que va a dictar la lengua. Piensa que, cuando pronuncias «ciento veintiocho», no haces más que leer 128: 100 + 20 + 8. Más allá de un cierto umbral, se vuelve imposible hablar de los números sin el apoyo de la escritura. Antes de ser escritos, no había palabras para los grandes números.

En nuestra época, ciertos pueblos no poseen todavía más que un número muy limitado de palabras para designar los números. Así, los miembros de la tribu de los piraha, cazadores-recolectores que viven en las riberas del río Maici en la Amazonía, solo cuentan hasta dos. A partir de ahí, se emplea una misma palabra que significa «varios» o «muchos». Y en la misma Amazonía, los munduruku solo tienen palabras para designar hasta el cinco, es decir, los dedos de una mano.

En las sociedades modernas, los números han invadido nuestra vida cotidiana. Han llegado a ser tan omnipresentes e indispensables que con frecuencia olvidamos hasta qué punto la idea es genial y que nuestros antepasados tardaron siglos en inventarlos.

A lo largo de los tiempos se inventaron numerosos procedimientos para escribir los números. El más simple de ellos consistía en trazar tantos signos como el número deseado. Por ejemplo, una serie de rayitas, unas al lado de otras. Es el método que seguimos utilizando con frecuencia, por ejemplo, para contar los puntos de un juego.



El rastro más antiguo que se conoce de la probable utilización de este procedimiento data de mucho antes de la invención de la escritura por los sumerios. Los huesos de Ishango se descubrieron en los años cincuenta del pasado siglo a orillas del lago Eduardo, en la actual República Democrática del Congo, ¡y datan de hace veinte mil años aproximadamente! Con 10 y 14 centímetros de longitud, poseen la particularidad de que les hicieron numerosas muescas, a intervalos más o menos regulares. ¿Cuál era el papel de estas muescas? Probablemente se trataba de un primer sistema de recuento. Algunos ven en ellos un calendario, en tanto que otros extrapolan conocimientos matemáticos ya muy avanzados. Es difícil de saber con exactitud. Los dos huesos se exponen en la actualidad en el Museo de Ciencias Naturales de Bélgica, en Bruselas.

Este método de recuento, que utiliza una marca para cada unidad añadida, alcanza rápidamente sus límites en cuanto se hace necesario manipular números relativamente grandes. Para ir más deprisa, se empieza a hacer paquetes.

Las fichas de los mesopotámicos ya podían representar varias unidades. Por ejemplo, existía una ficha particular para representar diez ovejas. En el momento del paso a la escritura, se conserva este principio. Encontramos así símbolos para designar paquetes de 10, de 60, de 600, de 3600 y de 36 000.

Se aprecia ya la búsqueda de una lógica en la construcción de los símbolos. Así, el 60 o el 3600 se multiplican por 10 cuando se les añade un círculo en el interior. Con la lle gada de la escritura cuneiforme, estos primeros símbolos se transforman poco a poco.

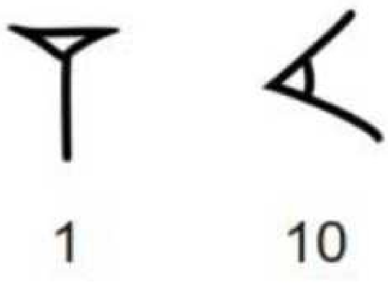
Dada su proximidad a Mesopotamia, Egipto no tarda en adoptar la escritura y desarrolla a partir del comienzo del tercer milenio sus propios símbolos de numeración.

En lo sucesivo, el sistema es puramente decimal: cada símbolo posee un valor diez veces más elevado que el precedente.

Estos sistemas aditivos, en los que basta añadir los valores de los símbolos escritos, conocerán un gran éxito en el mundo, y una multitud de variantes harán su aparición durante toda la Antigüedad y buena parte de la Edad Media. Los utilizarán especialmente los griegos y los romanos, que se contentarán con emplear las letras de sus alfabetos respectivos como símbolos numéricos.

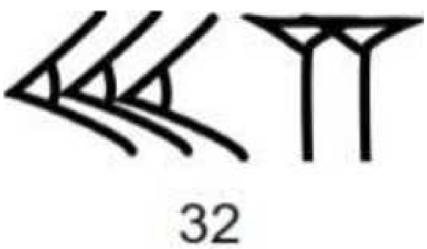
Frente a los sistemas aditivos, va a surgir poco a poco un nuevo modo de notación numérica: la numeración posicional. En estos sistemas, el valor de un símbolo empieza a depender de la posición que ocupa dentro del número. Y, una vez más, los mesopotámicos van a ser los primeros en ponerlos en práctica.

A partir del segundo milenio antes de nuestra era, será la ciudad de Babilonia la que resplandezca en Oriente Próximo. La escritura cuneiforme sigue estando de moda, pero ahora solo utiliza dos símbolos: el clavo simple que vale 1 y la espiga que vale 10.



Estos dos signos permiten anotar por adición todos los números hasta el 59.

Así, el número 32 se escribe con tres espigas seguidas de dos clavos.



Y luego, a partir del 60, se empieza a hacer grupos, y estos son los mismos símbolos que van a servir para anotar los grupos de 60. Así, de la misma forma que, en nuestra notación actual, las cifras leídas de derecha a izquierda designan las unidades, luego las decenas y luego las centenas, en esta numeración se leen primero las unidades, luego las sesentenas, luego las tres mil sesentenas (es decir, sesenta sesentenas) y así, sucesivamente, cada posición vale sesenta veces más que la precedente.

Por ejemplo, el número 145 está compuesto por dos sesentenas que suman 120, a las cuales hay que añadir 25 unidades. Por tanto, los babilonios lo habrían anotado de la siguiente manera:

Gracias a este sistema, los sabios babilonios van a desarrollar conocimientos extraordinarios. Por supuesto, saben practicar las cuatro operaciones básicas (adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones), pero también raíces cuadradas, potencias e inversos. Elaboran tablas aritméticas extremadamente completas y se plantean ecuaciones para las cuales desarrollan muy buenos métodos de resolución.

No obstante, todos estos conocimientos no tardarán en ser olvidados. La civilización babilónica entra en declive y una gran parte de sus avanzadas matemáticas caerán en el olvido. Adiós a la numeración posicional. Adiós a las ecuaciones. Habrá que esperar siglos para que estas cuestiones vuelvan a ponerse de moda, y habrá que aguardar hasta el siglo XIX para que el descifrado de las tablillas cuneiformes nos recuerde que los mesopotámicos ya les habían dado respuesta antes que nadie.

Después de los babilonios, los mayas imaginarán igualmente un sistema posicional, pero de base 20. Luego les corresponderá a los indios inventar un sistema en base 10. Este último sistema será reutilizado por los sabios árabes antes de penetrar en Europa al final de la Edad Media. Allí, estos símbolos adoptarán el nombre de guarismos arábigos y no tardarán en conquistar el mundo entero.

Con los números, la humanidad comprende poco a poco que acaba de inventar una herramienta que supera todas sus esperanzas de describir, analizar y comprender el mundo que la rodea.

El entusiasmo es tal que a veces conduce a la exageración. El nacimiento de los números es también el nacimiento de diversas prácticas de numerología. Se atribuyen propiedades mágicas a los números, se interpretan más de la cuenta, y hasta se pretende leer en ellos los mensajes de los dioses y el destino del mundo.

En el siglo VI a. C., Pitágoras los convertirá en el concepto fundamental de su filosofía. «Todo es número», declara el sabio griego. Según él, los números son los que producen figuras geométricas que, a su vez, engendran los cuatro elementos de la materia, el fuego, el agua, la tierra y el aire que componen todos los seres. Pitágoras crea así todo un sistema en torno a los números. Los impares se asocian a lo masculino, en tanto que los pares son femeninos. El número 10, representado como un triángulo, se denomina *tetraktys* y se convierte en el símbolo de la armonía y de la perfección del cosmos. Los pitagóricos estarán asimismo en el origen de la aritmancia, que pretende leer los caracteres humanos asociando valores numéricos a las letras que componen sus nombres.

Paralelamente, surgen discusiones acerca de lo que es el número. Ciertos autores sostienen que la unidad no es un número, porque el número designa varios y, por tanto, solo puede considerarse a partir de 2. Incluso se llegará a afirmar que, para poder engendrar todos los demás números, el 1 debe ser a la vez par e impar.

Más tarde, serán el cero, los números negativos o incluso los números imaginarios los que harán resurgir discusiones cada vez más animadas. En cada ocasión, la penetración de estas nuevas ideas en el círculo de los números suscitará debates y obligará a los matemáticos a ampliar sus concepciones.

En resumidas cuentas, el número no ha cesado de plantear interrogantes, y los humanos necesitarán todavía algún tiempo para aprender a dominar estas extrañas criaturas directamente salidas de sus cerebros.

Capítulo 3

Que no entre aquí nadie que no sea geómetra

Una vez inventado el número, la matemática no va a tardar en hacerse plural. En su seno van a germinar poco a poco varias ramas como la aritmética, la lógica o el álgebra, que se desarrollarán hasta alcanzar su madurez y afirmarse como disciplinas de pleno derecho.

Una de ellas va a despuntar rápidamente y a cautivar a los más grandes sabios de la Antigüedad: la geometría. Ella es la que asegurará el renombre de las primeras estrellas de las matemáticas, como Tales, Pitágoras o Arquímedes, cuyos nombres siguen apareciendo con frecuencia en las páginas de nuestros manuales escolares.

No obstante, antes de ser una tarea de grandes pensadores, la geometría va a ser reconocida sobre el terreno. Su etimología lo atestigua: es ante todo la ciencia de la medición de la tierra, y los primeros agrimensores van a ser matemáticos de proximidad. Así pues, los problemas de reparto del territorio forman parte de los clásicos del género. ¿Cómo dividir un campo en partes iguales? ¿Cómo evaluar el precio de un terreno a partir de su superficie? ¿Cuál de estas dos parcelas está más cerca del río? ¿Qué trazado ha de seguir el futuro canal para que su construcción sea lo más corta posible?

Todas estas preguntas son de una importancia capital en las sociedades antiguas, cuya economía se articula todavía esencialmente alrededor de la agricultura y, por ende, de la repartición de tierras. Para responderlas, se construye un saber geométrico, que se enriquece y se transmite de generación en generación. Disponer de este saber significa indiscutiblemente asegurarse un lugar central e indispensable en la sociedad.

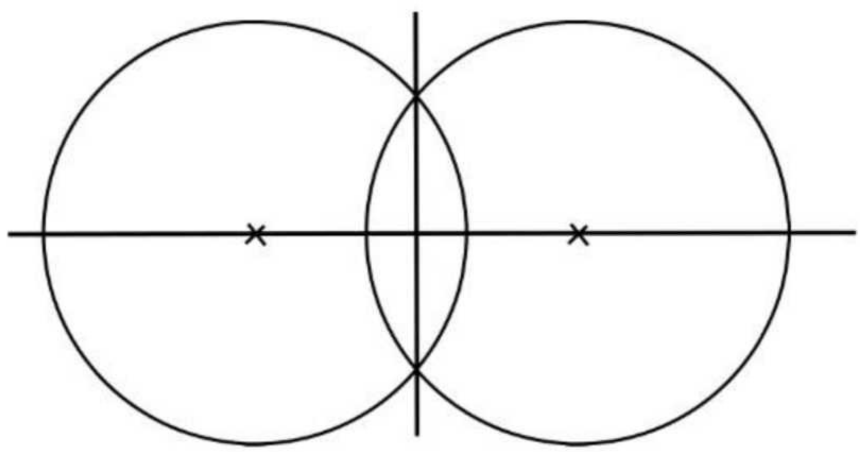
Para estos profesionales de la medición, la cuerda es a menudo el primero de los instrumentos de geometría. En Egipto, el tendedor de cuerda era un oficio en toda regla. Cuando las crecidas del Nilo provocan inundaciones regulares, se recurre a ellos para redefinir los límites de las parcelas que bordean el río. Gracias a las informaciones conocidas sobre el terreno, clavan sus estacas, despliegan sus largas cuerdas a través de los campos y efectúan los cálculos que permiten volver a hallar las fronteras borradas por las aguas.

Cuando se erige un edificio, son también ellos los primeros que intervienen para tomar las medidas del suelo y marcar con precisión el emplazamiento de la construcción a partir de los planos del arquitecto. Y, cuando se trata de un templo o de un monumento de importancia, a veces es el faraón en persona quien acude simbólicamente a tender la primera cuerda.

Es preciso decir que la cuerda es el instrumento geométrico integral. Los agrimensores la utilizan a la vez como regla, como compás y como escuadra.

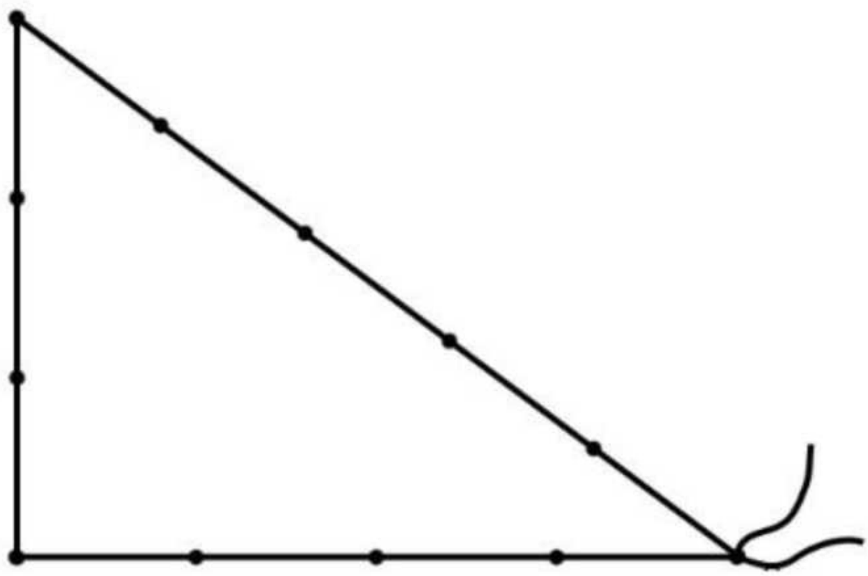
Hacerse con una regla es bastante sencillo: si tiendes la cuerda entre dos puntos fijos, obtendrás una línea recta. Y, si prefieres una regla graduada, basta con hacer nudos en la cuerda a intervalos regulares. Para el compás, tampoco hace falta ser un genio. Fija simplemente uno de los dos extremos a una estaca y haz girar el otro a su alrededor. Así obtendrás un círculo. Y, si tu cuerda está graduada, dominarás perfectamente la longitud de su radio.

Para la escuadra, en cambio, las cosas se complican un tanto. Detengámonos unos instantes en este problema concreto: ¿cómo harías para trazar un ángulo recto? Investigando un poco, podemos imaginar varios métodos diferentes. Si, por ejemplo, trazamos dos círculos que se cruzan, entonces la línea recta que une sus centros es perpendicular a la línea recta que pasa por sus dos puntos de intersección. Aquí tienes tu ángulo recto.



Desde un punto de vista teórico, esta construcción funciona perfectamente, pero, en la práctica, resulta más complicado. Imagínate que los agrimensores tienen que dibujar con precisión dos grandes círculos a través de los campos cada vez que necesitan un ángulo recto, o sencillamente para controlar que un ángulo ya trazado sea bien recto. Este método no es rápido ni eficaz.

El método adoptado por los agrimensores fue otro más sutil y más práctico: formar directamente con su cuerda un triángulo con un ángulo recto. Semejante triángulo se denomina triángulo rectángulo. Y el más célebre de ellos es el 3-4-5. Si cogemos una cuerda dividida en doce intervalos por trece nudos, podemos formar un triángulo cuyos lados medirán respectivamente tres, cuatro y cinco intervalos. Y, como por arte de magia, el ángulo que forman los lados 3 y 4 es perfectamente recto.



Hace ya cuatro mil años, los babilonios disponían de tablas de números que permitían construir triángulos rectángulos. La tablilla Plimpton 322, que actualmente forma parte de las colecciones de la Universidad de Columbia en Nueva York y data del año 1800 antes de nuestra era, presenta un cuadro de quince tripletas de tales números. Además del 3-4-5, encontramos allí otros catorce triángulos, algunos de los cuales son mucho más complejos, como el 65-72-97 o incluso el 1679-2400-2929. Con excepción de algunos pequeños gazapos (errores de cálculo o de transcripción), los triángulos de la tablilla Plimpton son perfectamente exactos: ¡todos poseen un ángulo recto!

Es difícil saber con exactitud a partir de qué época los agrimensores babilonios utilizaron sus conocimientos de los triángulos rectángulos sobre el terreno, pero lo cierto es que su empleo ha perdurado mucho después de la desaparición de su civilización. En la Edad Media, la cuerda de trece nudos, también llamada cuerda de los druidas, seguía siendo uno de los instrumentos esenciales de los constructores de catedrales.

Cuando viajamos a través de la historia de las matemáticas, no es raro constatar que ciertas nociones semejantes aparecen de manera independiente a miles de kilómetros unas de otras y en contextos culturales profundamente diferentes. A una de estas extrañas coincidencias asistimos asombrados al descubrir que la civilización china desarrolló, en el transcurso del primer milenio antes de nuestra era, todo un saber matemático que se corresponde curiosamente con los descubrimientos de las civilizaciones babilónica, egipcia o griega de la misma época.

Estos conocimientos se acumularon en el curso de los siglos, antes de ser compilados bajo la dinastía Han, hace alrededor de dos mil doscientos años, en una de las primeras grandes obras matemáticas del mundo: *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*.

El primero de estos nueve capítulos está consagrado íntegramente al estudio de las mediciones de campos de formas variadas. Rectángulos, triángulos, trapecios, discos, porciones de discos o incluso anillos son otras tantas figuras geométricas para las cuales se exponen minuciosamente procedimientos de cálculo del área. Al avanzar en la obra, descubrimos que el noveno y último capítulo se dedica, por su parte, al estudio de los triángulos rectángulos. Y adivina de qué figura se trata desde la primera frase de este capítulo… ¡el 3-4-5!

Las buenas ideas son así. Superan las diferencias culturales y saben florecer espontáneamente allí donde existen espíritus humanos dispuestos a acogerlas.

ALGUNOS PROBLEMAS DE ÉPOCA

Las cuestiones del campo, de la arquitectura o, en términos más generales, de ordenación territorial llevaron a los sabios de la Antigüedad a plantearse problemas geométricos de una gran diversidad, entre los que se incluyen los ejemplos reproducidos a continuación.

El siguiente enunciado, tomado de la tablilla babilónica BM 85200, muestra que los babilonios no se contentaban con la geometría plana, sino que además reflexionaban sobre el espacio:

Un sótano. Tanto como la longitud, la profundidad. 1, la tierra he arrancado. Mi suelo y la tierra he amontonado, 1,10. Longitud y frente: ,50. Longitud, frente, ¿qué?[1].

Como ves, los matemáticos de Babilonia tenían un estilo telegráfico. Detallando más, este mismo enunciado podría sonar más o menos así:

La profundidad de un sótano es doce veces superior[2] a su longitud. Si excavo mi sótano para que tenga una unidad más de profundidad, entonces su volumen será igual a 7/6. Si añado la longitud y la anchura, obtengo 5/6.[3] ¿Cuáles son las dimensiones del sótano?

Este problema va acompañado del método detallado de resolución que conduce a la solución: la longitud es 1/2, la anchura 1/3 y la profundidad 6.

Demos ahora un paseo por el Nilo. Por supuesto, en los egipcios encontramos problemas de pirámides. El siguiente enunciado está sacado de un célebre papiro redactado por el escriba Ahmes, y data de la primera mitad del siglo XVI antes de nuestra era.

Una pirámide cuya base es de 140 codos y cuya pendiente[4] es de 5 palmos y 1 dedo, ¿qué altura tiene?

El codo, el palmo y el dedo eran unidades de medida que equivalían, respectivamente, a 52,5, 7,5 y 1,88 centímetros. Ahmes ofrece también la solución: 93 codos y 1/3. En este mismo papiro, el escriba se ocupa asimismo de la geometría del círculo.

Ejemplo de cálculo de un campo redondo con un diámetro de 9 khet. ¿Cuál es el valor de su área?

El khet es igualmente una unidad de medida que equivale aproximadamente a 52,5 metros. Para resolver este problema, Ahmes afirma que el área de este campo circular es igual a la de un campo cuadrado cuyo lado mide 8 khet. La comparación es sumamente útil, pues resulta mucho más fácil calcular el área de un cuadrado que la de un disco. Calcula 8 x 8 = 64. No obstante, los matemáticos que sucederán a Ahmes descubrirán que su resultado no es exacto. Las áreas del disco y el cuadrado no coinciden del todo. Muchos intentarán después responder a esta pregunta: ¿cómo construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo? Muchos se esforzarán en vano, y con toda la razón. Sin saberlo, Ahmes fue uno de los primeros en enfrentarse a lo que llegará a ser el mayor rompecabezas matemático de todos los tiempos: ¡la cuadratura del círculo!

Análogamente, en China se intenta calcular la superficie de campos circulares. El problema siguiente está tomado del primero de *Los nueve capítulos*.

Supongamos que tenemos un campo circular de 30 bu de circunferencia y 10 bu de diámetro. Se pide calcular el campo.[5]

Aquí, un bu equivale aproximadamente a 1,4 metros. Y, al igual que en Egipto, los matemáticos chinos tropiezan con esta figura. Sabemos desde entonces que este enunciado es falso, puesto que un disco cuyo diámetro es 10 posee una circunferencia ligeramente superior a 30. No obstante, esto no impide a los sabios chinos dar un valor aproximado al área (75 bu), ni complicar más aún la tarea encadenando preguntas sobre anillos circulares:

Supongamos que tenemos un campo con forma de anillo que mide 92 bu de circunferencia interior, 122 bu de circunferencia exterior y 5 bu de diámetro transversal. Se pregunta cuánto mide el campo.

Es dudoso que haya existido jamás en la antigua China un campo en forma de anillo, y en estos últimos problemas se advierte que los sabios del Imperio Medio, dedicados al juego de la geometría, se plantearon preguntas como puro desafío teórico. Investigar figuras geométricas cada vez más improbables e irregulares para estudiarlas y comprenderlas continúa siendo en la actualidad uno de los pasatiempos favoritos de nuestros matemáticos contemporáneos.

En la categoría de los oficios de la geometría, hay que mencionar asimismo a los bematistas. Si los agrimensores u otros tendedores de cuerdas tienen como misión medir los campos y los edificios, los bematistas se dedican a cosas mucho más grandes. En Grecia, estos hombres tienen como tarea la medición de largas distancias contando sus pasos.

Y, a veces, sus misiones pueden conducirlos lejos, muy lejos de su casa. Así es como, en el siglo IV a. C., Alejandro Magno llevó consigo algunos bematistas en su campaña de Asia, que lo condujo hasta las fronteras de la India actual. Estos caminantes geómetras tenían que medir, por tanto, trayectos de varios miles de kilómetros.

Ganemos un poco de altura e imaginemos por un instante el extraño espectáculo de estos hombres con paso acompasado, atravesando los inmensos paisajes del Oriente Medio. Veámoslos recorriendo las mesetas de la Alta Mesopotamia; caminando por los paisajes áridos y amarillos de la península del Sinaí para llegar hasta las fértiles riberas del valle del Nilo; luego, desandando el camino para enfrentarse a los macizos montañosos del Imperio persa y los desiertos del actual Afganistán. ¿Los ves caminar sin tregua, imperturbables, con un ritmo seco y monótono, y pasar al pie de las gigantescas montañas del Hindu Kush, para regresar por las costas del océano Índico? Contando infatigablemente sus pasos.

La imagen es sobrecogedora y la desmesura de su empresa se antoja insensata. Y, sin embargo, sus resultados son de una precisión extraordinaria: ¡menos del 5 % de diferencia como promedio entre sus mediciones y las distancias reales que hoy conocemos! Los bematistas de Alejandro permitieron describir así la geografía de su reino como jamás se había hecho antes para una región tan vasta.

Dos siglos más tarde, en Egipto, un sabio de origen griego llamado Eratóstenes imagina un proyecto mucho mayor todavía: medir la circunferencia de… la Tierra. ¡Nada más y nada menos! Ni que decir tiene que no se trata de enviar a los pobres bematistas a que den la vuelta al planeta. Sin embargo, gracias a hábiles observaciones sobre la diferencia de inclinación de los rayos del Sol entre las ciudades de Siena (actual Asuán) y Alejandría, Eratóstenes calculó que la distancia entre las dos ciudades debía representar un cincuentavo de la circunferencia total de la Tierra.

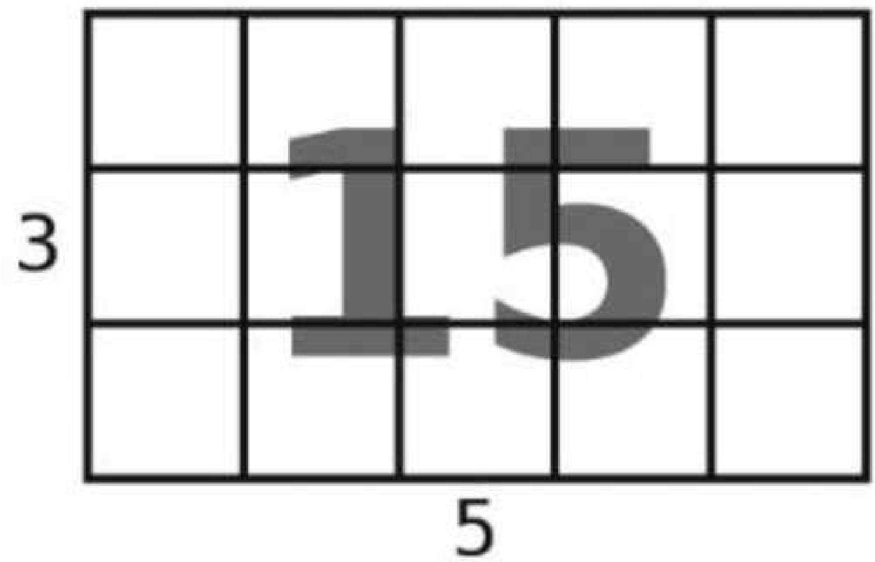
Entonces, por supuesto, llama a los bematistas para que hagan la medición. A diferencia de sus homólogos griegos, los bematistas egipcios no cuentan directamente sus pasos, sino los de un camello que los acompaña. El animal es famoso por la regularidad de su marcha. Tras largas jornadas de viaje a lo largo del Nilo, se emite el veredicto: las dos ciudades están separadas por 5000 estadios y la vuelta a nuestro planeta equivale, por tanto, a 250 000, es decir, 39 375 kilómetros. Una vez más, el resultado es de una precisión pasmosa, cuando hoy sabemos que la medida exacta de esta circunferencia es de 40 008 kilómetros. ¡Menos del 2 % de error!

Tal vez más que cualquier otro pueblo antiguo, los griegos van a otorgar a la geometría un lugar preponderante en el seno de su cultura. Se le reconoce su rigor y su capacidad de formar los espíritus. Para Platón, es un paso obligatorio para todo aquel desee llegar a ser filósofo, y cuenta la leyenda que en el frontispicio de su Academia estaba grabado el lema: «Que no entre aquí nadie que no sea geómetra».

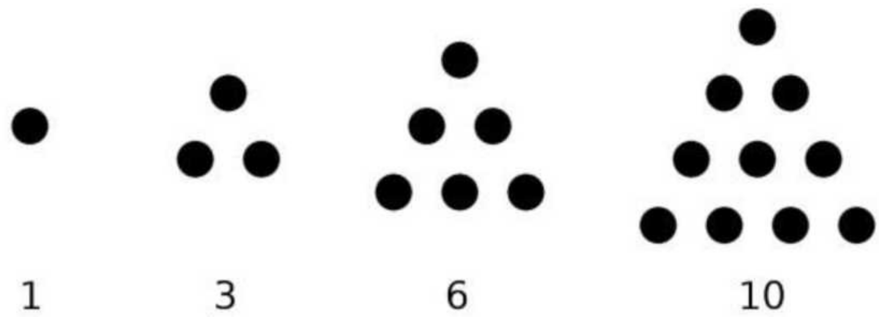
La geometría está tan en boga que acaba por desbordarse a sí misma para invadir otras disciplinas. Las propiedades aritméticas de los números van a interpretarse así en lenguaje geométrico. Veamos, a título de ejemplo, esta definición de Euclides, extraída del séptimo libro de sus *Elementos*, que datan del siglo III a. C.:

Cuando se multiplican dos números, forman otro número; el producto se llama plano y sus lados son los números que se han multiplicado.

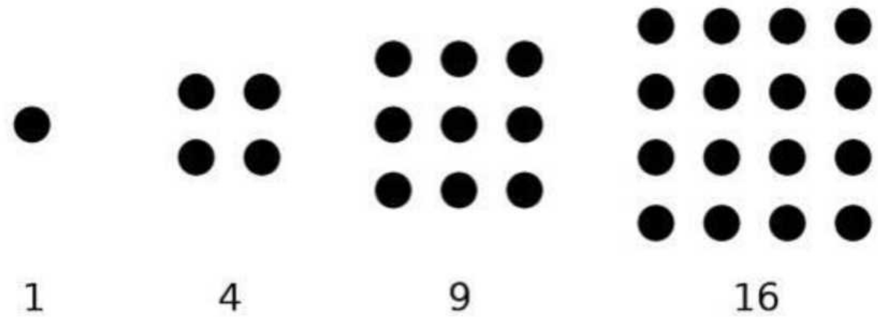
Así pues, si calculo el producto de 5 x 3, los números 5 y 3 se llaman, según Euclides, «lados» de la multiplicación. ¿Por qué este nombre? Sencillamente porque una multiplicación puede representarse como la superficie de un rectángulo. Si este tiene una anchura igual a 3 y una longitud de 5, su área equivale a 5 x 3. Los números 3 y 5 son, pues, los lados del rectángulo. Por su parte, el resultado de la multiplicación, 15, lo denomina «plano», puesto que se corresponde geométricamente con una superficie.



Construcciones similares dan lugar a otras figuras geométricas. Así, se llama triangular al número que puede representarse en forma de… triángulo. Los primeros números triangulares son 1, 3, 6 y 10.



Este último triángulo de diez puntos no es otro que la famosa *tetraktys* que Pitágoras y sus discípulos habían convertido en símbolo de la armonía del cosmos. Siguiendo el mismo principio, hallamos asimismo los números cuadrados, cuyos primeros representantes son 1, 4, 9 y 16.



Y, por supuesto, podríamos continuar así mucho tiempo con toda suerte de figuras. De este modo, la representación geométrica de los números permite tornar visibles y evidentes ciertas propiedades que, sin ella, parecen incomprensibles.

A título de ejemplo, ¿has probado ya a sumar uno tras otro los números impares: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 +…? ¿No? Sucede, sin embargo, algo asombroso. Mira:

$$1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

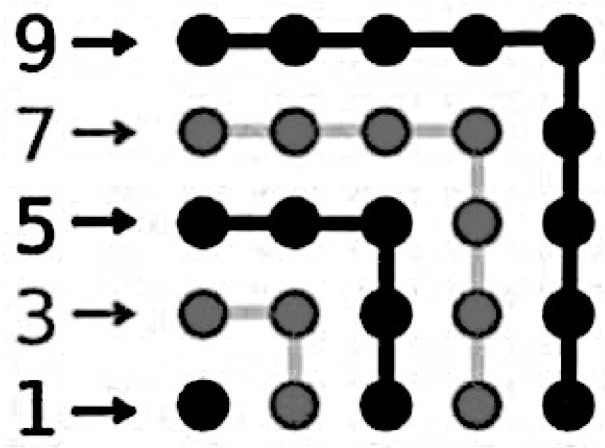
¿Te das cuenta de la particularidad de los números que aparecen? Por orden: 1, 4, 9, 16. ¡Son los números cuadrados!

Y puedes continuar todo el tiempo que quieras: esta regla jamás será desmentida. Suma, si te atreves, los diez primeros números impares, del 1 al 19, y obtendrás 100, que es el décimo número cuadrado:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$= 10 \times 10 = 100.$$

¿No es asombroso? Pero ¿por qué? ¿Por qué milagro es siempre verdadera esta propiedad? Sin duda sería posible ofrecer una prueba numérica, pero existe otra forma mucho más simple. Gracias a la representación geométrica, basta con cortar en rodajas los números cuadrados para que la explicación nos salte a la vista.



Cada rodaja añade un número impar de bolas, aumentando en una unidad el lado del cuadrado. Así queda probado de forma simple y clara.

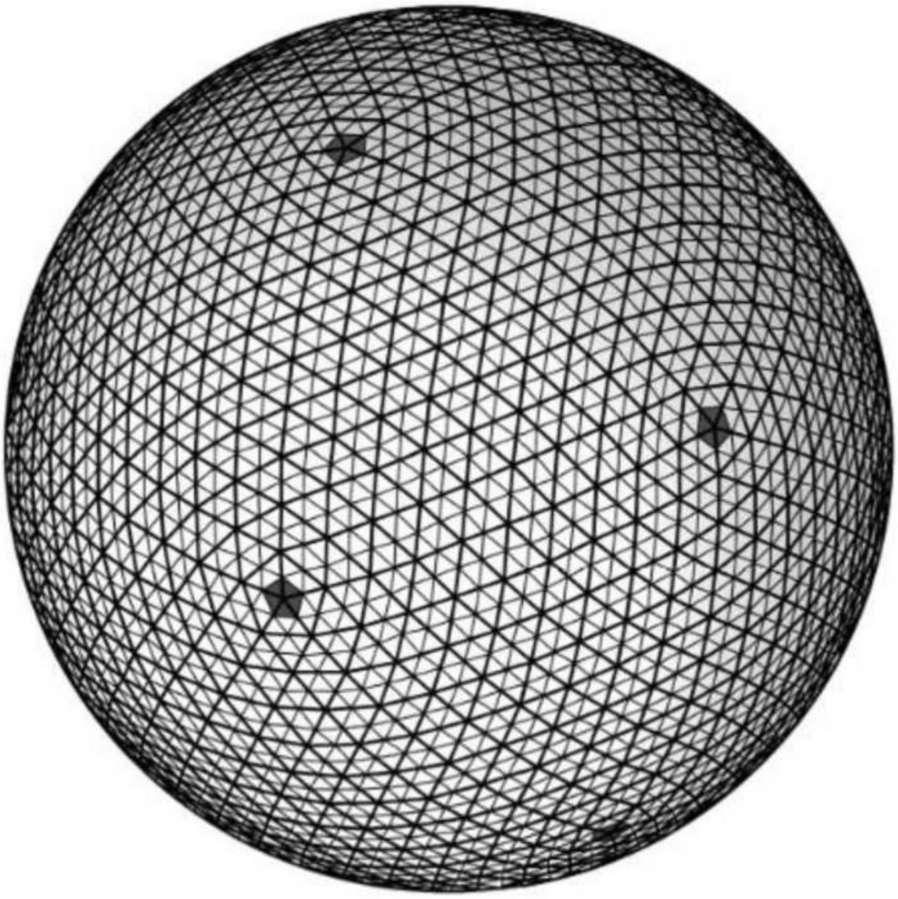
En resumidas cuentas, en el ámbito de las matemáticas, la geometría es la reina y no puede validarse ninguna afirmación sin pasar su criba. Su hegemonía va a perdurar mucho más allá de la Antigüedad y de la civilización griega. Habrá que esperar todavía cerca de dos mil años hasta que los sabios del Renacimiento lancen un vasto movimiento de modernización de las matemáticas que destronará la geometría en beneficio de un lenguaje completamente nuevo: el del álgebra.

Capítulo 4
El tiempo de los teoremas

Estamos a principios de mayo. Es mediodía y el sol brilla encima del parque de la Villette en el norte de París. Frente a mí se alza la Ciudad de las Ciencias y de la Industria, con la Geoda en primer plano. Esta extraña sala de cine, construida a mediados de la década de 1980, se asemeja a una gigantesca bola con facetas de 36 metros de diámetro.

Es un lugar muy transitado. Hay turistas con la cámara de fotos en la mano, que acuden a ver el curioso edificio parisino. Encontramos familias que dan su paseo del miércoles. Algunos enamorados sentados en la hierba o caminando de la mano. De vez en cuando, un corredor zigzaguea en medio de la ola de residentes del barrio que pasan indiferentes, echando apenas un vistazo a la extraña aparición de esta esfera espejada en medio de su vida cotidiana. Por todas partes, los niños se divierten observando en ella la imagen deformada del mundo que los rodea.

Por mi parte, si hoy estoy aquí es porque su geometría me interesa particularmente. Comienzo a aproximarme examinándola con atención. Su superficie está compuesta por miles de espejos triangulares ensamblados unos con otros. A primera vista, el ensamblaje puede parecer perfectamente regular. Sin embargo, tras escrutar unos minutos el edificio, empiezo a descubrir varias irregularidades. Alrededor de ciertos puntos muy precisos, los triángulos se deforman y se amplían como si estuvieran estirados por una malformación de la estructura. Mientras que en casi toda la esfera forman una malla perfectamente regular agrupándose en hexágonos de seis, existe una docena de puntos particulares en torno a los cuales solo se agrupan cinco triángulos.



Representación de la Geoda y de sus miles de triángulos. Los puntos en los que se agrupan cinco triángulos están señalados en gris oscuro.

Estas irregularidades son casi invisibles a primera vista. De hecho, pasan desapercibidas a la mayoría de los paseantes. Sin embargo, para mis ojos de matemático, nada tienen de asombroso. Incluso he de decir que esperaba encontrarlas. El arquitecto no ha cometido ningún error; de hecho, existen en el mundo muchos otros edificios que tienen una geometría similar, y todos ellos presentan esta misma docena de puntos cuyas piezas básicas forman grupos de cinco en lugar de seis. Estos puntos son los resultados de limitaciones geométricas ineludibles, descubiertas hace más de dos mil años por los matemáticos griegos.

Teeteto de Atenas es un matemático del siglo IV antes de nuestra era, y a él se le suele atribuir la descripción completa de los poliedros regulares. Un poliedro, en geometría, es simplemente una figura tridimensional delimitada por varias caras planas. Así, los cubos y las pirámides forman parte de la familia de los poliedros, contrariamente a las esferas y los cilindros, cuyas caras son redondeadas. La geoda, con sus caras triangulares, puede considerarse igualmente un poliedro gigante, aunque su gran número de caras hace que de lejos parezca una esfera.

Teeteto se interesó muy especialmente por los poliedros perfectamente simétricos, es decir, aquellos cuyas caras y ángulos son todos iguales. Y su descubrimiento es, cuando menos, desconcertante: no encontró más que cinco y demostró que no existe ningún otro. ¡Cinco sólidos solamente! Ni uno más.

De izquierda a derecha: tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Todavía hoy es habitual designar los poliedros según su número de caras, escrito en griego clásico, seguido del sufijo *-edro*. Así, el cubo con seis caras cuadradas recibe en geometría el nombre de *hexaedro*. Por su parte, el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro tienen respectivamente cuatro, ocho, doce y veinte caras. Más adelante, se dará a estos cinco poliedros el nombre de *sólidos platónicos*.

¿De Platón? ¿Y por qué no de Teeteto? La historia es a veces injusta, y no son siempre los descubridores quienes reciben los honores de la posteridad. El filósofo ateniense no tiene nada que ver con el descubrimiento de los cinco sólidos, pero los volvió célebres debido a una teoría que los asocia a los elementos del cosmos: el fuego se asocia al tetraedro, la tierra al hexaedro, el aire al octaedro y el agua al icosaedro. En cuanto al dodecaedro, con sus caras pentagonales, Platón pretendía que se trataba de la forma del universo. Hace mucho tiempo que la ciencia abandonó esta teoría y, sin embargo, sigue siendo habitual asociar a Platón los cinco poliedros regulares.

Para ser totalmente honestos, es preciso decir que Teeteto tampoco fue el primero en descubrir estos cinco sólidos. Encontramos modelos esculpidos o descripciones escritas mucho más antiguos. Así, en Escocia se ha descubierto una colección de bolitas de piedra esculpida que reproducen las formas de los sólidos platónicos, y que dataría de mil años antes del matemático griego. Estas piezas se conservan en la actualidad en el Museo Ashmolean de Oxford.

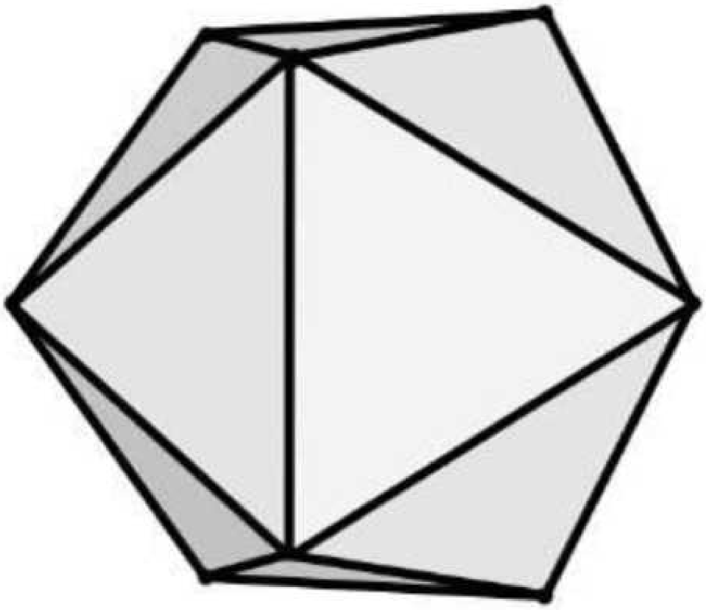
Entonces ¿Teeteto no es mejor que Platón? ¿Es él también un impostor? No exactamente ya que, si bien es cierto que las cinco figuras ya se conocían anteriormente, él fue el primero en demostrar con claridad que la lista estaba completa. Es inútil seguir buscando, nos dice Teeteto, nadie encontrará otras jamás. Esta afirmación tiene algo de reconfortante. Nos saca de una duda terrible. ¡Uf! Todo está ahí.

Esta etapa es representativa de la forma en que los matemáticos griegos van a abordar las matemáticas. Para ellos, no se trata únicamente de hallar soluciones que funcionen. Quieren agotar el problema. Quieren asegurarse de que no se les escapa nada. Y, para ello, van a llevar hasta la cumbre el arte de la exploración matemática.

Regresemos ahora a nuestra Geoda. La demostración de Teeteto es inapelable: resulta imposible que un poliedro de varios centenares de caras sea perfectamente regular. ¿Qué hacer entonces si eres arquitecto y deseas crear un edificio que se asemeje todo lo posible a una esfera totalmente regular? Es difícil técnicamente concebir el edificio en una sola pieza. No, no hay nada que hacer, es preciso ensamblar una multitud de pequeñas caras. Pero ¿cómo crear semejante estructura?

Cabe imaginar diversas soluciones. Una de ellas consiste en coger uno de los sólidos platónicos para modificarlo. Observemos, por ejemplo, el icosaedro. Con sus veinte caras triangulares, es el que parece más redondo de los cinco. Para hacerlo más flexible, es posible cortar cada una de sus caras en otras más pequeñas. El poliedro obtenido puede deformarse entonces, como si lo infláramos soplando dentro, a fin de aproximarse lo más posible a una esfera.

Por ejemplo, esto es lo que sucede si subdividimos cada cara del icosaedro en cuatro triángulos más pequeños:



El icosaedro.

Icosaedro con las caras recortadas en cuatro.

Icosaedro con las caras recortadas e inflado.

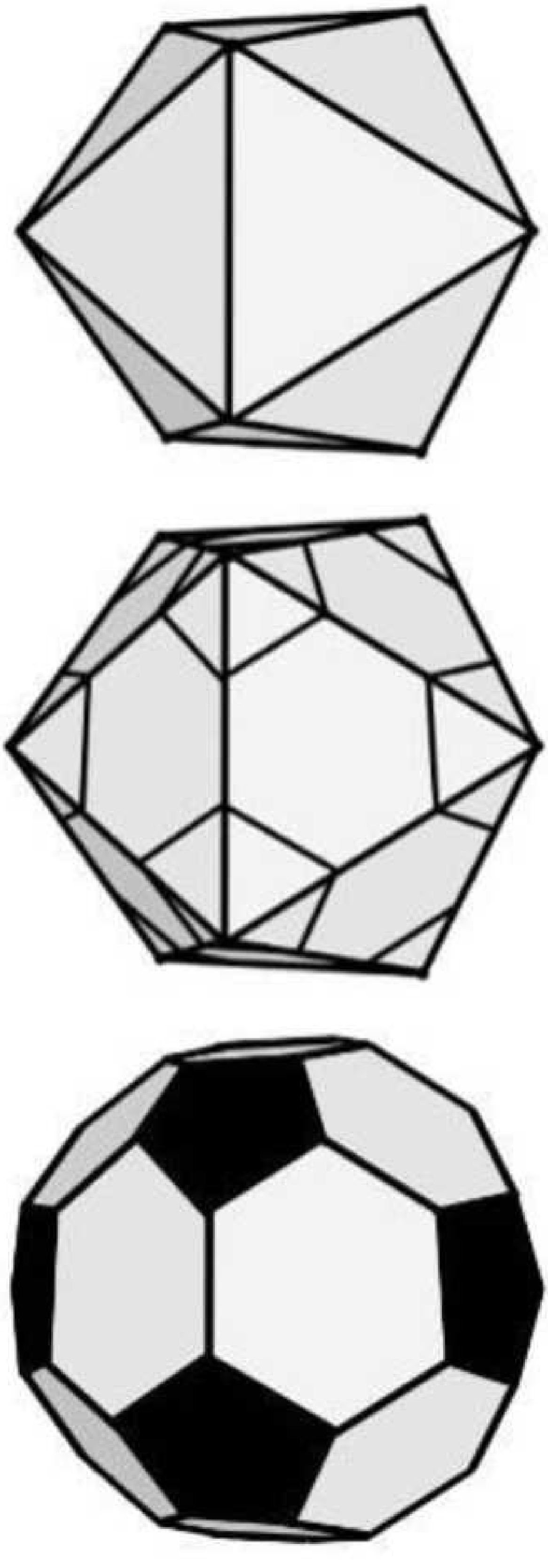
En geometría, este poliedro se denomina… geoda. Etimológicamente alude a una figura que tiene la forma de la Tierra, es decir, que se asemeja a una esfera. El principio no es muy complicado. ¡Esta construcción es exactamente la utilizada para la Geoda de la Villette! No obstante, la subdivisión de las caras es mucho más fina: los triángulos básicos del icosaedro se recortan esta vez en 400 triángulos más pequeños, ¡lo que suma un total de 8000 facetas triangulares!

En realidad, la Geoda consta de algo menos de 8000 facetas: solamente 6433, porque no está completa. Su base, apoyada en el suelo, está truncada y faltan algunos triángulos. Lo cierto es que esta estructura permite explicar la presencia de las doce irregularidades. Estas corresponden simplemente a los doce vértices del icosaedro de base. Dicho de otro modo, son los puntos donde se juntan de cinco en cinco los grandes triángulos de partida para formar las puntas del icosaedro. Estos vértices, puntiagudos en un principio, se achataron durante la multiplicación de las caras, hasta el punto de tornarse prácticamente invisibles. No obstante, su presencia sigue anclada en la disposición de los triángulos y las doce irregularidades están ahí para recordárselo a los transeúntes atentos.

Sin duda, Teeteto distaba mucho de imaginar que sus investigaciones permitirían un día la construcción de edificios como la Geoda. Y en esto radica el extraordinario poder de las matemáticas que desarrollaron los sabios de la antigua Grecia: poseen una formidable capacidad de engendrar ideas nuevas. Los griegos van a empezar poco a poco a desligar sus cuestionamientos de problemáticas concretas, generando así, por simple curiosidad intelectual, modelos originales e inspiradores. Aunque a menudo parecen carecer de utilidad concreta en el momento de su concepción, estos modelos acaban a veces por revelarse asombrosamente útiles mucho tiempo después de la desaparición de sus creadores.

Hoy en día, encontramos los cinco sólidos platónicos en diferentes contextos. Por ejemplo, pueden servir de dados en los juegos de sociedad. Su regularidad garantiza que el dado esté equilibrado, es decir, que todas las caras tengan las mismas probabilidades de salir. Todo el mundo conoce el dado cúbico de seis caras, pero los jugadores más inveterados saben que numerosos juegos utilizan igualmente las otras cuatro formas, para variar los placeres y las probabilidades.

Al alejarme de la Geoda me cruzo con unos niños que han sacado un balón y empiezan un partido de fútbol improvisado sobre el césped de la Villette. Sin sospecharlo, en este instante ellos también le deben mucho a Teeteto. ¿Se han percatado de que su balón posee igualmente sus motivos geométricos? La mayoría de los balones de fútbol están formados siguiendo el mismo modelo: veinte piezas hexagonales (de seis lados) y doce piezas pentagonales (de cinco lados). En los balones tradicionales, los hexágonos son blancos, mientras que los pentágonos son negros. E incluso cuando la superficie del balón está impresa con ilustraciones diversas y variadas, basta con observar atentamente las costuras que delimitan las diferentes piezas para ver reaparecer inexorablemente los veinte hexágonos y los doce pentágonos.



¡Un icosaedro truncado! Este es el nombre que dan los geómetras al balón de fútbol. Y su estructura es fruto de las mismas constricciones que la Geoda:

ha de ser lo más regular y lo más redonda posible. Solo que, para llegar a este resultado, los creadores de este modelo han empleado un método diferente. En lugar de subdividir las caras a fin de redondear los ángulos, simplemente han elegido… cortar los ángulos. Imagina que tienes un icosaedro de plastilina y coges un cuchillo y cortas simple y llanamente los vértices. Los veinte triángulos con las puntas cortadas se convierten en hexágonos, mientras que las doce puntas eliminadas hacen aparecer los doce pentágonos.

Los doce pentágonos de un balón de fútbol tienen, pues, el mismo origen que las doce irregularidades en la superficie de la Geoda: son las ubicaciones originales de los doce vértices del icosaedro.

¿Y esa joven pañuelo en mano con la que me cruzo al salir del parque de la Villette? No parece muy en forma. ¿No será víctima de una maligna proliferación de microicosaedros? En efecto, ciertos organismos microscópicos como los virus adoptan naturalmente la forma de icosaedros o de dodecaedros. Tal es el caso, por ejemplo, de los rinovirus, responsables de la mayoría de los catarros.

Si estas minúsculas criaturas adoptan tales formas es por las mismas razones por las que las empleamos en arquitectura o para fabricar nuestros balones. En aras de la simetría y de la economía. Gracias a los icosaedros, los balones solo están compuestos por dos tipos de piezas diferentes. Del mismo modo, la membrana de los virus solo está compuesta por algunos tipos de moléculas diferentes (cuatro en el caso del rinovirus), que encajan las unas en las otras repitiendo siempre el mismo motivo. El código genético necesario para la creación de un envoltorio semejante es, pues, mucho más conciso y económico que si hubiera sido preciso describir una estructura sin ninguna simetría.

Una vez más, Teeteto se habría sorprendido mucho al descubrir hasta dónde llegan a esconderse sus poliedros.

Salgamos definitivamente del parque de la Villette y retomemos el curso cronológico de nuestra historia. ¿Cómo llegaron los antiguos matemáticos, como Teeteto, a hacerse preguntas cada vez más generales y teóricas? Para comprenderlo, hemos de remontarnos algunos miles de años atrás por el perímetro oriental del Mediterráneo.

Mientras las culturas babilónica y egipcia se apagan lentamente, la Grecia antigua va a conocer su época más gloriosa. A partir del siglo VI antes de nuestra era, el mundo griego entra en un período de ebullición cultural y científica sin precedentes. La filosofía, la poesía, la escultura, la arquitectura, el teatro, la medicina o incluso la historia son otras tantas disciplinas que van a conocer una auténtica revolución. Todavía hoy, la excepcional vitalidad de este período preserva su parte de fascinación y de misterio. En este vasto movimiento intelectual, las matemáticas van a ocupar un lugar predilecto.

Cuando pensamos en la antigua Grecia, la primera imagen que nos viene a la cabeza es con frecuencia la de la ciudad de Atenas dominada por su Acrópolis. Nos imaginamos allí, deambulando en medio de los templos de mármol del Pentélico y de algunos olivos, entre los ciudadanos con toga blanca que acaban de inventar la primera democracia de la historia. Ahora bien, esta visión dista mucho de representar el conjunto del mundo griego en toda su diversidad.

En los siglos VIII y VII a. C., una multitud de colonias griegas se propagaron por el perímetro mediterráneo. Estas colonias se mezclaron a veces con los pueblos locales, adoptando en parte sus costumbres y su modo de vida. No todos los griegos vivían de la misma forma ni mucho menos. Su alimentación, su tiempo de ocio, sus creencias y sus sistemas políticos varían considerablemente de una región a otra.

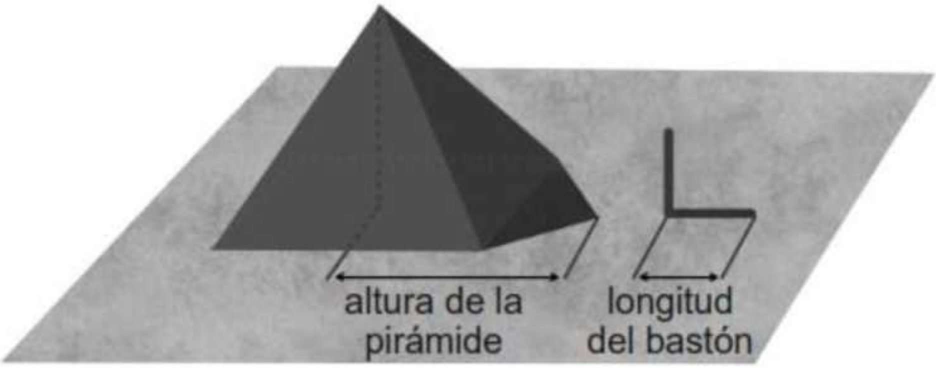
Así pues, las matemáticas griegas no surgen en un lugar restringido donde todos los sabios se conocen y se cruzan a diario, sino en una vasta zona geográfica y cultural. El contacto con las civilizaciones más antiguas de las que será heredera y la mezcla de su propia diversidad serán dos de los motores de la revolución matemática. Son muchos los sabios que efectuarán a lo largo de su vida una peregrinación a Egipto o a Oriente Medio como paso obligado en su aprendizaje. De este modo, una buena parte de las matemáticas babilónicas y egipcias se verán integradas y prolongadas por los sabios griegos.

Es en la ciudad de Mileto, en la costa suroeste de la actual Turquía, donde va a nacer, a finales del siglo VII a. C., el primer gran matemático griego: Tales. Pese a las múltiples fuentes que lo mencionan, hoy resulta difícil extraer informaciones fiables acerca de su vida y sus trabajos. Como sucede con muchos de los sabios de esta época, tras su muerte, algunos de sus discípulos, en un exceso de celo, forjarán diversas leyendas, hasta el punto de que se ha vuelto difícil discernir entre lo verdadero y lo falso. Los científicos de esa época no tenían excesivos reparos éticos, y no resultaba infrecuente verlos hacer sus componendas con la verdad cuando esta no era de su agrado.

Entre las múltiples historias que circulan sobre él, se cuenta por ejemplo que Tales era especialmente distraído. El sabio milesio habría sido el primer espécimen de una larga tradición de sabios despistados. Una anécdota cuenta que una noche lo vieron caer a un pozo mientras paseaba con los ojos dirigidos hacia el cielo, observando las estrellas. Otra nos cuenta que murió, con cerca de ochenta años, mientras asistía a una competición deportiva: al parecer, estaba tan cautivado por el espectáculo que se habría olvidado de beber y de comer.

Sus proezas científicas son también objeto de relatos singulares. Tales habría sido el primero en haber predicho correctamente un eclipse de sol. Este eclipse se produjo en plena batalla entre medos y lidios, a orillas del río Halis, al oeste de la actual Turquía. Ante la irrupción de la noche en pleno día, los combatientes, creyendo que se trataba de un mensaje de los dioses, decidieron inmediatamente hacer las paces. Hoy en día, predecir los eclipses o reconstruir los del pasado se ha convertido en un juego de niños para nuestros astrónomos. Gracias a ellos, sabemos que este eclipse tuvo lugar el 28 de mayo del año 584 a. C., lo cual convierte la batalla del Halis en el acontecimiento histórico más antiguo que sabemos datar con semejante precisión.

En el transcurso de un viaje a Egipto, Tales va a lograr lo que se considerará su mayor éxito. Se cuenta que el faraón Amasis en persona le lanzó el desafío de medir la altura de la gran pirámide. Hasta entonces, todos los sabios egipcios que habían sido consultados habían fracasado en esta cuestión. Tales no solo aceptará el reto, sino que lo hará con elegancia, empleando un método especialmente ingenioso. El sabio milesio clavó un bastón verticalmente en el suelo y aguardó el momento del día en que la longitud de su sombra era igual a su altura. En ese preciso momento, hizo medir la sombra de la pirámide, que también debía ser igual a su altura. ¡Listo!



La historia es ciertamente bonita, pero, una vez más, su realidad histórica es incierta. Tal como se cuenta, la anécdota es además bastante despectiva para con los sabios egipcios de la época, cuando papiros como el de Ahmes muestran que estos últimos sabían calcular perfectamente la altura de sus pirámides más de mil años antes de la llegada de Tales. ¿Dónde está entonces la verdad? ¿Midió Tales realmente la altura de la pirámide? ¿Fue él quien utilizó por primera vez el método de la sombra? ¿Y si se hubiera contentado con medir la altura de un olivo delante de su casa de Mileto? Sus discípulos se habrían encargado de adornar la historia tras su muerte. Hay que rendirse ante la evidencia: probablemente nunca lo sabremos.

Sea como fuere, la geometría de Tales es perfectamente real y, tanto si lo aplicó a la gran pirámide como a un olivo, el método de la sombra no pierde un ápice de su genialidad. Este método constituye un caso particular de una propiedad que hoy recibe su nombre: el teorema de Tales. A Tales se le atribuyen otros hallazgos matemáticos: todo diámetro divide el círculo en dos partes iguales (fig. 1); los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales (fig. 2); en dos rectas secantes, los ángulos opuestos al vértice son iguales (fig. 3); si un triángulo tiene sus tres vértices en una circunferencia y uno de sus lados pasa por el centro del círculo, entonces se trata de un triángulo rectángulo (fig. 4). Este último enunciado también se denomina a veces teorema de Tales.

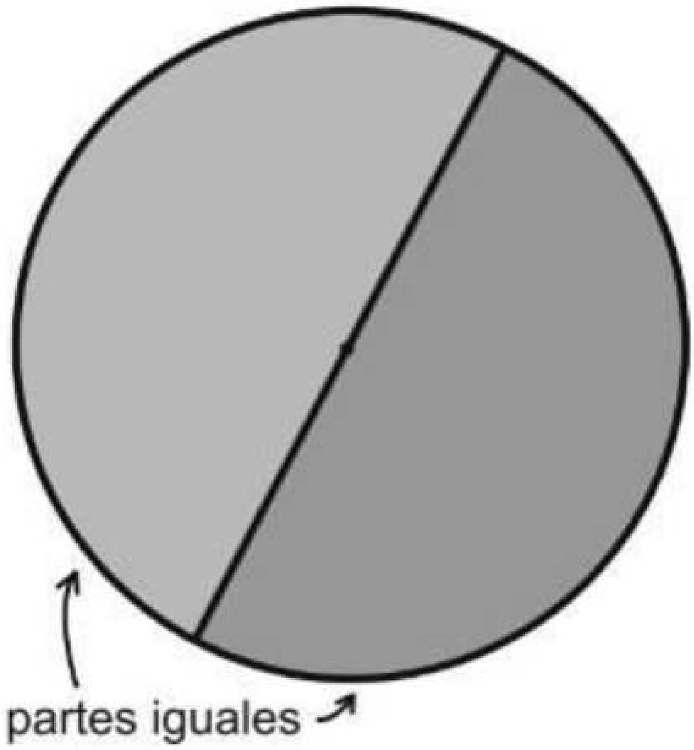


Fig. 1

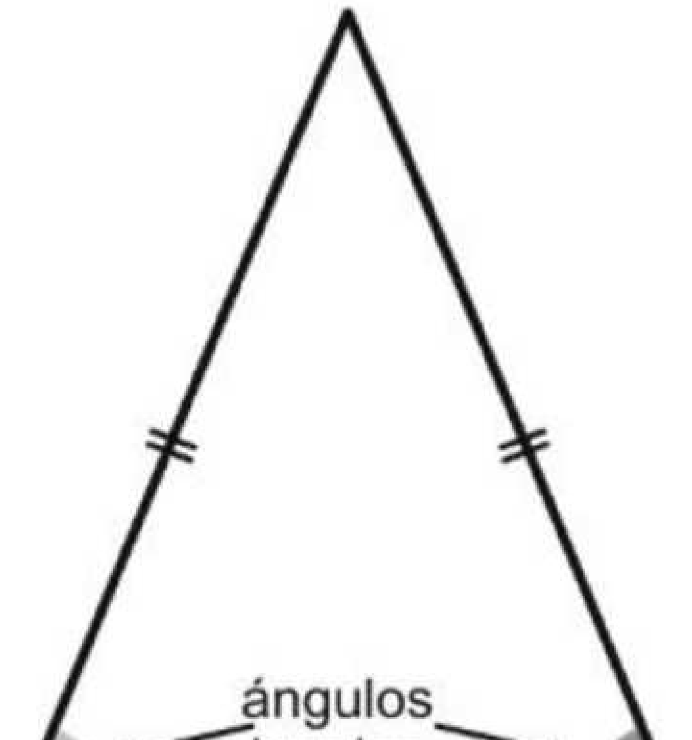


Fig. 2

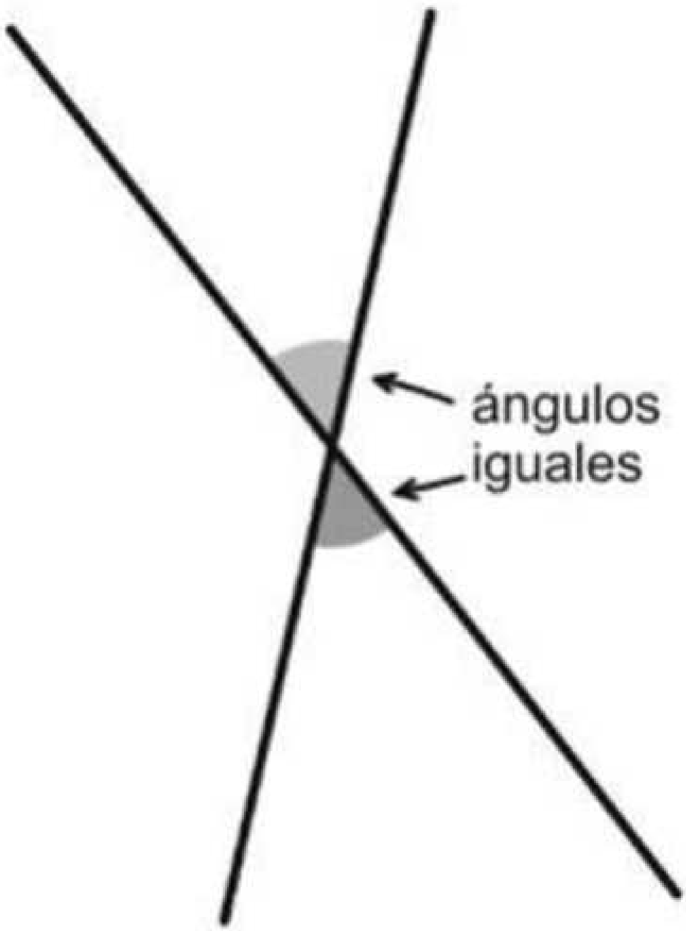


Fig. 3

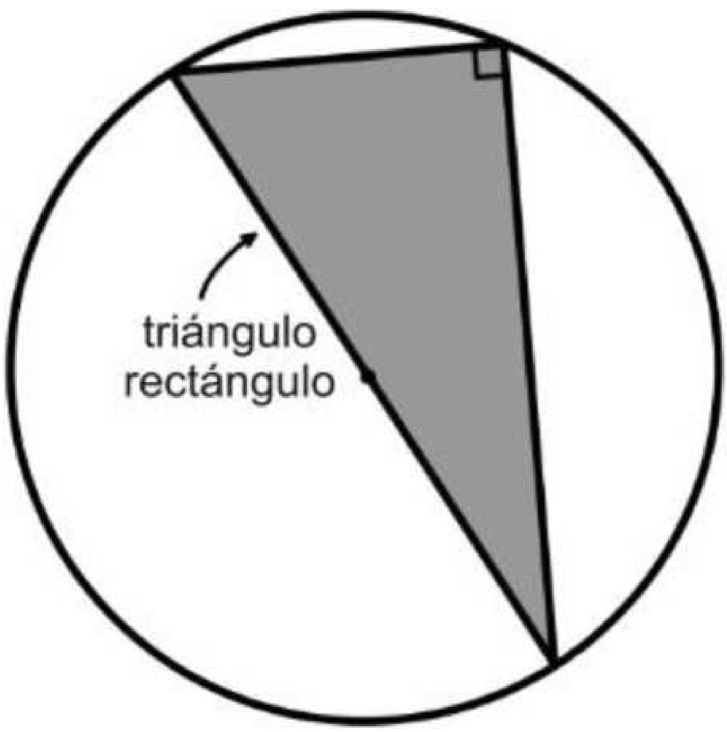


Fig. 4

Pasemos a examinar esta extraña palabra que tanto fascina como asusta: ¿qué es un teorema? Etimológicamente, la palabra procede de las raíces griegas *théa* (contemplación) y *horáo* (mirar, ver). Así, un teorema sería un tipo de observación sobre el mundo matemático, un hecho que habría sido constatado, examinado y registrado por los matemáticos. Los teoremas pueden transmitirse tanto de forma oral como por escrito, y se asemejan a las recetas de la abuela o a los refranes meteorológicos que ya se han probado a lo largo de las generaciones y en cuya veracidad confiamos. Una golondrina no hace verano, el laurel calma el reumatismo y el triángulo 3-4-5 tiene un ángulo recto. Son afirmaciones que creemos verdaderas y que tratamos de recordar para reutilizarlas en el momento oportuno.

Según esta definición, los mesopotámicos, los egipcios y los chinos también enunciaron teoremas. Sin embargo, a partir de Tales, los griegos van a conferirles una nueva dimensión. Para ellos, un teorema no solo debe enunciar una verdad matemática, sino que esta ha de formularse de la manera más general posible y acompañarse de una demostración que la valide.

Volvamos a una de las propiedades atribuidas a Tales: el diámetro de un círculo divide a este en dos partes iguales. Semejante afirmación puede antojarse bastante decepcionante viniendo de un sabio de la envergadura de Tales. Parece algo evidente. ¿Por qué habría que haber esperado hasta el siglo VI a. C. para que se enunciase una afirmación tan trivial? No cabe la menor duda de que los sabios egipcios y babilonios debían de saber esto desde hacía mucho tiempo.

No obstante, conviene no equivocarse: la audacia de la propiedad enunciada por el sabio milesio no radica tanto en su contenido como en su formulación. ¡Tales se atreve a hablar de un círculo sin precisar cuál! Para enunciar la misma regla, los babilonios, los egipcios o los chinos se habrían servido de un ejemplo. Habrían dicho: dibuja un círculo cuyo radio mida 3 y uno de sus diámetros; este diámetro divide el círculo en dos partes iguales. Y si un ejemplo no es suficiente para comprender la regla, se ofrece un segundo, un tercero o un cuarto si es preciso. Tantos ejemplos como haga falta para que el lector comprenda que puede repetir la misma operación con cada círculo que encuentre. Pero jamás se formula la afirmación general.

Tales llega más lejos. Coge un círculo, el que tú quieras, sin que yo lo sepa. Puede ser gigantesco o minúsculo. Dibújalo en horizontal, en vertical o en un plano inclinado, me da igual. Me es completamente indiferente tu círculo en particular y tu forma de trazarlo. ¡Y, sin embargo, afirmo que su diámetro lo corta en dos partes iguales!

Mediante esta operación, Tales otorga definitivamente a las figuras geométricas la categoría de objetos matemáticos abstractos. Esta etapa del pensamiento se asemeja a la que había llevado dos mil años antes a los mesopotámicos a considerar los números con independencia de los objetos contados. Un círculo ya no es una figura dibujada en el suelo, en una tablilla o un papiro. El círculo se convierte en una ficción, una idea, un ideal abstracto todas cuyas representaciones reales no son sino avatares imperfectos.

A partir de entonces, las verdades matemáticas podrán enunciarse de forma concisa y general, independientemente de los diversos casos particulares que abarquen. Estos son los enunciados que los griegos denominarán de aquí en adelante teoremas.

Tales tuvo varios discípulos en Mileto. Los dos más célebres fueron Anaxímenes y Anaximandro. Anaximandro tuvo a su vez discípulos y, entre ellos, un tal Pitágoras, cuyo nombre quedará ligado al teorema más famoso de todos los tiempos.

Pitágoras nació a comienzos del siglo VI a. C. en la isla de Samos, situada frente a la costa de la actual Turquía, a unos kilómetros solamente de la ciudad de Mileto. Tras una juventud de aprendizaje viajando por el mundo antiguo, Pitágoras decidió afincarse en la ciudad de Crotona, en el sudeste de la actual Italia. Allí fundaría su escuela el año 532 a. C.

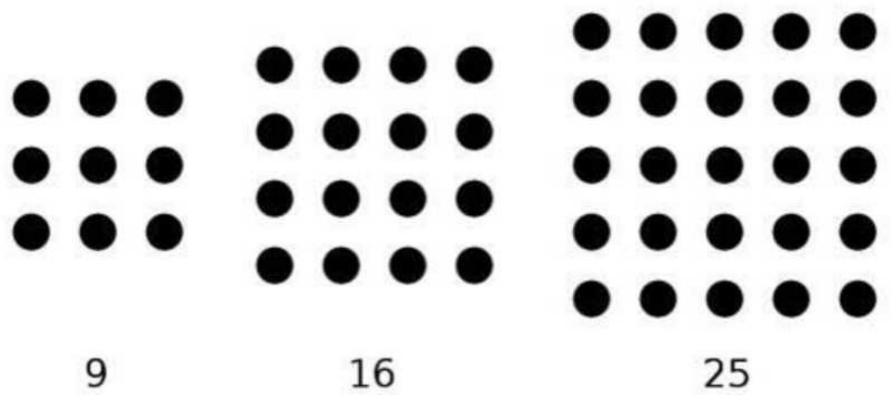
Pitágoras y sus discípulos no son solo matemáticos y científicos, sino también filósofos, religiosos y políticos. Ahora bien, es preciso decir que, si la traspusiéramos a nuestra época, la comunidad formada por Pitágoras pasaría sin duda por una secta de las más oscuras y peligrosas. La existencia de los pitagóricos está regida por un conjunto de reglas precisas. Quien pretenda incorporarse a la escuela debe pasar un período de cinco años de silencio. Los pitagóricos no poseen nada individualmente: todos sus bienes se ponen en común. Para reconocerse entre ellos, emplean diferentes símbolos como la *tetraktys* o el pentagrama con forma de estrella de cinco puntas. Por otra parte, los pitagóricos se consideran personas iluminadas y estiman normal que les corresponda ejercer el poder político. Se opondrán firmemente a las rebeliones de las ciudades que rechazan su autoridad. De hecho, Pitágoras hallará la muerte durante uno de estos disturbios a sus ochenta y cinco años.

El número de leyendas de toda índole inventadas en torno a Pitágoras es asimismo impresionante. Resulta fácil constatar que a sus discípulos no les faltaba imaginación. Según ellos, Pitágoras sería el hijo del dios Apolo. El nombre de Pitágoras significa de hecho, literalmente, «el que ha sido anunciado por la Pitonisa»: la Pitonisa de Delfos era, en efecto, el oráculo del templo de Apolo, y es quien habría anunciado a los padres de Pitágoras el próximo nacimiento de su vástago. Según el oráculo, Pitágoras debía convertirse en el más hermoso y sabio de los hombres. Con semejante nacimiento, el sabio griego estaba predestinado para las grandes hazañas. Pitágoras recordaba todas sus vidas anteriores. Entre otras cosas, había sido uno de los héroes de la guerra de Troya bajo el nombre de Euforbo. En su juventud, Pitágoras participó en los Juegos Olímpicos y ganó todas las pruebas de pugilato (predecesor de nuestro boxeo). Pitágoras es el inventor de las primeras escalas musicales. Pitágoras es capaz de caminar por los aires. Pitágoras murió y resucitó. Pitágoras posee talentos de adivino y sanador. Pitágoras domina a los animales. Pitágoras tiene un muslo de oro.

Si la mayor parte de estas leyendas son suficientemente disparatadas para no concederles crédito, en otros casos, en cambio, es difícil pronunciarse. Por ejemplo, ¿es cierto que Pitágoras fue el primero que utilizó la palabra *matemáticas*? Los hechos son tan inciertos que algunos historiadores han llegado incluso a aventurar la hipótesis de que Pitágoras habría sido un personaje puramente ficticio, imaginado por los pitagóricos para servirles de figura tutelar.

Dado que no podemos aprender más sobre el hombre, volvamos a aquello que hará que siga siendo conocido por todos los colegiales del mundo más de dos mil quinientos años después de su muerte: ¡el teorema de Pitágoras! ¿Qué nos dice este famoso teorema? Su enunciado puede antojarse sorprendente, pues establece un vínculo entre dos nociones matemáticas que no parecen guardar relación alguna: los triángulos rectángulos y los números cuadrados.

Retomemos nuestro triángulo rectángulo preferido, el 3-4-5. A partir de las longitudes de sus tres lados, es posible construir tres números cuadrados: 9, 16 y 25.



Cabe advertir una extraña coincidencia: 9 + 16 = 25. La suma de los cuadrados de los lados 3 y 4 es igual al cuadrado del lado 5. Podríamos creer que se trata de una casualidad y, sin embargo, si intentamos reproducir este cálculo con otro triángulo rectángulo, sigue funcionando. Tomemos, por ejemplo, el triángulo 65-72-97 que encontramos en la tablilla babilónica Plimpton. Los tres números cuadrados correspondientes son 4225, 5184 y 9409. Y la regla no falla: 4225 + 5184 = 9409. Con estos grandes números, resulta difícil creer en una simple coincidencia.

Puedes probar con todos los triángulos rectángulos que quieras, pequeños o grandes, finos o anchos, ¡siempre funciona! En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo recto es siempre igual al cuadrado del tercer lado (que se llama hipotenusa). Y esto funciona también en el otro sentido: si, en un triángulo, la suma de los cuadrados de los dos lados más pequeños es igual al cuadrado del más grande, entonces se trata de un triángulo rectángulo. ¡He aquí el teorema de Pitágoras!

Por supuesto, no sabemos de veras si Pitágoras o sus discípulos contribuyeron realmente a descubrir este teorema. Aunque los babilonios no lo hayan formulado jamás de la forma general que acabamos de ver, es probable que conocieran ya este resultado más de dos mil años antes. Sin él, ¿cómo habrían podido descubrir con tal precisión todos los triángulos rectángulos que figuran en la tablilla Plimpton? Probablemente los egipcios y los chinos también conocían el teorema. De hecho, este se enunciará con claridad en los comentarios que se añadirán a *Los nueve capítulos* en los siglos posteriores a su redacción.

Según algunas versiones, Pitágoras habría sido el primero en ofrecer una demostración del teorema. No obstante, ninguna fuente fiable permite confirmarlo, y la demostración más antigua que ha llegado hasta nosotros solo aparecerá en los *Elementos* de Euclides, tres siglos más tarde.

Capítulo 5
Un poco de método

La cuestión de la prueba va a ser uno de los principales campos de trabajo de las matemáticas griegas. No podía validarse ni un solo teorema si no iba acompañado de una demostración, es decir, de un razonamiento lógico preciso que estableciera de manera definitiva su veracidad. Hay que decir que, sin el cortafuegos que representan las demostraciones, los resultados matemáticos pueden reservar algunas sorpresas desagradables. Algunos métodos, aunque reconocidos y ampliamente utilizados, no siempre funcionan tan bien.

Recordemos la construcción del papiro de Rhind o de Ahmes para dibujar un cuadrado y un disco de la misma área. Pues bien, es falsa. Cierto es que no por mucho, pero es falsa. Cuando medimos con precisión las superficies, difieren en torno a un 0,5 %. Para los agrimensores y otros geómetras del terreno, este grado de precisión es más que suficiente, pero, para los matemáticos teóricos, resulta inadmisible. El propio Pitágoras se dejó atrapar por hipótesis falsas. Su más célebre error concierne a las longitudes conmensurables. Él pensaba que, en geometría, dos longitudes son siempre conmensurables, es decir, que es posible hallar una unidad suficientemente pequeña que permita medirlas simultáneamente. Imagina una línea de 9 centímetros y otra de 13,7. Los griegos no conocían los números decimales, solo medían las longitudes con números enteros. Así pues, para ellos, la segunda línea no es medible en centímetros. Pero esto no supone ningún problema: basta en este caso con coger una unidad diez veces menor para decir que las dos líneas miden respectivamente 90 y 137 milímetros. Pitágoras estaba convencido de que dos líneas cualesquiera, de cualquier longitud, eran siempre conmensurables, en tanto se encontrase la unidad de medida adecuada.

Sin embargo, esta convicción fue desmentida por un pitagórico llamado Hípaso de Metaponto. Este descubrió que, en un cuadrado, el lado y la diagonal son inconmensurables. Cualquiera que sea la unidad de medida escogida, no es posible medir a la vez el lado del cuadrado y su diagonal con números enteros. Hípaso ofreció una demostración lógica que no dejaba ningún resquicio de duda al respecto. Pitágoras y sus discípulos se enojaron tanto que Hípaso fue excluido de la escuela. ¡Cuentan incluso que este descubrimiento le valió que sus condiscípulos lo llevasen al mar y lo arrojasen por la borda!

Para los matemáticos, estas anécdotas resultan aterradoras. ¿Podemos llegar a tener certeza de algo? ¿Hay que vivir con el temor permanente de que cada descubrimiento matemático se desplome algún día? ¿Y el triángulo 3-4-5? ¿Estamos seguros de que es rectángulo? ¿No corremos el riesgo de descubrir un buen día que el ángulo que parecía hasta entonces perfectamente recto solo lo es de manera aproximada?

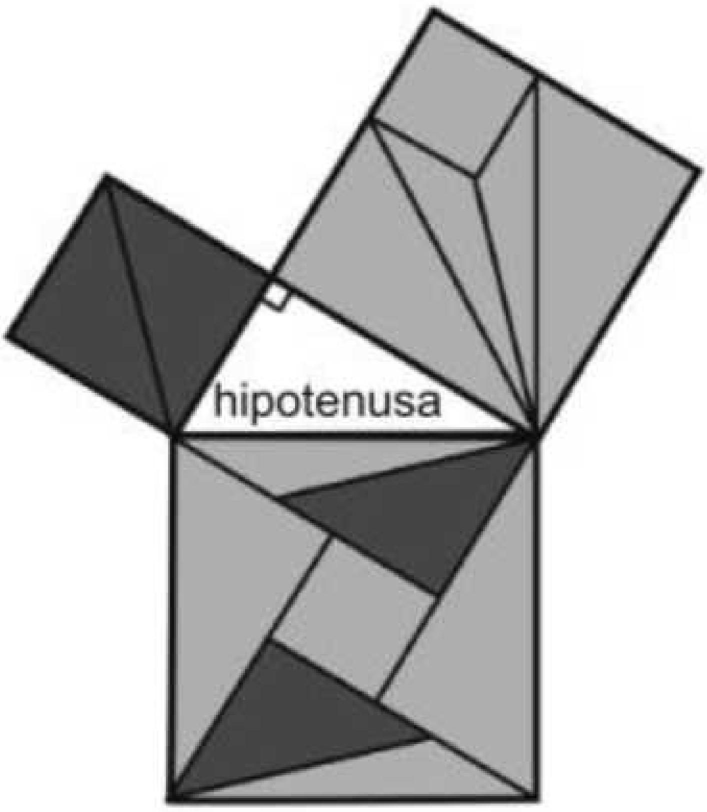
Todavía hoy, no es raro que los matemáticos sean víctimas de intuiciones engañosas. Por ese motivo, prosiguiendo la búsqueda de rigor de sus homólogos griegos, nuestros matemáticos se esmeran en distinguir entre los enunciados demostrativos que denominan «teoremas» y aquellos que creen verdaderos, pero para los cuales no disponen todavía de prueba, que llaman «conjeturas».

Una de las más célebres conjeturas de nuestra época se conoce como la hipótesis de Riemann. Son numerosos los matemáticos que confían lo suficiente en la veracidad de esta hipótesis no demostrada como para integrarla en la base de sus investigaciones. Si esta conjetura llega a ser algún día un teorema, todos sus trabajos quedarán validados. Ahora bien, si alguna vez es desmentida, se derrumbarían con ella vidas enteras dedicadas a la investigación. Nuestros científicos del siglo XIX son, sin duda, más razonables que sus predecesores griegos, pero resulta comprensible que, en estas condiciones, el matemático que anunciara la falsedad de la hipótesis de Riemann podría provocar en algunos de sus colegas unas ganas enormes de estrangularlo.

Para escapar de esta angustia permanente del mentís, los matemáticos necesitan demostraciones. No, jamás descubriremos que el 3-4-5 no es un triángulo rectángulo. Lo es con toda seguridad. Y esta certeza dimana del hecho de que el teorema de Pitágoras cuenta con una demostración. Todo triángulo en el que la suma de los cuadrados de dos lados es igual al cuadrado del tercero es un triángulo rectángulo. Sin duda, este enunciado no era más que una conjetura para los mesopotámicos. Con los griegos, se ha convertido en un teorema. ¡Menos mal!

¿En qué consiste entonces una demostración? El teorema de Pitágoras no es solo el más célebre de los teoremas, sino también uno de los que cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes. Se conocen varias decenas. Algunas de ellas se descubrieron de manera independiente en civilizaciones que nunca habían oído hablar de Euclides ni de Pitágoras. Tal es el caso de las demostraciones que aparecen en los comentarios de *Los nueve capítulos* chinos. Otras son obra de matemáticos a quienes les constaba que el teorema ya se había probado, pero que, como un reto o para dejar su huella personal, se divertían estableciendo nuevas pruebas. Entre estos últimos figuran algunos nombres célebres como el del inventor italiano Leonardo da Vinci o el del vigésimo presidente de Estados Unidos, James Abram Garfield.

Uno de los principios que hallamos en varias de estas demostraciones es el del puzle: si dos figuras geométricas pueden formarse con las mismas piezas, entonces tienen la misma superficie. Observa este despiece imaginado por el matemático chino del siglo III Liu Hui.



Los dos cuadrados construidos sobre los dos lados del ángulo recto del triángulo rectángulo central están compuestos por dos y cinco piezas respectivamente. Estas mismas siete piezas son las que componen el cuadrado construido sobre la hipotenusa. La superficie del cuadrado de la hipotenusa es, pues, igual a la suma de las superficies de los dos cuadrados más pequeños. Y, como la superficie de un cuadrado es igual al número cuadrado asociado a la longitud de su lado, queda patente que el teorema de Pitágoras es cierto.

Prescindiremos aquí de los detalles, pero, para que la demostración sea completa, sin duda conviene mostrar que todas las piezas son rigurosamente idénticas y que semejante despiece funciona para todos los triángulos rectángulos.

Resumamos nuestra cadena de deducciones. ¿Por qué es el 3-4-5 un triángulo rectángulo? Porque confirma el teorema de Pitágoras. ¿Y por qué es verdadero el teorema de Pitágoras? Porque el despiece de Liu Hui muestra que el cuadrado de la hipotenusa está formado por las mismas piezas que los dos cuadrados de los lados del ángulo recto. Esto se parece al juego del «¿por qué?» que tanto gusta a los niños. El problema es que este juego tiene el enojoso defecto de no terminar nunca. Sea cual sea la respuesta aportada a una pregunta, siempre cabe cuestionar de nuevo dicha contestación. ¿Por qué? Sí, ¿por qué?

Regresemos a nuestro puzle: hemos afirmado que, si dos figuras se forman con las mismas piezas, tendrán la misma superficie. Pero ¿hemos demostrado que este principio es siempre verdadero? ¿No podríamos hallar piezas de puzle cuya superficie varíe en función de la forma de ensamblarlas? Esta idea parece absurda, ¿verdad? Tan absurda que sería un disparate intentar demostrarla. Sin embargo, acabamos de reconocer la importancia de demostrarlo todo en matemáticas. ¿Acaso vamos a renunciar a nuestros principios solo unos instantes después de haberlos adoptado?

La situación es grave. Tanto que, aunque llegáramos a explicar por qué es verdadero el principio del puzle, todavía tendríamos que justificar los razonamientos que utilizáramos para tal fin.

Los matemáticos griegos eran muy conscientes de este problema. Para hacer una demostración, es preciso comenzar por algún sitio. Ahora bien, la primera frase de todo libro de matemáticas no puede haber sido demostrada, precisamente porque es la primera. Toda construcción matemática debe comenzar por admitir un cierto número de evidencias previas. Evidencias que constituirán los fundamentos de todas las deducciones subsiguientes y que, por tanto, es preciso escoger con sumo cuidado.

A estas evidencias los matemáticos les dan el nombre de *axiomas*. Los axiomas son enunciados matemáticos como pueden ser los teoremas y las conjeturas, pero, a diferencia de estos, carecen de demostración y no pretenden tenerla. Se admiten como verdaderos.

Los *Elementos*, escritos en el siglo III antes de nuestra era por Euclides, forman un conjunto de trece libros que tratan principalmente de geometría y de aritmética.

No sabemos gran cosa de Euclides, y las fuentes que hablan de él son mucho más escasas que las referidas a Tales o a Pitágoras. Es posible que viviera por Alejandría. Otros, como ya ocurriera en el caso de Pitágoras, han aventurado la posibilidad de que no fuera un hombre, sino la denominación de un colectivo de sabios. Esto es poco probable.

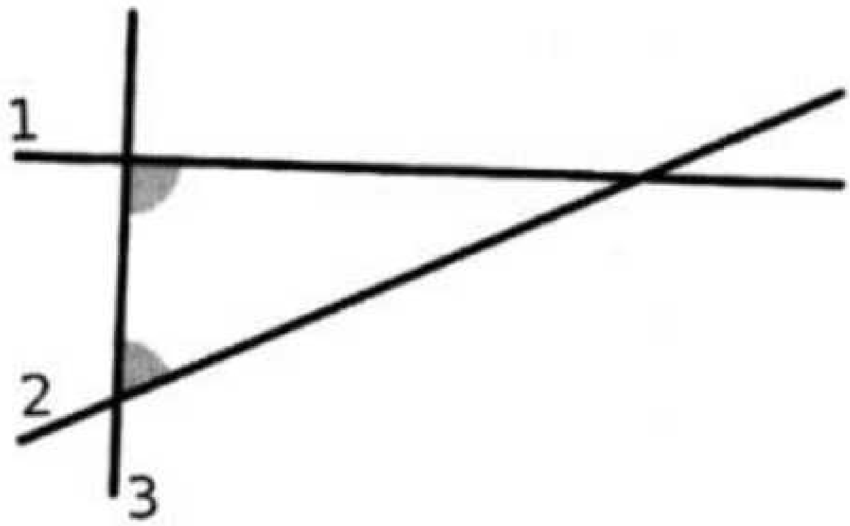
A pesar de las escasas informaciones que tenemos sobre él, Euclides nos ha dejado, con los *Elementos,* una obra monumental. Esta obra está considerada unánimemente como uno de los textos más importantes de la historia de las matemáticas por haber sido la primera en adoptar un enfoque axiomático. La construcción de los *Elementos* es asombrosamente moderna, y su estructura, muy semejante a la que siguen utilizando los matemáticos de nuestra época. A finales del siglo XV, los *Elementos* figurarán entre los primeros libros impresos con las nuevas prensas de Gutenberg. La obra de Euclides sería en la actualidad el segundo texto que más ediciones ha conocido en la historia, solo por detrás de la Biblia.

En el primer libro de los *Elementos* que trata de geometría plana, Euclides formula los cinco axiomas siguientes:

1. Se puede trazar un segmento de recta que una dos puntos cualesquiera.
2. Un segmento de recta se puede prolongar indefinidamente por los dos lados.
3. Dado un segmento, es posible trazar un círculo cuyo radio sea dicho segmento y cuyo centro sea uno de los extremos del segmento.
4. Todos los ángulos rectos se pueden superponer.
5. Si dos líneas rectas son secantes respecto a una tercera, de modo que la suma de los ángulos interiores de un lado sea inferior a dos ángulos rectos, entonces estas dos líneas son secantes por dicho lado.[6]

De aquí se siguen multitud de teoremas impecablemente demostrados. Para cada uno de ellos, Euclides no utiliza nada más que sus cinco axiomas o los resultados que ha establecido previamente. El último teorema del primer libro es un viejo conocido, pues se trata del teorema de Pitágoras.

Después de Euclides, numerosos matemáticos se interesaron por la cuestión de la elección de los axiomas. Muchos se sintieron especialmente intrigados y perturbados por el quinto. Este último axioma es, en efecto, mucho menos elemental que los otros cuatro. En ocasiones será sustituido por otro enunciado más simple, pero que permita llegar a las mismas conclusiones: «Por un punto, puede trazarse una y solo una recta paralela a una recta dada». Los debates sobre la elección del quinto axioma perduraron hasta el siglo XIX, cuando desembocaron en la creación de nuevos modelos geométricos en los que este axioma resulta falso.



La enunciación de los axiomas plantea otro problema: el de las definiciones. ¿Qué significan todos estos términos empleados: puntos, segmentos, ángulos o círculos? Como sucede con las demostraciones, la cuestión de las definiciones es interminable. La primera definición formulada tendrá que expresarse con palabras que no se habrán definido con anterioridad.

En los *Elementos*, las definiciones preceden a los axiomas. La primera frase del primer libro es la definición del punto.

El punto es aquello que no tiene partes.

¡Compóntelas como puedas! Lo que quiere decir Euclides con esta definición es que el punto es la figura geométrica más pequeña posible. Resulta imposible hacer puzles con un punto, pues es indivisible, no tiene partes. En 1632, en una de las primeras ediciones francesas de los *Elementos*, el matemático Denis Henrion da un poco de cuerpo a la definición en sus comentarios precisando que el punto no tiene ni longitud ni anchura ni grosor.

Estas definiciones negativas nos dejan escépticos. ¡Decir lo que no es el punto no es decir realmente lo que es! Y, sin embargo, a ver quién es el listo que propone algo mejor. En algunos manuales escolares de principios del siglo XX, hallábamos a veces la siguiente definición: «el punto es el rastro dejado por un lápiz finamente afilado al apoyarlo en una hoja de papel». ¡Finamente afilado! Esta vez hablamos de algo concreto. Ahora bien, esta definición habría indignado a Euclides, Pitágoras y Tales, que se habían esmerado en hacer de las figuras geométricas objetos abstractos e idealizados. Ningún lápiz, por muy finamente afilado que esté, podría dejar un rastro que careciese de veras de longitud, anchura y grosor.

En resumidas cuentas, nadie sabe decir lo que es un punto en realidad, pero todo el mundo está más o menos convencido de que la idea es lo bastante simple y clara como para no generar ambigüedad. Todos estamos más o menos seguros de que hablamos de lo mismo cuando empleamos la palabra *punto*.

Sobre este acto de fe en las primeras definiciones y en los axiomas se edificará toda la geometría. Y, a falta de algo mejor, sobre este mismo modelo acabarán construyéndose todas las matemáticas modernas.

Definiciones - axiomas - teoremas - demostraciones: el camino trazado por Euclides determina lo que será la rutina de los matemáticos que vendrán tras de él. No obstante, a medida que se estructuran y se amplían las teorías, en los zapatos de los matemáticos se van a meter nuevos granos de arena: las paradojas.

Una paradoja es algo que debería funcionar, pero que no funciona. Es una contradicción aparentemente irresoluble. Un razonamiento que parece perfectamente justo y que desemboca, no obstante, en un resultado completamente absurdo. Imagínate que estableces una lista de axiomas que te parecen incontestables y que, sin embargo, deduces de ellos teoremas que se revelan manifiestamente falsos. ¡Menuda pesadilla!

Una de las paradojas más célebres se atribuye a Eubúlides de Mileto, y se refiere a las palabras pronunciadas por el poeta Epiménides. Este habría declarado un día: «Los cretenses son unos mentirosos». ¡El problema es que el propio Epiménides era cretense! Por consiguiente, si lo que dice es verdadero, entonces es un mentiroso… y, por tanto, lo que dice es falso. Y si, por el contrario, su frase es falsa, entonces miente y la frase dice la verdad. Posteriormente se inventarán diversas variantes de la misma paradoja, la más simple de las cuales consiste simplemente en que una persona declara: «Estoy mintiendo».

La paradoja del mentiroso pone en tela de juicio una idea preconcebida, según la cual toda frase ha de ser o bien verdadera o bien falsa. No existe una tercera posibilidad. En matemáticas, esto se designa como el principio del tercero excluido o tercio excluso. A primera vista, resultaría muy tentador hacer de este principio un axioma. No obstante, la paradoja del mentiroso nos pone en guardia: la situación es más compleja. Si un enunciado viene a afirmar su propia falsedad, entonces no puede ser lógicamente verdadero ni falso.

Esta curiosidad no impedirá que la mayoría de los matemáticos hasta nuestros días consideren verdadero el tercio excluso. Después de todo, la paradoja del mentiroso no es realmente un enunciado matemático, y podría considerarse más bien una incoherencia lingüística antes que una contradicción lógica. Sin embargo, más de dos mil años después de Eubúlides, los lógicos descubrieron que este tipo de paradojas pueden aparecer igualmente en el seno de las más rigurosas teorías, lo cual provocó una profunda conmoción en las matemáticas.

El griego Zenón de Elea, que vivió en el siglo V a. C., también dominó el arte de crear paradojas. Se le atribuyen cerca de una decena. Una de las más célebres es la de Aquiles y la tortuga.

Imagina que se celebra una carrera entre Aquiles, que es un extraordinario atleta, y una tortuga. Para equilibrar las posibilidades, se concede una cierta ventaja a la tortuga; por ejemplo, cien metros. Pese a esta ventaja, parece evidente que Aquiles, que corre mucho más rápido que la tortuga, acabará por alcanzarla antes o después. No obstante, Zenón afirma lo contrario.

Estudiemos la carrera en varias etapas, nos dice. Para poder alcanzar a la tortuga, Aquiles debe recorrer al menos los cien metros que lo separan de ella. En el tiempo en que él recorre esos cien metros, la tortuga también habrá avanzado un poco, por lo que a Aquiles todavía le queda un poco de camino por recorrer para darle alcance. Pero, cuando haya recorrido ese camino, la tortuga habrá avanzado un poco más. Por tanto, Aquiles todavía ha de correr un trecho, al cabo del cual la tortuga habrá avanzado un poco de nuevo.

En resumen, cada vez que Aquiles alcanza el punto previamente ocupado por la tortuga, esta ha avanzado un poco y no es alcanzada aún. Y esto sigue siendo cierto con independencia del número de etapas que consideremos. Por consiguiente, Aquiles parece condenado a aproximarse cada vez más a la tortuga sin poder adelantarla jamás.

Absurdo, ¿verdad? Basta con realizar la experiencia para constatar que el corredor acabará por adelantar efectivamente a la tortuga. Y, sin embargo, el razonamiento parece sostenerse, y resulta difícil detectar un error lógico.

Los matemáticos tardarán mucho tiempo en comprender esta paradoja que juega hábilmente con el infinito. Si los corredores van en línea recta, su trayectoria puede asimilarse a lo que Euclides denomina un segmento. Un segmento posee una longitud finita, pese a estar compuesta por infinitos puntos, todos los cuales tienen una longitud igual a cero. Así pues, tenemos en cierta manera lo infinito en lo finito. La paradoja de Zenón divide el intervalo de tiempo que va a emplear Aquiles en alcanzar a la tortuga en una infinidad de intervalos cada vez más pequeños. Esta infinidad de etapas discurren, no obstante, en un tiempo finito y ello no impide en absoluto que Aquiles alcance a la tortuga, una vez transcurrido dicho tiempo.

La noción de infinito en matemáticas será, sin duda, la principal fuente de paradojas, pero también la cuna de las teorías más fascinantes.

A lo largo de la historia, los matemáticos van a mantener una relación ambigua con las paradojas. Por una parte, estas representan su mayor peligro. Basta con que una teoría arroje un día una paradoja para que se desplomen todos los teoremas que habíamos creído edificar sobre sus axiomas. Pero, por otra parte, ¡qué extraordinarios desafíos! Las paradojas son una fuente muy prolífica y apasionante de cuestionamiento. Si se descubre una paradoja, es que se nos ha escapado algo. Es que hemos entendido mal una noción, hemos enunciado mal una definición o hemos escogido mal un axioma. Es que hemos considerado evidente algo que no lo era tanto. Las paradojas son una invitación a la aventura. Una invitación a reconsiderar hasta nuestras más íntimas evidencias. ¿Cuántas nuevas ideas y originales teorías habríamos dejado pasar si las paradojas no hubieran estado ahí para empujarnos hacia ellas?

Las paradojas de Zenón inspirarán nuevas concepciones del infinito y de la medida. La paradoja del mentiroso llevará a los lógicos a una indagación cada vez más profunda de las nociones de verdad y de demostrabilidad. Todavía hoy, numerosos investigadores analizan minuciosamente matemáticas que ya se encontraban en germen en las paradojas de los sabios griegos.

En 1924, los matemáticos Stefan Banach y Alfred Tarski descubrieron una paradoja que hoy lleva su nombre y que pone en tela de juicio el principio mismo de los puzles. Por evidente que pueda parecer, este principio puede revelarse cuestionable. Banach y Tarski fueron capaces de describir un puzle en tres dimensiones cuyo volumen varía en función de cómo se encajen las piezas. Volveremos sobre ello. Ahora bien, las piezas que imaginaron son tan extrañas e irregulares que no tienen nada que ver con las figuras geométricas que manejaban los geómetras griegos. Podemos estar tranquilos: el principio de los puzles sigue siendo válido siempre que las piezas tengan forma de triángulos, cuadrados u otras figuras clásicas. La prueba de Liu Hui del teorema de Pitágoras resiste todavía.

¡Pero que esto nos sirva de lección! Desconfiemos de las evidencias y dejémonos maravillar y sorprender por los misterios de este mundo matemático que los sabios griegos han abierto para nosotros.

Capítulo 6

En busca de π

El 14 de marzo de 2015, acudo al Palacio de los Descubrimientos. ¡Hoy es un día de fiesta!

A principios de la década de 1930, el físico y premio Nobel francés Jean Perrin concibe un proyecto de centro científico destinado a despertar el interés del gran público por los avances de la investigación en todos los campos de la ciencia. El Palacio de los Descubrimientos se inaugura en 1937, a dos pasos de los Campos Elíseos, y ocupa toda el ala oeste del Gran Palacio, con una superficie de 25 000 metros cuadrados. Las exposiciones, que solo debían durar seis meses, alcanzan tal éxito que, a partir de 1938, lo temporal se transforma en permanente. Ochenta años después de su apertura, el establecimiento continúa acogiendo año tras año a varios centenares de miles de visitantes.

Al salir del metro, subo por la avenida Franklin-Roosevelt hacia la entrada del Palacio. Llego a la escalinata, donde un detalle atrae mi atención: 4, 2, 0, 1, 9, 8, 9. Una extraña procesión de cifras impresas ondea en el suelo, sube las escaleras y parece deslizarse hasta el interior del edificio. ¡Esto no es habitual! La última vez que pasé por aquí, estas cifras no estaban. Las sigo: 1, 3, 0, 0, 1, 9. Entro al Palacio. Ahí siguen: 1, 7, 1, 2, 2, 6. Atraviesan la rotonda central y se lanzan hacia la gran escalera, 7, 6, 6, 9, 1, 4. Subo los peldaños de cuatro en cuatro, paso por delante de la entrada del planetario y giro hacia la izquierda, 5, 0, 2, 4, 4, 5. Las cifras me conducen directamente a la sección de matemáticas. Las veo enrollarse, dejar el suelo y subir por la pared, 5, 1, 8, 7, 0, 7. Por fin llegan hasta su fuente. Estoy en el corazón de una gran sala circular, las cifras rojas y negras han crecido, se arremolinan elevándose cada vez más. Por fin, mis ojos captan el inicio de la serie: 3, 1, 4, 1, 5… Me encuentro en el corazón de uno de los lugares emblemáticos del Palacio de los Descubrimientos: la sala π.

El número π es sin duda la más célebre y fascinante de las constantes matemáticas. La forma circular de la sala me recuerda que su valor se halla íntimamente ligado a la geometría del círculo: se trata del número por el cual hay que multiplicar el diámetro de un círculo para hallar su perímetro. La letra π (se lee «pi») es, por cierto, la decimosexta del alfabeto griego, la equivalente a nuestra «p» y la inicial de la palabra *perímetro*. El número π no es muy grande, apenas un poco más de 3, pero su desarrollo decimal es infinito: 3,14159265358979…

Habitualmente, los visitantes pueden ver enrollarse por las paredes redondeadas de la sala π los 704 primeros decimales del número. Pero hoy las cifras han salido, invaden todo el Palacio y se exhiben hasta en la calle. Ahora hay más de mil decimales. Hay que decir que se trata de una fecha histórica. ¡El 14 de marzo de 2015 es el día de π en nuestro siglo!

La primera edición del «π Day» se lanzó el 14 de marzo de 1988 en el Exploratorium, el primo estadounidense del Palacio de los Descubrimientos, situado en pleno corazón de San Francisco. El decimocuarto día del tercer mes, es decir, el 3/14 (en la notación estadounidense, el mes precede al día), era una fecha sumamente indicada para celebrar π, cuya aproximación habitual con dos decimales es 3,14. Desde entonces, la iniciativa ha hallado eco y numerosos entusiastas de todo el mundo se reúnen todos los años para festejar la constante y, a través de ella, todas las matemáticas. La fiesta adquirió tales dimensiones que, en 2009, el «π Day» fue oficialmente reconocido por la Cámara de Representantes de Estados Unidos.

En este año 2015, los fans de π aguardaban su día con más impaciencia todavía. Hoy es 3/14/15, con lo que se añaden dos cifras a la coincidencia de la fecha y de la constante. Esta edición ha de ser grandiosa. En esta ocasión, todo el equipo de matemáticas del Palacio de los Descubrimientos se encuentra en su puesto. También yo he acudido por ese motivo. Varias personas dotadas para las matemáticas hemos venido a echar una mano en una jornada rica en experiencias matemáticas.

Si el número π se reveló en geometría, enseguida se propagó por la mayor parte de las ramas de las matemáticas. Es un número con múltiples caras. En aritmética, en álgebra, en análisis, en probabilidad, raros son los matemáticos de cualquier disciplina que nunca hayan tenido que lidiar con π. En pleno corazón del Palacio de los Descubrimientos, la rotonda rebosa de animaciones que presentan sus múltiples facetas. Aquí se invita a los visitantes a contar agujas tiradas aleatoriamente a un entarimado, allí observan la proporción de los números que aparecen en las tablas de multiplicar. En el suelo, unos niños cubren la superficie de un disco con tablillas de madera. Otro grupo se dedica a estudiar la trayectoria de un punto fijo de una rueda que gira sobre un plano. Y todos acaban llegando al mismo resultado: 3,1415.

Un poco más lejos, un programa propone a los visitantes buscar la primera aparición de su fecha de nacimiento en la serie de decimales. Lo intenta un joven que nació el 25 de septiembre de 1994. El resultado no se hace esperar mucho: la secuencia 25091994 aparece en el número π a partir del 12.785.022º decimal. Los matemáticos han conjeturado que todas las secuencias de cifras, por largas que sean, aparecen en algún momento en los decimales de π. Las simulaciones informáticas parecen confirmarlo: hasta el momento se han hallado todas las secuencias investigadas. Sin embargo, nadie ha sabido ofrecer todavía la demostración incontestable de que siempre sucederá lo mismo.

Se me acerca una niña de unos doce años. Parece intrigada por los curiosos instrumentos que nos rodean y me lanza una mirada inquisitiva.

—Te preguntas qué es todo esto, ¿verdad? ¿Has oído hablar del número π?

—¡Oh, sí! —exclama—. Es 3,14. Bueno, no. Es casi 3,14… Lo hemos visto en clase. Es para calcular el perímetro de un círculo. También hemos aprendido la poesía.

—¿La poesía?

Entorna los ojos como para hurgar en su memoria y comienza a recitar:

Que j’aime a faire apprendre ce nombre utile aux sages
Inmortel Archiméde, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton probléme eut de pareils avantages.

Sonrío al escuchar esta canción infantil que yo también aprendí cuando tenía su edad. La había olvidado. Su mecanismo es particularmente ingenioso: para reconstruir el número x, basta con contar el número de letras de cada palabra. «Que» = 3; «j» = 1; «aime» = 4; y así sucesivamente. El poema conoce numerosas variantes en diferentes idiomas[7]. Una de las versiones más célebres, en inglés, es una adaptación de un poema de Edgar Allan Poe que permite hallar 740 decimales[8].

—¡Bravo! —te felicito—. Creo que yo no la habría recordado tan bien. Pero acabas de hablar de Arquímedes en tu poema. ¿Sabes quién es?

La he puesto en un aprieto. Frunce el ceño y se encoge de hombros. Necesitamos un viaje de repaso. Despliego un gran círculo articulado que se descompone en multitud de triángulos ensamblados. Volamos a Sicilia. Hace dos mil trescientos años, en la antigua ciudad de Siracusa. Allí nos espera Arquímedes.

Las cigarras cantan bajo un sol de plomo. Las calles están repletas de perfumes procedentes de las cuatro esquinas del Mediterráneo. Aceitunas, pescados o uvas se mezclan en los puestos de los vendedores. Al norte de la ciudad, la imponente silueta del Etna se recorta en el horizonte. Al oeste, las fértiles llanuras aseguran la prosperidad de la colonia, mientras que, al este, el doble puerto se abre al mar. Siracusa ha forjado su renombre y su poder imponiéndose como una de las encrucijadas marítimas más importantes de la región. Fundada cinco siglos atrás por colonos griegos de Corinto, la ciudad es una de las más florecientes del Mediterráneo.

Allí nace, el año 287 a. C., un hombre cuyo genio e inventiva van a inaugurar un nuevo estilo de matemáticas. Arquímedes es del temple de los grandes inventores, de los solucionadores de problemas, de las personas capaces de tener ideas decididamente nuevas y revolucionarias. A él le debemos el principio de la palanca así como el del tornillo. Fue él quien, según la leyenda, lanzó su famoso «¡eureka!» cuando estaba en la bañera; en su mente acababa de surgir el principio físico que hoy lleva su nombre: todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba de una intensidad igual al peso del fluido desalojado. Es así como los objetos más ligeros que el agua flotan, en tanto que los más pesados se hunden. Se cuenta asimismo que, un día en que Siracusa se hallaba asediada por la flota romana, Arquímedes inventó un sistema de espejos que permitió concentrar los rayos de sol para incendiar las naves enemigas que se aproximaban.

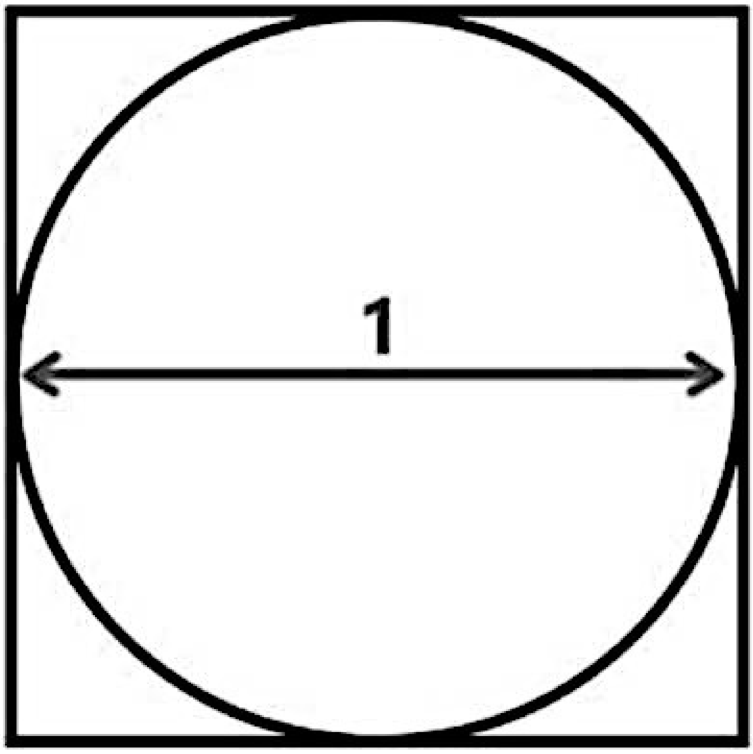
En matemáticas, a Arquímedes le debemos los primeros grandes avances tras la pista del número π. Otros antes que él se habían interesado por el círculo, pero sus planteamientos carecían a menudo de rigor. Recordemos *Los nueve capítulos* chinos: en ellos se atravesaban campos circulares de 10 bu de diámetro y una circunferencia de 30 bu. Estos datos vienen a afirmar que el número π es igual a 3. En el papiro de Ahmes, la resolución aproximada de la cuadratura del círculo equivale a atribuir a π un valor aproximado de 3,16.

Arquímedes comprende que es difícil, incluso imposible, calcular un valor exacto de π. También él habrá de contentarse con aproximaciones, pero su enfoque se distingue en dos aspectos. En primer lugar, allí donde sus predecesores pensaban disponer tal vez de un método exacto, el sabio siciliano es perfectamente consciente de que los valores son solo aproximados. En segundo lugar, va a estimar la diferencia entre sus aproximaciones y el auténtico valor de π, para desarrollar a continuación métodos que permitan reducir cada vez más esta diferencia.

A fuerza de cálculos, acaba por concluir que el valor que busca está comprendido entre dos números que, expresados en nuestro sistema decimal actual, valen entre 3,1408 y 3,1428. En resumidas cuentas, Arquímedes conoce en lo sucesivo el número π con una aproximación de 0,03 %.

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES

Para calcular su encuadramiento de π, Arquímedes se aproximó al círculo mediante polígonos regulares. Tomemos, por ejemplo, un círculo cuyo diámetro mide una unidad y cuyo perímetro mide, por tanto, π unidades, y encerrémoslo en un cuadrado.

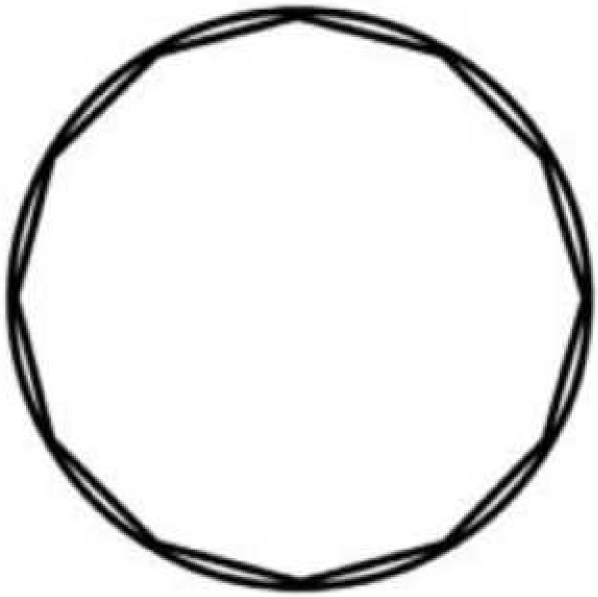


El cuadrado tiene un lado igual a 1 (como el diámetro del círculo) y, por consiguiente, un perímetro igual a 4. Como el perímetro del círculo es menor que el del cuadrado, de ello se deduce que π es menor que 4.

Inscribamos ahora un hexágono en el círculo, de este modo:

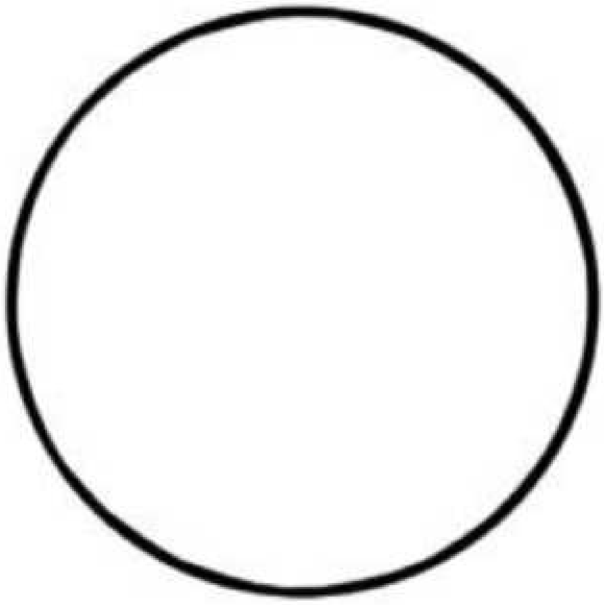
El hexágono está compuesto por seis triángulos equiláteros cuyos lados miden 0,5 unidades (la mitad del diámetro del círculo). El perímetro del hexágono mide, pues, 6 x 0,5 = 3. Concluimos entonces que π es mayor que 3.

Nada emocionante hasta el momento, pues el encuadramiento entre 3 y 4 sigue siendo muy impreciso. Para estrechar el marco, conviene aumentar ahora el número de lados de los polígonos. Si dividimos por dos cada lado del hexágono, obtenemos una figura de 12 lados que se acerca mucho más al círculo.



Después de algunos cálculos engorrosos (basados principalmente en el teorema de Pitágoras), llegamos a la conclusión de que el perímetro del dodecágono mide en torno a 3,11. El número π es, pues, mayor que este valor.

Para obtener su encuadramiento con una aproximación de 0,001, Arquímedes repitió simplemente esta operación tres veces más. Dividiendo por dos cada uno de los lados, se obtienen 24 y luego 48, para llegar por fin a un polígono de 96 lados.



¿No ves el polígono? Es normal, los lados están tan pegados al círculo que se vuelve casi imposible distinguirlos a simple vista. Así es como Arquímedes llegó a la conclusión de que π es mayor que 3,1408. Y, recomenzando este procedimiento con polígonos exteriores al círculo, obtuvo que π es menor que 3,1428.

El poder del método de Arquímedes no radica únicamente en su resultado, sino asimismo en su posibilidad de prolongarse. Bastaría con continuar subdividiendo nuestros polígonos para afinar cada vez más nuestro encuadramiento. En teoría, es posible obtener una aproximación al número π tan precisa como se desee, siempre que se tenga el valor de afrontar los cálculos.

En el año 212 a. C., las tropas romanas lograron entrar finalmente en Siracusa. El general Marco Claudio Marcelo, que dirigió el sitio de la ciudad, ordenó a sus soldados perdonar la vida a Arquímedes, que a la sazón contaba setenta y cinco años. No obstante, mientras caía su ciudad, el sabio griego se hallaba absorto en el estudio de un problema de geometría y no se daba cuenta de nada. Cuando un soldado romano pasó a su lado, Arquímedes, que había dibujado sus figuras en el suelo, le espetó distraídamente: «¡Cuidado con mis círculos!». El soldado se ofendió y lo atravesó con su espada.

El general Marcelo le hizo una tumba sublime coronada con una esfera inscrita en un cilindro, como ilustración de uno de sus teoremas más notables. En el transcurso de los siete siglos siguientes, el Imperio romano no engendrará jamás un matemático de su talla.

La Antigüedad terminará tibiamente en lo que atañe a las matemáticas. El Imperio romano se extiende pronto por todo el contorno mediterráneo y la identidad griega se diluirá en esta nueva cultura. No obstante, una ciudad continuará manteniendo vivo durante algunos siglos el espíritu de los matemáticos griegos: Alejandría.

En el transcurso de sus conquistas, Alejandro Magno se apodera de Egipto a finales del año 332 a. C. Solo faltan unos meses para que sea proclamado faraón en Menfis y decida la fundación de una nueva ciudad en la costa mediterránea. Alejandro nunca verá la ciudad a la que dio su nombre. Al morir ocho años más tarde en Babilonia, su reino se divide entre sus diferentes generales y Egipto pasa a manos de Ptolomeo I, que va a hacer de Alejandría su capital. Bajo su reinado, la ciudad de Alejandro se convertirá en una de las urbes más florecientes de la cuenca mediterránea.

Ptolomeo prosigue los grandes trabajos iniciados por Alejandro. En el extremo de la isla de Faros, frente a la ciudad, lanza la construcción de un faro monumental. Los autores griegos no tardarán en reconocer en el faro de Alejandría un monumento absolutamente excepcional, y en convertirlo en el séptimo y último miembro de la exclusiva lista de las Maravillas del mundo.

Detengámonos unos instantes para disfrutar del excepcional panorama que se ofrece a los ojos del viajero, que ha tenido el coraje de subir los centenares de peldaños de la escalera de caracol que conduce a su cima. Mira al norte. El mar Mediterráneo se extiende hasta el horizonte. Desde aquí, puedes ver llegar los barcos mercantes a más de cincuenta kilómetros. Uno de ellos pasa ante ti y penetra en el puerto con el vientre cargado de mercancías. Tal vez venga de Atenas, de Siracusa o incluso de Massalia, esa dinámica ciudad del sur de las Galias que un día llamaremos Marsella. Si diriges ahora tu mirada hacia el sur, lo que se ofrece a tu vista es el delta del Nilo. A cinco kilómetros de ahí, percibirás una extensión de agua salada que atraviesa el delta: es el lago Mareotis. Entre el lago y el mar, en esta ancha banda de tierra, la ciudad de Alejandría despliega sus esplendores. Es una ciudad nueva y moderna. Aquí o allá, todavía puedes ver algunas obras en curso.

En esta pequeña isla, el edificio del faro no está solo: lo acompaña el templo de Isis. Para dirigirse hasta allí, los alejandrinos han de recorrer el heptastadio, un dique de 1300 metros de largo que separa el puerto en dos estanques independientes. Desde lo alto del faro, puedes percibir las minúsculas siluetas de los paseantes. Los que regresan al continente llegan al barrio real. En él se encuentran los palacios de Ptolomeo, el teatro o el templo de Poseidón. Un poco más al oeste, un prestigioso edificio atrae especialmente la atención. Se trata del Museion. A él nos dirigimos ahora.

Con este museo monumental, destinado a preservar el legado de la cultura griega, Ptolomeo quiere hacer de Alejandría un gran centro cultural capaz de rivalizar con Atenas. Pone los medios para ello, mimando a los sabios que residen en el Museion, ofreciéndoles alojamiento, sustento y un salario para que lleven a cabo sus trabajos. También pone a su disposición una gigantesca biblioteca. ¡La legendaria biblioteca de Alejandría! Quizás en mayor medida aún que los grandes científicos que allí trabajaron, esta biblioteca dará celebridad y prestigio al Museion.

Para llenarla, la estrategia de Ptolomeo es simple: todas las naves que hacen escala en Alejandría han de entregar los libros que transportan. Los libros se copian y la copia se devuelve a la embarcación. Por su parte, el original se incorporaba a las colecciones de la biblioteca. Más tarde, Ptolomeo II, hijo y sucesor del primero, hará un llamamiento a los reyes del mundo para que le envíen ejemplares de las obras más famosas de su región. En sus inicios, la biblioteca de Alejandría contaba ya con cerca de 400 000 volúmenes. Llegará a alcanzar los 700 000.

El plan de Ptolomeo va a funcionar de maravilla y, durante más de siete siglos, se sucederán los sabios en Alejandría, cuyo ambiente intelectual va a preservar la vitalidad ausente en el resto del mundo mediterráneo.

Entre los más célebres residentes del Museion figura Eratóstenes de Cirene que, como recordarás, fue el primero en medir con precisión la circunferencia de la Tierra. También fue allí donde Euclides redactó la mayor parte de sus *Elementos*. Un tal Diofanto escribió allí un famoso libro sobre las ecuaciones que recibirán en lo sucesivo su nombre. En el siglo II de nuestra era, Claudio Ptolomeo (que nada tiene que ver con el primero) escribió en Alejandría el *Almagesto*, una obra que reunía un buen número de conocimientos de astronomía y matemáticas de su época. Aunque Ptolomeo haga girar el Sol alrededor de la Tierra, el *Almagesto* continuará siendo una referencia hasta la llegada de Copérnico en el siglo XVI.

Alejandría no solo cuenta con sabios que escriben o producen nuevos conocimientos. En torno al Museion se formó todo un ecosistema de copistas, traductores, comentaristas de obras y editores. La ciudad está repleta de todos estos personajes.

Por desgracia, en el siglo IV, llegan tiempos revueltos. El 16 de junio de 391, el emperador Teodosio I, deseoso de acelerar la conversión del Imperio a la religión cristiana, promulga un edicto que prohíbe todos los cultos paganos. Pese a no ser verdaderamente un templo, el Museion se ve afectado por la decisión del emperador y se cierra de inmediato.

En esta época, una de las figuras del círculo intelectual de Alejandría se llama Hipatia. Su padre, Teón, es el director del Museion en el momento de su cierre, el cual no impide que los sabios de la ciudad prosigan sus trabajos durante algún tiempo. Sócrates Escolástico escribirá más tarde que un número casi infinito de personas acudían en masa para oír hablar a Hipatia, que superaba por su ciencia a todos los hombres de su tiempo. Hipatia era matemática a la par que filósofa. Ella es, asimismo, la primera mujer de nuestra historia.

¿La primera? En realidad no. Otras mujeres se habían dedicado a las matemáticas antes de Hipatia, sin que sus obras ni su biografía hayan llegado hasta nosotros. Se admitía especialmente a las mujeres en la escuela de Pitágoras. Conocemos los nombres de varias de ellas, como Teano, Autocáridas o Habroteleia, pero es preciso decir que no sabemos prácticamente nada de ellas.

No conservamos ningún texto escrito por Hipatia, pero varias fuentes mencionan sus trabajos. Se interesó principalmente por la aritmética, la geometría y la astronomía. Prolongó entre otras cosas los trabajos realizados unos siglos antes por Diofanto y Ptolomeo. Hipatia es también una prolífica inventora. Le debemos la invención del hidrómetro, que permite medir la densidad de un fluido sacando hábilmente provecho del principio de Arquímedes, así como un nuevo modelo de astrolabio que facilita las mediciones astronómicas.

Lamentablemente, su historia será breve. En 415, se atrae las iras de los cristianos de la ciudad, que la persiguen y acaban por asesinarla. Su cuerpo es descuartizado y luego quemado.

Tras el cierre del Museion y la muerte de Hipatia, la llama científica de Alejandría se extingue con rapidez. Apenas se salvarán las colecciones de la biblioteca. Incendios, saqueos, maremotos y terremotos sacudirán la ciudad y, aunque no sepamos con exactitud cuándo ni cómo desapareció la biblioteca de Alejandría, lo cierto es que, hacia el siglo VII, no quedaba nada de ella.

Se acaba una época. No obstante, la historia tiene muchas sendas tortuosas, y las matemáticas griegas no tardarán en hallar otros caminos para llegar hasta nuestros días.

Capítulo 7

Nada y menos que nada

Desde lo alto de sus 6714 metros de altitud, el monte Kailash, en el Tíbet, forma parte del círculo cerrado de las cumbres a las que jamás ha llegado el *Homo sapiens*. Su silueta redondeada, estriada de nieve sobre el gris del granito, sobresale con claridad por encima del paisaje recortado del oeste del Himalaya. Para los habitantes de la región, tanto hindúes como budistas, la montaña es sagrada y encierra sus mitos ancestrales y sus historias maravillosas. Incluso se dice que se trata del legendario monte Meru que, según los mitos locales, marca el centro del universo.

Aquí se esconde la fuente de uno de los siete ríos sagrados de la región: el Indo.

Al salir de las pendientes del monte Kailash, el Indo toma la dirección este, zigzaguea rápidamente a través de las montañas de Cachemira y luego comienza a descender lentamente hacia el sur. Allí atraviesa las llanuras del Punyab y del Sind en el actual Pakistán, antes de desembocar formando un delta en el mar Arábigo. El valle del Indo es fértil. En la Antigüedad, la región estaba cubierta de bosques frondosos y susurrantes. Allí conviven los elefantes asiáticos con los rinocerontes, los tigres de Bengala, un sinfín de monos y las serpientes a las que pronto intentarán hechizar con sus flautas los encantadores. A la vuelta de un sendero, casi esperaríamos toparnos con Mowgli, el protagonista de *El libro de la selva*, cuyas aventuras se desarrollan en estos parajes. Aquí es donde va a nacer una civilización original y discreta en la que las matemáticas desempeñarán un papel determinante a comienzos de la Edad Media.

Desde el tercer milenio antes de nuestra era, algunas ciudades importantes, como Mohenjo-Daro o Harappa, ven la luz alrededor del río. De lejos, estas ciudades construidas con ladrillos de barro se asemejan un poco a sus contemporáneas de Mesopotamia. En el segundo milenio comienza la época védica. La región se fragmenta en una multitud de pequeños reinos, que se multiplican hacia el este hasta las riberas del Ganges. El hinduismo nace y se desarrolla, y se redactan los primeros textos extensos en sánscrito. En el siglo IV antes de nuestra era, Alejandro Magno llega a las orillas del Indo, donde funda dos ciudades que recibirán el nombre de Alejandría, pero que no conocerán el prestigioso destino de su hermana egipcia. Una parte de la cultura griega se integra en la India. Luego llega la época de los grandes imperios. Los Maurya reinan sobre la práctica totalidad del subcontinente indio durante un poco más de un siglo. Tras ellos, una infinidad de dinastías se sucederán y coexistirán más o menos pacíficamente hasta la conquista musulmana del siglo VIII.

A lo largo de estos siglos, los indios hacen matemáticas de las que, por desgracia, no sabemos gran cosa. La razón de esta ignorancia es simple: sus sabios desarrollaron, desde los inicios de la época védica, una idea de transmisión oral de los conocimientos que prohíbe, en principio, plasmarlos por escrito. Los saberes deben aprenderse de viva voz, de generación en generación, de maestro a alumno. Los textos se aprenden de memoria, en forma de poemas o acompañados de trucos mnemotécnicos, luego recitados y repetidos tantas veces como sea preciso hasta dominarlos a la perfección. Hallamos aquí y allá algunas excepciones a la regla, fragmentos escritos que han llegado hasta nosotros, pero la cosecha es muy pobre.

¡Y, sin embargo, hacen matemáticas! ¿Cómo explicar si no la riqueza de los conceptos que nos revelarán cuando, hacia el siglo V, se decidan por fin a poner por escrito los saberes acumulados oralmente durante siglos? La India conocerá a partir de entonces una edad dorada científica, que no tardará en difundirse por el mundo entero.

Los sabios indios empiezan a escribir largos tratados que recuperan los conocimientos ancestrales, completados con sus propios descubrimientos. Entre los más famosos figuran Aryabhata, que se interesó por la astronomía y calculó muy buenas aproximaciones del número π; Varahamihira, que realizó nuevos avances en trigonometría; o Bhaskara, que fue el primero en escribir el cero con forma de círculo y en utilizar científicamente el sistema decimal que seguimos empleando en nuestros días. Y, sí, nuestras diez cifras, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que solemos llamar cifras árabes, son en realidad indias.

Ahora bien, si de todos los sabios indios de esta época hubiera que quedarse con uno, la historia elegiría sin duda a Brahmagupta, que vivió en el siglo VII y fue director del observatorio de Ujjain. En aquella época, la ciudad de Ujjain, situada en la orilla derecha del río Shipra, en el centro de la India actual, era uno de los mayores centros científicos del país. Su observatorio astronómico había adquirido fama y la ciudad ya era conocida por Claudio Ptolomeo en la época de esplendor de Alejandría.

En 628, Brahmagupta publica el *Brahmasphut asiddhánta*. En esta obra capital se encuentra la primera descripción completa del cero y de los números negativos, acompañada de sus propiedades aritméticas.

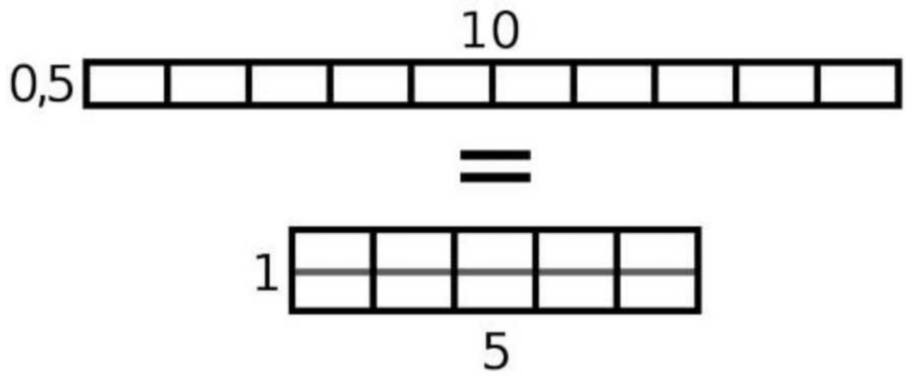
Hoy en día, el cero y los números negativos se han vuelto tan omnipresentes en nuestra vida cotidiana (para medir la temperatura, la altitud con respecto al nivel del mar o incluso el saldo de nuestra cuenta bancaria), que casi acabamos olvidando lo geniales que son estas ideas. Su invención fue un ejercicio de acrobacia intelectual poco común, que los sabios indios fueron los primeros en ejecutar a la perfección. Comprender este proceso, en todo lo que tiene de sutil y poderoso a la vez, es una delicia intelectual en la que debemos detenernos un poco, si queremos penetrar más profundamente en las grandes transformaciones que van a conocer las matemáticas en los siglos venideros.

Una de las preguntas que más me hacen cuando evoco en público mi gusto por las matemáticas es la de su origen. «¿Cómo empezaste a sentir esta afición cuando menos extraña?», me preguntan a veces. «¿Fue algún profesor en particular el que te transmitió su pasión? ¿Te gustaban ya las matemáticas de niño?». El origen de semejante vocación no deja de despertar la curiosidad de la gente que, hasta entonces, había permanecido hermética ante esta disciplina.

Para ser sincero, he de confesar que no tengo ni la menor idea. Hasta donde alcanzo a recordar, siempre me han gustado las matemáticas, sin que pueda identificar un acontecimiento especial de mi vida que me habría arrastrado por esta vía. No obstante, cuando hurgo más atentamente en mi memoria, me vienen ciertos recuerdos del estado de júbilo intelectual en el que podía sumergirme la súbita aparición de nuevas ideas en mi espíritu. Eso es lo que me sucedió en particular cuando descubrí una sorprendente propiedad de la multiplicación.

Tendría nueve o diez años cuando, al tocar un poco al azar las teclas de mi calculadora escolar, caí en un extraño resultado: 10 x 0,5 = 5. Multiplica el número 10 por 0,5 y obtendrás 5: eso es lo que osaba asegurar mi calculadora, en la que por aquel entonces tenía una confianza tan ciega como poco razonable. ¿Cómo era posible que, al multiplicar un número, obtuviera otro menor? ¿No se supone que la multiplicación aumenta la cantidad a la que se aplica? ¿No iba esto en contra del propio sentido de la palabra *multiplicar*? ¿No tendría que haberme mostrado mi querida calculadora un número superior a 10?

Tuve que reflexionar varias semanas sobre el asunto antes de llegar a aclarar mis ideas. El detonante final llegó el día en que pensaba en representar la multiplicación de forma geométrica, siguiendo sin saberlo los pasos de los pensadores antiguos. Coge un rectángulo que mida 10 unidades de largo y 0,5 de ancho. Su superficie es igual a la de 5 cuadraditos de 1 unidad de lado.



En otros términos, multiplicar por 0,5 equivale a dividir por 2. Y el mismo principio se aplica a otros muchos números. Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir por 4; multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir por 10, y así sucesivamente.

La explicación es convincente, pero en su conclusión persiste un aspecto desconcertante: la palabra «multiplicación» no significa exactamente lo mismo al aplicarla en matemáticas y en el lenguaje ordinario. En la vida cotidiana, ¿quién aseguraría haber multiplicado la superficie de su jardín tras haber vendido la mitad? ¿Quién afirmaría que su fortuna se ha multiplicado tras haber perdido el 50 % de ella? Según estos cálculos, la multiplicación de los panes se convierte en un milagro al alcance de todo el mundo: comemos la mitad y listo.

Cuando las descubrimos por vez primera, estas reflexiones cosquillean nuestro cerebro. Tienen algo deliciosamente molesto y resuenan en nuestro espíritu como un juego de palabras especialmente ingenioso. Tal es el efecto que produjeron estos curiosos descubrimientos en el niño que yo era.

Experimenté aún con más claridad esta sensación de extrañeza cuando, muchos años más tarde, leyendo un texto del matemático Henri Poincaré, «Ciencia y método», aparecido en 1908, me topé con la frase siguiente: «La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes».

Para ser justos, hemos de reconocer que esta frase puede aplicarse sin duda a cualquier lenguaje. La palabra *fruta* designa cosas tan diferentes como manzanas, cerezas o tomates. Cada una de estas palabras agrupa a su vez una multitud de variedades diferentes que harán aparecer categorías más sutiles, a poco que nos entreguemos a un análisis botánico suficientemente fino. No obstante, Poincaré subraya, con razón, que ningún otro lenguaje llega tan lejos como las matemáticas en este proceso de agrupación. Las matemáticas permiten establecer relaciones que ninguna otra lengua autoriza. Para los matemáticos, la multiplicación y la división no son sino una sola operación. Multiplicar por un número equivale a dividir por otro. Todo depende del punto de vista que se adopte.

Las invenciones del cero y de los números negativos proceden de la misma disposición de la mente. Para crearlos, es preciso atreverse a pensar contra la propia lengua. Hay que agrupar bajo una misma idea conceptos que el lenguaje trata de formas radicalmente diferentes. Los sabios indios fueron los primeros en seguir claramente esta senda.

Si te digo que ya he caminado un cierto número de veces por el planeta Marte o que he encontrado un cierto número de veces a Brahmagupta en persona, ¿me creerás? Probablemente no. Y con razón porque, en nuestro idioma, estas frases significan que ya he caminado efectivamente por Marte y he encontrado a Brahmagupta. Y, sin embargo, en matemáticas basta con imaginar que estos números valen cero para comprender que no he mentido. El lenguaje utiliza diferentes estructuras dependiendo de que algo sea o no sea el caso; afirmación: «He caminado por Marte»; negación: «No he caminado por Marte». Por su parte, las matemáticas eliminan estas diferencias para agruparlas en una sola fórmula: «He caminado un cierto número de veces por Marte». Este número puede ser cero.

Si, unos siglos antes, los griegos ya habían tenido dificultades para aceptar que el 1 era un número, imagínate la revolución que supone la atribución del nombre de *número* a una ausencia. Antes de los indios, algunos pueblos ya habían iniciado este pensamiento, pero nadie había sabido llevarlo hasta el final. Los mesopotámicos, a partir del siglo III a. C., ya habían sido los primeros en inventar una cifra 0. Hasta entonces, su sistema de numeración escribía de la misma manera números como 25 y 250. Gracias a la cifra 0, que designa un lugar vacío, ya no hay confusión posible. Sin embargo, los babilonios nunca concedieron a este 0 la categoría de número, de suerte que pudiese escribirse por sí solo para designar una ausencia completa de objetos.

En el otro extremo del mundo, los mayas habían inventado asimismo un cero. ¡Inventaron incluso dos! El primero, como el de los babilonios, se usaba simplemente como cifra para marcar un puesto vacío en su sistema posicional de base veinte. En cambio, el segundo puede considerarse efectivamente un número, pero solo se empleaba en el contexto de su calendario. Cada mes del calendario maya constaba de veinte días, numerados del 0 al 19. Aunque este cero se utiliza solo, su uso no es matemático. Los mayas nunca lo utilizaban para efectuar operaciones aritméticas.

En resumidas cuentas, Brahmagupta fue el primero en describir completamente el cero como número acompañado de una enumeración de sus propiedades: al restar un número cualquiera a él mismo, se obtiene cero; al sumar o sustraer cero a un número, este permanece invariable. Estas propiedades aritméticas nos parecen evidentes, pero el hecho de que Brahmagupta las enuncie con tanta claridad nos demuestra que el cero se ha integrado definitivamente como un número que goza de un estatus semejante al de todos los demás.

El cero abre la puerta a los números negativos. No obstante, los matemáticos tardarán mucho tiempo en adoptarlos de manera definitiva.

Los sabios chinos fueron los primeros en describir cantidades que podían equivaler a números negativos. En sus comentarios a *Los nueve capítulos*, Liu Hui describe un sistema de palillos de colores que permiten representar cantidades positivas o negativas. Un palillo rojo materializa un número positivo y un palillo negro, uno negativo. Liu Hui explica con detalle cómo interactúan estas dos especies de números y, en particular, cómo se suman o se sustraen.

Esta descripción es ya muy completa, pero le falta dar un paso decisivo: considerar los positivos y los negativos no como dos grupos distintos capaces de interactuar, sino como un conjunto único. Ciertamente, los números positivos y negativos no siempre tienen las mismas propiedades cuando se trata de hacer cálculos, pero tienen ante todo muchos puntos en común que permiten relacionarlos. La situación puede compararse a la de los números pares e impares, que forman dos clanes distintos con propiedades aritméticas diferentes, pero que pertenecen, sin embargo, a la misma gran familia de los números.

Como en el caso del cero, son los sabios indios los primeros en llevar a cabo esta reunificación. Y, una vez más, es Brahmagupta quien ofrece un estudio completo en el *Brahmasphut asiddhánta*. Siguiendo las huellas de Liu Hui, establece una lista completa de las reglas a las que están sometidas las operaciones con estos nuevos números. Entre otras, nos enseña que la suma de dos números negativos es negativa, por ejemplo (-3) + (-5) = -8; que el producto de un número positivo y un número negativo es negativo, (-3) x 8 = -24; o que el producto de dos números negativos es positivo, (-3) x (-8) = 24. Este último punto puede parecer contraintuitivo y será uno de los más difíciles de aceptar. Todavía hoy, es una trampa muy conocida de la que desconfían los escolares del mundo entero.

¿POR QUÉ MENOS POR MENOS ES IGUAL A MÁS?

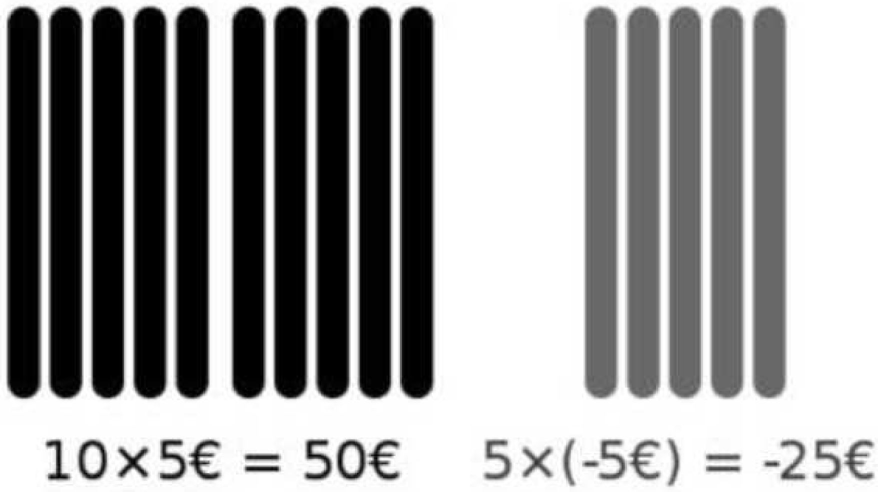
En los siglos que seguirán a su formulación por Brahmagupta, las reglas de la multiplicación de los signos, y en particular el «menos x menos = más», no van a dejar de provocar desconfianza e interrogantes.

Estos cuestionamientos trascendieron con creces el mundo de los matemáticos y suscitaron mucha incomprensión en cuanto empezaron a enseñarse en la escuela. En el siglo XIX, el escritor francés Stendhal expresaría su incomprensión en su novela autobiográfica *Vida de Henry Brulard*. El autor de *Rojo y negro* y de *La cartuja de Parma* escribía las siguientes líneas:

Para mí, la hipocresía era imposible en matemáticas y, con mi simplicidad juvenil, pensaba que sucedía otro tanto en todas las ciencias a las que había oído decir que se aplicaban. ¿Qué fue de mí cuando descubrí que nadie podía explicarme cómo era posible que menos por menos fuese más (- x - = +)? (Es una de las bases fundamentales de la ciencia llamada álgebra).

No es que no me explicasen esta dificultad (que sin duda es explicable, pues conduce a la verdad), sino que me la explicaban con razones evidentemente poco claras para quienes me las exponían. […] Tuve que conformarme con lo que hoy sigo diciéndome: es necesario que sea verdad que - por - es +, puesto que, evidentemente, empleando a cada instante esta regla en el cálculo, llegamos a resultados verdaderos e indudables.

La regla de multiplicación de los signos, ciertamente bastante extraña a primera vista, cobra sentido, no obstante, si se reconsidera con el sistema de palillos imaginado por los sabios chinos. Utilicemos, por ejemplo, este sistema para representar ganancias y pérdidas monetarias. Imaginemos que un palillo negro representa 5 € en tanto que un palillo gris representa una deuda de 5 €, es decir, -5 €. Así, si posees 10 palillos negros y 5 palillos grises, tu saldo asciende a 25 €.



Estudiemos ahora los diferentes casos que pueden presentarse al variar tu cuenta. Imagínate que te dan 4 palillos negros adicionales; tu saldo aumenta entonces en 20 €. Dicho de otro modo: 4 x 5 = 20. El producto de dos números positivos es claramente positivo; hasta aquí, todo en orden.

Si ahora te dan 4 palillos grises, es decir, cuatro deudas, tu saldo disminuye en 20 €. Dicho de otra forma: 4 x (-5) = -20. Un número positivo multiplicado por uno negativo da un número negativo. Y, del mismo modo, si te quitan 4 palillos negros, pierdes igualmente 20 €, lo cual equivale a decir que (-4) x 5 = -20. Estas dos últimas situaciones muestran con claridad que dar deudas a alguien produce el mismo efecto que quitarle dinero. Añadir una cantidad negativa equivale a sustraer una cantidad positiva.

Hemos llegado al punto crucial: ¿qué ocurre con tu saldo si te quitan 4 palillos grises? En otros términos, ¿qué sucede si te quitan deudas? La respuesta es evidente: tu saldo aumenta, es decir, ganas dinero. Esto equivale a decir que (-4) x (-5) = 20. ¡Quitar una cantidad negativa es lo mismo que añadir una cantidad positiva! Menos por menos es igual a más.

La llegada de los números negativos va a transformar asimismo el sentido de la adición y la sustracción. El problema es completamente similar al de la multiplicación por 0,5, que es una división por 2. Puesto que sumar un número negativo equivale a sustraer un número positivo, estas dos operaciones pierden el sentido que poseen en el lenguaje ordinario. Sumar suele ser sinónimo de aumentar. Ahora bien, si sumo el número - 3, esto equivale a restar 3; por ejemplo, 20 + (-3) = 17. Y, si sustraigo (-3), esto equivale a añadir 3: 20 - (-3) = 23. Una vez más, estamos dando el mismo nombre a cosas diferentes. Gracias a los números negativos, la adición y la sustracción se convierten en las dos caras de una misma operación.

Esta confusión de las palabras y las aparentes paradojas, como el «menos x menos = más», van a frenar considerablemente la adopción de los números negativos. Mucho tiempo después de Brahmagupta, numerosos sabios continuarán haciendo remilgos ante estos números tremendamente prácticos, pero tan difíciles de comprender. Algunos los llamarán «números absurdos» y solo se resignarán a utilizarlos en sus cálculos intermedios con la condición de que no aparezcan en el resultado final. Habrá que aguardar al siglo XIX, incluso al XX, para que su legitimidad sea plenamente aceptada y su uso definitivamente adoptado.

En 711, dos mil jinetes y camelleros venidos del oeste irrumpen en el valle del Indo. Se trata de las tropas de Muhamad bin Qasim, un joven comandante árabe que apenas contaba veinte años de edad. Mejor equipados y preparados, sus soldados van a derrotar al ejército de cincuenta mil hombres del rajá Dahir y a apoderarse de la región del Sind y del delta del río. Para las poblaciones locales, el acontecimiento resulta trágico: millares de soldados son decapitados y la región sufre abundantes saqueos.

No obstante, la llegada del joven Imperio árabe musulmán a las puertas de la India va a suponer una oportunidad para la difusión de las matemáticas indias. Los sabios árabes integrarán rápidamente sus descubrimientos en sus propios trabajos, y les conferirán una resonancia mundial cuyo eco murmura todavía en las matemáticas del siglo XXI.

Capítulo 8
La fuerza de los triángulos

En 762 nos hallamos de regreso en Mesopotamia, donde todo comenzara. Mientras que Babilonia ya no es más que un campo en ruinas, un centenar de kilómetros más al norte se emprenden trabajos extraordinarios. Es aquí, en la ribera derecha del Tigris, donde el califa abasí Almanzor ha decidido construir su nueva capital.

El Imperio árabe musulmán acaba de conocer un siglo de expansión fulgurante. Ciento treinta años antes, en 632, cuando Brahmagupta, a sus treinta y cuatro años, acababa de terminar la redacción del *BrShmasphut asiddhanta*, Mahoma moría en Medina. Tras él, los califas que se suceden van a encadenar las conquistas y a propagar el islam desde el sur de España hasta las orillas del Indo, pasando por África del Norte, Persia y Mesopotamia.

Almanzor reina sobre un califato de más de diez millones de kilómetros cuadrados. Trasladado a nuestros días, este territorio sería el segundo país más grande del mundo por detrás de Rusia, pero por delante de Canadá, Estados Unidos o China. Almanzor es un califa ilustrado. Para construir su capital, hace venir a los mejores arquitectos, artesanos y artistas del mundo árabe. Confía la elección del emplazamiento y la fecha de inicio de los trabajos a sus geógrafos y sus astrólogos.

Serán necesarios cuatro años y más de cien mil obreros para hacer salir de la tierra la ciudad con la que ha soñado. La ciudad tiene la particularidad de ser perfectamente redonda. Su doble muro de recintos circulares, con ocho kilómetros de circunferencia, está fortificado con 112 torres y abierto con cuatro puertas orientadas según las diagonales de los cuatro puntos cardinales. En el centro de la ciudad se encuentran los cuarteles, la mezquita y el palacio del califa, cuya cúpula verde, que culmina a cerca de cincuenta metros, resulta visible desde unos veinte kilómetros a la redonda.

En su fundación, la ciudad se llamará Madinat as-Salam, la Ciudad de la Paz. También se conocerá como Madinat al-Anwar, la ciudad de las Luces, o Asimat ad-Dunya, la capital del mundo. Sin embargo, es otro el nombre con el que entrará en la historia la ciudad de Almanzor: Bagdad.

La población de Bagdad alcanza rápidamente varios cientos de miles de habitantes. La ciudad se halla en la encrucijada de las grandes rutas comerciales y las calles son un hervidero de comerciantes venidos de las cuatro esquinas del mundo. Los puestos se cubren de seda, de oro y de marfil, el aire se llena de perfumes y de especias, en la ciudad resuenan historias lejanas. Es la época de *Las mil y una noches* y de las leyendas; de los sultanes, los visires y las princesas; también de las alfombras voladoras, los genios y las lámparas mágicas.

Almanzor y los califas que lo sucederán desean hacer de Bagdad una ciudad de primer orden en los ámbitos cultural y científico. Así pues, para hacer venir a los más grandes sabios, van a utilizar un cebo que ya demostrara su eficacia miles de años antes en Alejandría: una biblioteca. A finales del siglo VIII, el califa Harún al-Rashid comienza una colección de libros con la voluntad de preservar y dar vida a los conocimientos acumulados por los griegos, los mesopotámicos, los egipcios o los indios.

Se copian y se traducen al árabe numerosos libros. Las obras griegas que circulan todavía profusamente en los círculos intelectuales son las primeras que integran los sabios de Bagdad. En algunos años, ven la luz varias ediciones árabes de los *Elementos* de Euclides. Se traducen también varios tratados de Arquímedes, incluido el de la medida del círculo, el *Almagesto* de Ptolomeo y la *Aritmética* de Diofanto.

A principios del siglo IX, el matemático Muhamad al-Juarismi publica una importante obra, el *Libro de la suma y de la resta según el cálculo indio*, en el que expone el sistema de numeración decimal proveniente de la India. Gracias a él, las diez cifras, incluido el cero, se expandirán por todo el mundo árabe y, desde allí, se impondrán definitivamente en el mundo entero. En árabe, el cero se llama *zifr*, que significa «vacío». Al penetrar en Europa, esta palabra se desdoblará: por una parte pasará al italiano con la forma *zefiro*, de la que derivan el *zéro* francés y el *cero* español; por otra parte se convertirá en *cifra* en latín, de donde derivan la *chiffre* francesa y la *cifra* española. Los europeos, olvidando las raíces indias de estos diez símbolos, los llamarán entonces cifras árabes.

En 809, muere Harún al-Rashid y lo sustituye su hijo Al-Amin. Este no reinará por mucho tiempo, al ser destronado en 813 por su propio hermano, Al-Mamun.

Cuenta la leyenda que, una noche, Al-Mamun recibió en sueños la visita de Aristóteles. Este encuentro marcó profundamente al joven califa, que decidió dar un nuevo impulso a las investigaciones científicas y acoger cada vez más sabios en su ciudad. Así es como, en 832, la biblioteca de Bagdad creó una institución destinada a favorecer la conservación y el desarrollo de los saberes científicos. La institución recibió el nombre de Bayt al-Hikma, la Casa de la Sabiduría, cuyo funcionamiento recuerda curiosamente el del Museion de Alejandría.

El califa está profundamente implicado en su desarrollo. Interviene directamente ante las potencias extranjeras, como el Imperio bizantino, para que envíen a Bagdad sus obras raras a fin de que puedan ser copiadas y traducidas. Encarga a los sabios obras destinadas a su difusión por todo el califato. Incluso asiste a veces en persona a los debates científicos o filosóficos, organizados al menos una vez por semana en el Bayt alHikma.

Con el correr de los siglos, la Casa de la Sabiduría de Bagdad se propagará por todo el mundo árabe. Muchas otras ciudades se dotarán de bibliotecas y de instituciones destinadas a acoger a los sabios. Entre las más influyentes y activas figuran Córdoba en Andalucía, fundada en el siglo X, El Cairo en Egipto, en el siglo XI, o Fez en el actual Marruecos, en el siglo XIV.

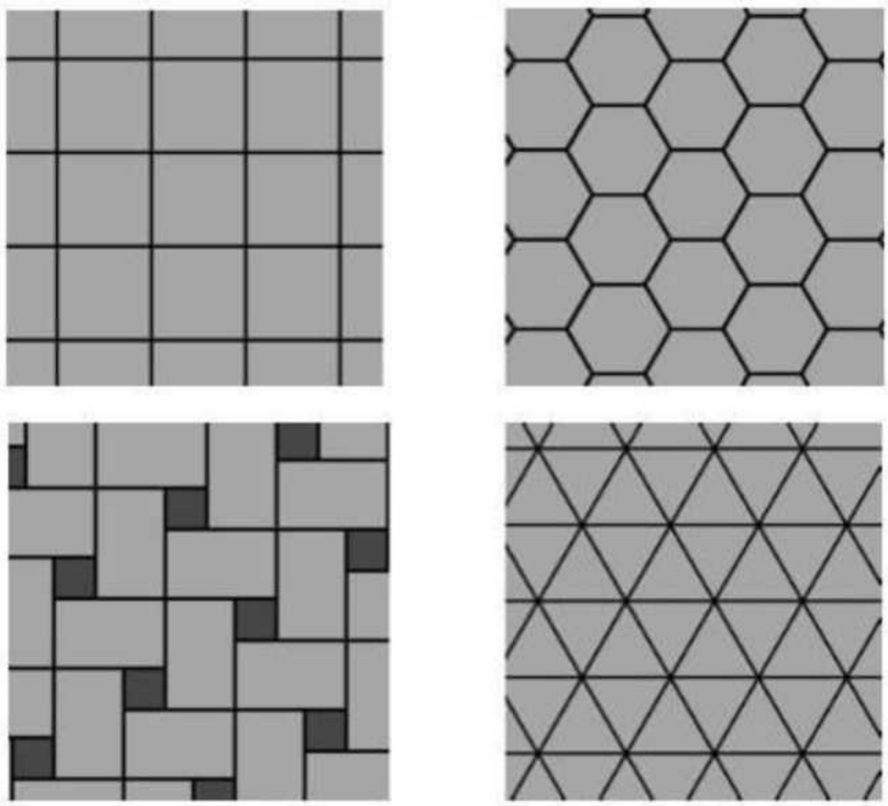
Es preciso decir que esta descentralización científica se verá facilitada en buena medida por una invención procedente de China y recuperada, casi por casualidad, en 751 durante la batalla de Talas en el actual Kazajistán: el papel. El papel facilita la copia y el transporte de los libros. A partir de entonces, ya no es necesario dirigirse a Bagdad para estar al corriente de los últimos descubrimientos en materia de matemáticas, de astronomía o de geografía. Grandes científicos podrán trabajar y producir obras innovadoras en cualquier parte del Imperio árabe musulmán.

LOS TESELADOS DE LA ALHAMBRA

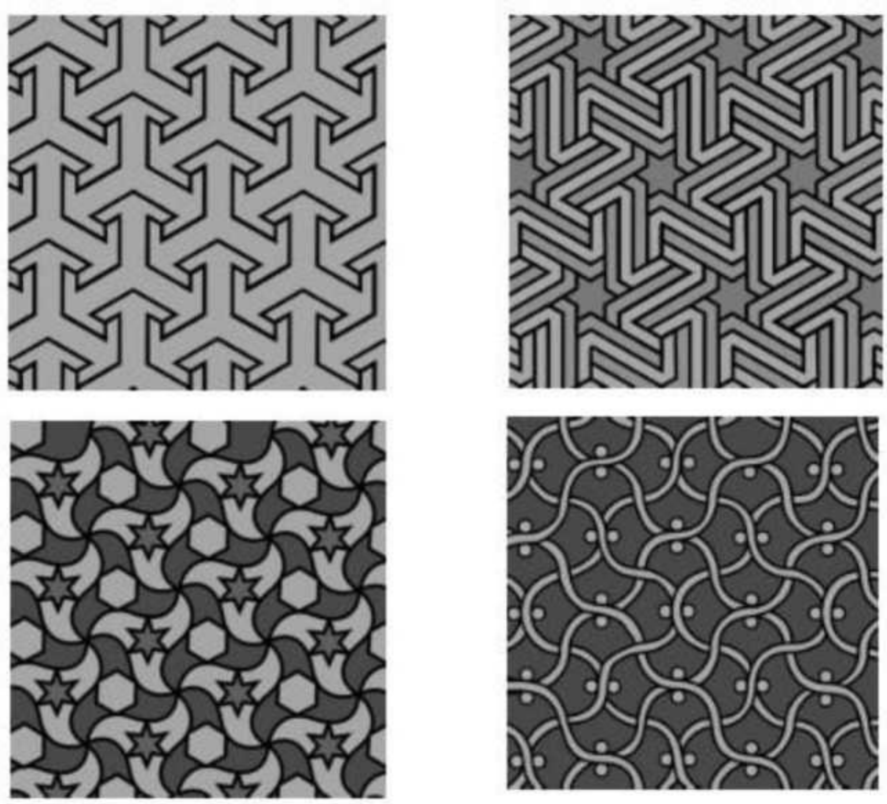
Mientras que, en el seno de los Bayt al-Hikma, los grandes espíritus escriben la historia de las matemáticas, en las calles de Bagdad y de las ciudades árabes otra historia sigue su curso. El islam prohíbe en principio la representación de seres humanos o de animales en las mezquitas o en otros lugares religiosos. Para paliar esta prohibición, los artistas musulmanes darán muestras de una creatividad pasmosa en la elaboración de motivos geométricos decorativos.

Recordemos a los primeros artesanos sedentarios de Mesopotamia, que imaginaban motivos para decorar su cerámica. Habían descubierto sin saberlo las siete categorías de cenefas posibles. Ahora bien, si una cenefa es una figura que se repite siguiendo una dirección, cabe imaginar asimismo que se repitan siguiendo dos direcciones, para cubrir superficies enteras. Es lo que se denomina teselados. Las calles de Bagdad y de las ciudades musulmanas se revestirán poco a poco de una resplandeciente geometría, que se convertirá en una de las marcas de fábrica del arte islámico.

Algunos teselados son bastante simples.



Otros son más complejos.



Más tarde, los matemáticos llegarán a demostrar que existen en total 17 categorías geométricas de teselados, clasificados en función de las transformaciones geométricas que los dejan invariables. Cada una de estas categorías puede dar lugar a una infinidad de variantes. Los artistas árabes, desconocedores de este teorema, descubrieron las 17 categorías y las mostraron magistralmente tanto en su arquitectura como en la ornamentación de objetos de arte o de la vida cotidiana.

En Granada, el palacio de la Alhambra es uno de los monumentos más destacados de la presencia islámica en España durante la Edad Media. Más de dos millones de turistas lo visitan cada año. Lo que pocos de ellos saben es que el palacio goza de una reputación muy particular entre los matemáticos. La Alhambra es conocida, en efecto, por albergar en su interior cada una de las 17 categorías de cenefas existentes diseminadas (y en ocasiones muy escondidas) por sus salas y sus jardines.

Por tanto, si pasas alguna vez por Granada, ya sabes qué tarea te espera.

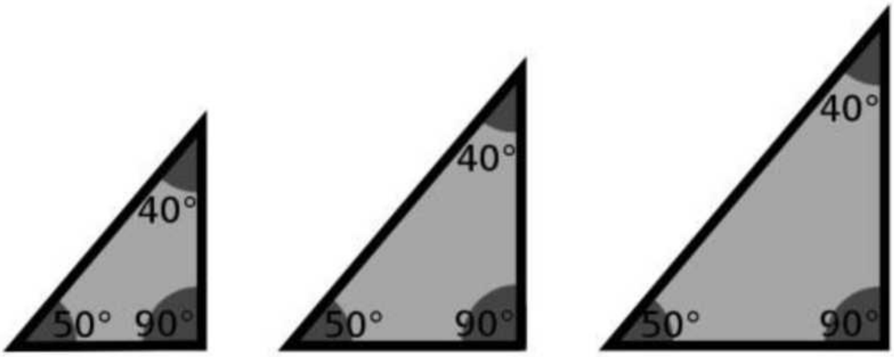
Permanezcamos por algún tiempo en Bagdad y atrevámonos a empujar las puertas del Bayt al-Hikma para observar lo que allí ocurre. ¿Qué nuevas matemáticas andan tramando estos matemáticos árabes? ¿De qué tratan estos libros recién escritos que se acumulan en las estanterías de la biblioteca?

Una de las disciplinas que más se desarrollará en este período es la trigonometría, es decir, el estudio de las medidas de los trígonos, también llamados triángulos. A primera vista, esto puede antojarse decepcionante: los pueblos antiguos ya estudiaban los triángulos, como lo atestigua el teorema de Pitágoras. Sin embargo, los árabes van a prolongar sus investigaciones hasta el punto de convertirlas en una disciplina de una extraordinaria precisión, cuyos resultados siguen teniendo múltiples aplicaciones en nuestros días.

En contra de lo que cabría creer, los triángulos no siempre son tan fáciles de comprender y, a finales de la Antigüedad, faltaba por aclarar muchos aspectos. Para conocer bien un triángulo, necesitamos básicamente seis informaciones al respecto: las longitudes de sus tres lados y las medidas de sus tres ángulos.

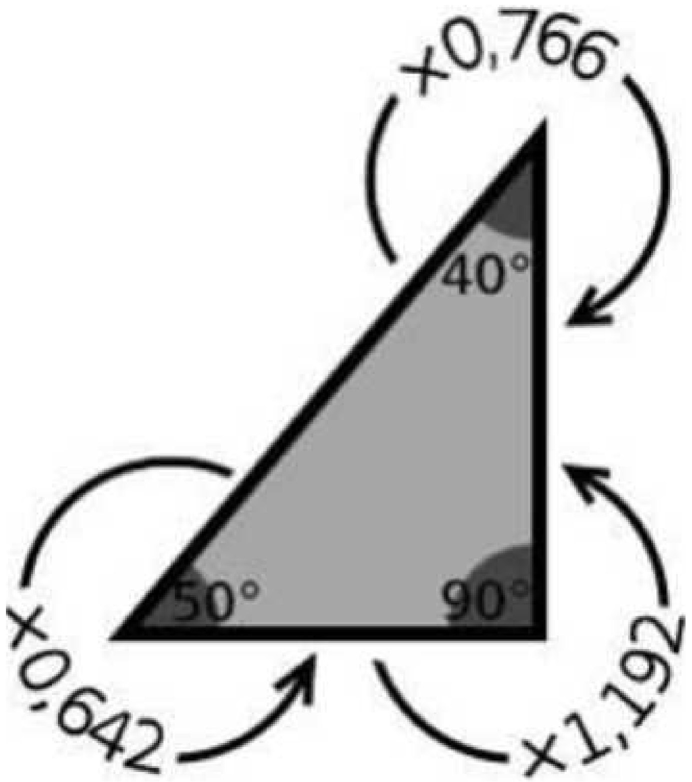
Pues bien, para utilizar la trigonometría sobre el terreno, a menudo resulta mucho más sencillo medir el ángulo entre dos direcciones que la distancia entre dos puntos. La astronomía constituye el ejemplo más notable. Conocer la distancia que separa las estrellas que observamos en el cielo nocturno es una cuestión muy difícil, cuya respuesta todavía se hará esperar varios siglos. En cambio, medir el ángulo que forman estas estrellas entre sí o sobre el horizonte resulta mucho más sencillo. Basta con un simple octante, antepasado del sextante. Análogamente, un geógrafo que desee trazar el mapa de un territorio podrá medir fácilmente los ángulos de un triángulo formado por tres montañas. Para ello solo necesita una alidada, que no es más que un transportador provisto de un sistema de mira. Y, para orientar el mapa en el espacio, una simple brújula le permitirá medir el ángulo entre el norte y una dirección dada. Medir la distancia entre las tres montañas exige en cambio organizar una expedición mucho más gravosa y efectuar cálculos mucho más complejos. Alejandro y sus bematistas no nos contradirán a este respecto.

El objetivo es, pues, el siguiente: ¿cómo hacer para conocer todos los datos relativos a un triángulo midiendo las mínimas distancias posibles? Al hacerse esta pregunta, los trigonómetras se verán enfrentados a un problema similar al planteado por el círculo de Arquímedes un milenio antes. En primer lugar, si conocemos todos los ángulos de un triángulo, pero ninguno de sus lados, podemos deducir su forma, pero no su tamaño. A título de ejemplo, todos los triángulos siguientes tienen los mismos ángulos, pero las longitudes de sus lados difieren.



Ahora bien, todos tienen las mismas proporciones. Por ejemplo, si nos preguntamos por qué número hay que multiplicar la longitud del lado mayor para obtener el menor, hallaremos el mismo resultado para cada uno de estos tres triángulos: 0,64. Algo parecido a lo que sucede con el perímetro de un círculo, que siempre se obtiene multiplicando su diámetro por π, sea cual sea su tamaño.

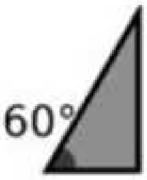
Bueno…, casi 0,64. Este número no es sino una aproximación. Como en el caso de π, esta proporción no puede calcularse con exactitud y habremos de contentarnos con valores aproximados. Un poco más de precisión nos daría 0,642 o incluso 0,64278, pero el cálculo sigue sin ser perfecto. La escritura decimal de este número posee una infinidad de cifras después de la coma. Otro tanto sucede con las restantes relaciones que pueden calcularse en estos triángulos. Así, pasamos del lado grande al mediano multiplicando por 0,766 aproximadamente, y del pequeño al mediano multiplicando por 1,192 aproximadamente.



Dado que resulta imposible atribuir a estas tres relaciones sus valores exactos, los matemáticos les han dado nombres con el fin de estudiarlas mejor. Según los lugares y las épocas, se utilizaron diversos términos, pero hoy los llamamos respectivamente «coseno», «seno» y «tangente». Se inventaron y se explotaron asimismo múltiples variantes antes de caer en el olvido. Un ejemplo lo tenemos en el seked que utilizaban los egipcios para evaluar la pendiente de sus pirámides. Y otro ejemplo es la cuerda, introducida por los griegos, correspondiente a una relación en un triángulo isósceles.

Ahora bien, las relaciones trigonométricas van a plantear un nuevo problema. Sus valores varían de un triángulo a otro. Así, las relaciones 0,642, 0,766 y 1,192 solo son válidas para los triángulos que poseen ángulos de 40°, 50° y 90°. Si observamos, en cambio, un triángulo rectángulo con ángulos de 20°, 70° y 90°, entonces su coseno, su seno y su tangente valdrán aproximadamente 0,342, 0,940 y 2,747. En resumidas cuentas, la tarea de los matemáticos trigonómetras es mucho más vasta de lo previsto. No se trata simplemente de hallar un número, ni siquiera tres, sino que será preciso calcular tablas enteras de números que varían en función de todos los ángulos posibles.

En la página siguiente se representa una tabla trigonométrica para triángulos rectángulos, uno de cuyos ángulos varía entre 10° y 80°. Obsérvese que, para cada triángulo, se da un solo ángulo. En efecto, no es preciso indicar los otros dos, que pueden calcularse sin dificultad: por una parte, el ángulo recto siempre mide 90° y, por otra, un teorema afirma que la suma de los tres ángulos de un triángulo siempre vale 180°, lo cual permite deducir el tercero. A decir verdad, ni siquiera es necesario dibujar los triángulos: el mero dato del ángulo es suficiente para reconstruirlos. Por eso la primera columna de las tablas trigonométricas solo suele indicar el ángulo. Así, diremos que el coseno de 10° es igual a 0,9848 o que la tangente de 50° vale 1,1918.

Triángulo	Coseno	Seno	Tangente
	0,9848	0,1736	0,1763
	0,9397	0,3420	0,3640
	0,8660	0,5	0,5774
	0,7660	0,6428	0,8391
	0,6428	0,7660	1,1918
	0,5	0,8660	1,7321
	0,3420	0,9397	2,7475
	0,1736	0,9848	5,6713

Por descontado, una tabla geométrica nunca está completa. Siempre es posible mejorarla, o bien hallando mejores aproximaciones de las relaciones existentes, o bien afinando el abanico de los triángulos representados. En el cuadro, los triángulos poseen ángulos que varían de 10° en 10°, pero sería preferible contar con una aproximación de un grado, incluso de una décima de grado. En resumen, el cálculo de tablas trigonométricas cada vez más precisas es una tarea sin fin a la que se consagrarán sucesivas generaciones de matemáticos. Habrá que aguardar la llegada de las calculadoras electrónicas a lo largo del siglo XX para liberarlos por fin de esta carga.

Los griegos fueron sin duda los primeros en elaborar tablas trigonométricas. Las más antiguas que han llegado hasta nosotros se encuentran en el *Almagesto* de Ptolomeo, quien las habría tomado prestadas de Hiparco de Nicea, un matemático del siglo II a. C. A finales del siglo V, el sabio indio Aryabhata publicó asimismo sus tablas de trigonometría. En la Edad Media, son los persas Omar Jayam en el siglo XI y Al-Kashi en el siglo XIV quienes elaborarán las tablas más célebres.

Los sabios del mundo árabe van a desempeñar un papel primordial, no solo por su contribución a la escritura de tablas más precisas, sino también y sobre todo por lo que van a hacer con ellas. Van a elevar a su cima el arte de hacer malabarismos con estos datos y emplearlos lo más eficazmente posible.

Así, Al-Kashi publica en 1427 una obra titulada *Miftah al-hisab*, o *La llave de la aritmética*, en la que enuncia un resultado que generaliza el teorema de Pitágoras. Gracias a una hábil utilización de los cosenos, Al-Kashi llega a formular un teorema que se aplica a absolutamente todos los triángulos y no solo a los rectángulos. El teorema de Al-Kashi funciona mediante la corrección del teorema de Pitágoras: cuando el triángulo no es rectángulo, la suma de los cuadrados de los dos primeros lados no es igual al cuadrado del tercero. Sin embargo, esta igualdad se vuelve verdadera a condición de añadir un factor de corrección, que se calcula directamente a partir del coseno del ángulo entre los dos primeros lados.

Cuando Al-Kashi publica este resultado, ya no es un desconocido en el mundo matemático. Se había dado a conocer tres años antes al calcular una aproximación del número π hasta el decimosexto decimal. ¡Todo un récord para la época! Pero, si los récords se establecen para ser batidos[9], los teoremas, en cambio, permanecen. El teorema de AlKashi sigue siendo uno de los resultados trigonométricos más utilizados en nuestros días.

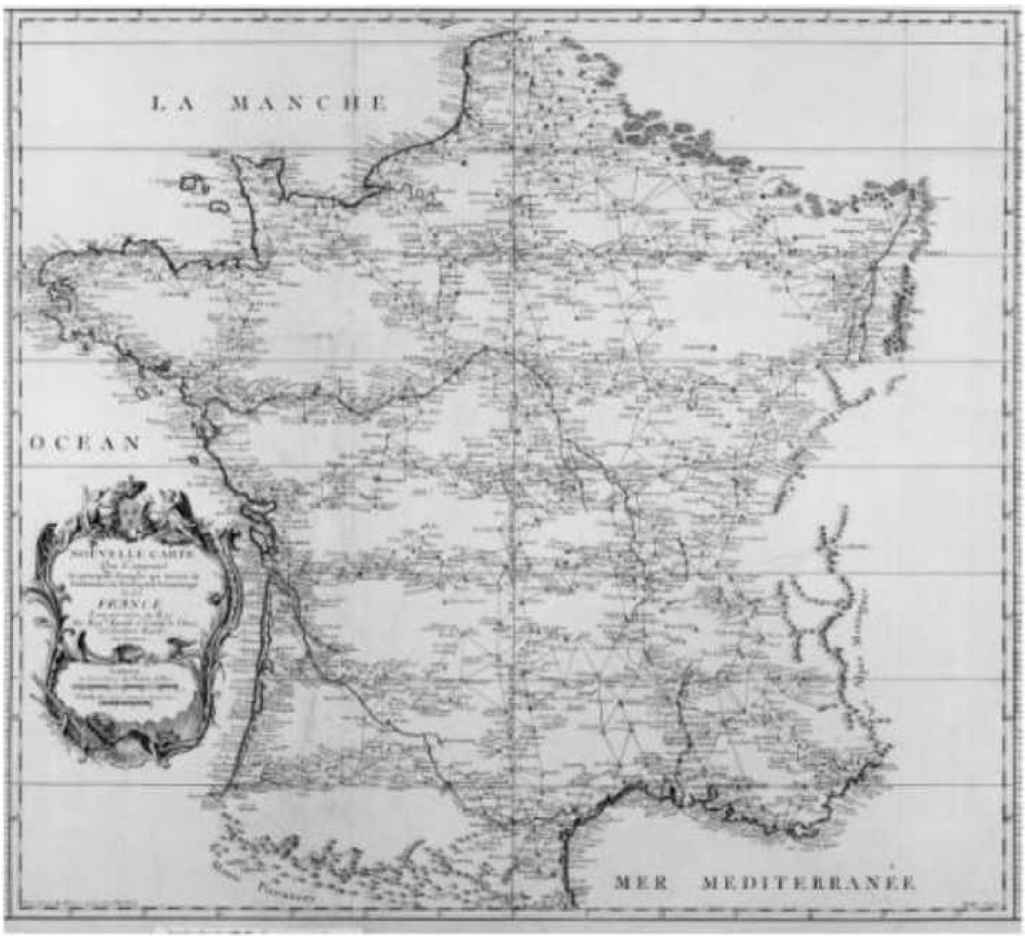
Margen izquierda de París. Estamos en el mes de junio y me he convertido en un guía turístico un poco particular. Este día, con un grupo de una veintena de personas, recorremos las calles del Barrio Latino siguiendo las huellas de los matemáticos y de su historia. Nuestra próxima parada está prevista en el jardín de los grandes exploradores. Al norte se aprecian los caminos simétricos del jardín de Luxemburgo, que escapan en gruesas filas hacia el palacio del Senado. Al sur, la cúpula del Observatorio de París infla su silueta redondeada por encima de los tejados de la capital.

Siguiendo el eje del jardín, caminamos como funambulistas sobre la línea exacta del meridiano de París. Un paso a la izquierda, estamos en el hemisferio este del mundo. Dos pasos a la derecha, entramos en el hemisferio oeste. Quinientos metros más allá, el meridiano atraviesa el corazón del Observatorio, pasa por el medio del distrito XIV y luego sale de París por el parque Montsouris. Continúa su curso a través de las campiñas francesas, corta un trozo de España y se lanza a través del continente africano y el océano Antártico, para acabar su carrera en el Polo Sur. Detrás de nosotros, sube por las calles de Montmartre, roza las islas británicas y Noruega hasta llegar al polo Norte.

Establecer el trazado preciso del meridiano no fue tarea fácil. Hubo que realizar planos de precisión de vastas extensiones. ¿Cómo hacer, por ejemplo, para medir la distancia entre dos puntos situados a ambos lados de una montaña, sin poder atravesarla? Para responder esta pregunta, los sabios de principios del siglo XVIII envolvieron el meridiano en una sucesión de triángulos virtuales que recorrían Francia de norte a sur.

Como puntos de anclaje de la triangulación, se escogieron lugares elevados, como colinas, montañas o campanarios, desde donde resulta posible apuntar a los otros puntos para medir los ángulos entre ellos. Una vez levantados los planos sobre el terreno, solo faltaba utilizar con profusión los procedimientos geométricos diseñados por los árabes para determinar la posición exacta de cada uno de los puntos de la triangulación y, a través de ellos, del meridiano.

Los Cassini fueron los primeros en consagrarse a esta tarea. La familia Cassini es una auténtica dinastía de científicos, hasta tal punto que es habitual numerarlos a la manera de los reyes. Giovanni Domenico, llamado Cassini I, recién emigrado de Italia, fue el primer director del Observatorio de París en su fundación en 1671. Su hijo Jacques, o Cassini II, lo sucedió a su muerte en 1712. Fueron ellos quienes efectuaron la primera triangulación del meridiano, concluida en 1718. Tras ellos, Cassini III (cuyo nombre era César-Frangois, hijo de Cassini II), hizo de su triangulación del meridiano la columna vertebral de la primera triangulación completa del territorio francés. De ella resultaría la publicación en 1744 del primer mapa de Francia trazado mediante un procedimiento científico riguroso. Su hijo Cassini IV, también conocido como Jean-Dominique, prosiguió su trabajo afinando más aún la triangulación región por región.



Mapa de Francia de 1744 sobre el que está representado el meridiano de París, así como los principales triángulos de Cassini.

Al caminar sobre el meridiano, seguimos indirectamente los pasos de los sabios árabes que establecieron las bases teóricas de estas triangulaciones. Cada triángulo sobre el mapa requirió el empleo de cosenos, senos o tangentes. Cada uno de ellos lleva en su forma la herencia de AlKashi y de los primeros trigonómetras de Bagdad. Todos estos cálculos hechos a mano exigieron a los sabios del observatorio innumerables horas de trabajo acompañados de sus tablas trigonométricas.

Las triangulaciones se siguieron utilizando hasta finales del siglo XX y la llegada de los satélites. Las redes más precisas constaban de hasta 80 000 puntos. Los hitos que marcaban estos puntos son visibles todavía, diseminados por todo el territorio francés. En París pueden verse aún las dos miras que determinan el eje del meridiano: una se encuentra al sur, en el parque de Montsouris; la otra al norte, en Montmartre. En 1994 se colocaron 135 medallones con el nombre del astrónomo Frangois Arago sobre el trayecto del meridiano en la capital. Uno de ellos se encuentra en el interior mismo del museo del Louvre. La próxima vez que te pasees por las calles parisinas, mantén los ojos abiertos, pues podrías toparte con algunos de ellos.

Cuando el sistema métrico vio la luz a raíz de la Revolución francesa, la longitud del metro se relacionó, en aras de la universalidad, con la del meridiano. Se definió con precisión el metro como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano. En 1796 se instalaron en las cuatro esquinas de París 16 metros patrón grabados en mármol, con el fin de que todo el mundo pudiera tomarlos como referencia. Hoy en día siguen siendo visibles dos de ellos, uno en la calle Vaugirard, frente al jardín de Luxemburgo, y el otro en la plaza Vendóme, a la entrada del Ministerio de Justicia.

El meridiano de París sirvió de referencia hasta la conferencia internacional de Washington celebrada en 1884. Entonces fue reemplazado por el meridiano de Greenwich que pasa por el Observatorio real de Londres. A cambio del meridiano, los británicos se comprometieron a adoptar el sistema métrico. Aún seguimos esperando.

Con la llegada de la informática y de los satélites, las tablas trigonométricas y las triangulaciones en el suelo se han vuelto inútiles. Pero no por ello ha desaparecido la trigonometría. Ha pasado a alojarse en el corazón de los procesadores. Los triángulos se han escondido, pero siguen ahí.

Fíjate en estos coches que desfilan por la avenida del Observatorio. Muchos de ellos están equipados ya con un sistema de posicionamiento GPS. A cada instante, sus trayectorias se determinan mediante su posicionamiento relativo a cuatro satélites que los siguen desde el espacio. La resolución de las ecuaciones resultantes sigue recurriendo a la trigonometría. ¿Saben estos automovilistas que esa voz que les manda tranquilamente girar a la izquierda acaba de utilizar senos o cosenos?

¿Y has oído alguna vez anunciar, a uno de los investigadores de tu serie policíaca favorita, que acababan de localizar el teléfono del sospechoso por triangulación? Esta clase de posicionamiento consiste en determinar la posición de un teléfono móvil en función de su distancia a las tres estaciones base más cercanas. Este problema de geometría se resuelve con facilidad gracias a algunas fórmulas trigonométricas, que nuestros ordenadores efectúan ya a la velocidad del rayo.

Y, no satisfecha con medir lo real, la trigonometría va a inmiscuirse asimismo en la creación de los mundos virtuales. Las películas de animación en 3D y los videojuegos la emplean con profusión. Por debajo de la textura con que las recubren los grafistas, las formas en 3D están compuestas por mallas geométricas que recuerdan curiosamente las triangulaciones de los Cassini. Son estas mallas las que, al deformarse, animan objetos y personajes. El cálculo de cualquier imagen creada por ordenador, como la de la tetera de Utah, que fue uno de los primeros objetos diseñados por ordenador en 1975, requiere la aplicación de un gran número de fórmulas trigonométricas.

Capítulo 9
Despejando incógnitas

Volvamos a Bagdad. Entre todos los sabios que frecuentarán el Bayt al-Hikma, uno de ellos va a marcar muy especialmente su época: Muhamad ibn al-Juarismi.

Al-Juarismi es un matemático persa nacido hacia el año 780. Su familia es originaria de la región de Corasmia, que se extiende por los actuales territorios de Irán, Uzbekistán y Turkmenistán. No sabemos realmente si Al-Juarismi nació allí o si sus padres emigraron a Bagdad antes de su nacimiento, pero lo cierto es que el joven sabio se encuentra en la ciudad redonda a comienzos del siglo IX. Fue uno de los primeros científicos en integrar el Bayt al-Hikma y en granjearse una reputación de primer orden.

En las calles de Bagdad, Al-Juarismi es conocido sobre todo como astrónomo. Redacta varios tratados teóricos que recuperan los conocimientos griegos o indios, así como varias obras prácticas sobre la utilización de un reloj de sol o la fabricación de un astrolabio. Emplea asimismo sus conocimientos para establecer tablas geográficas que agrupan las latitudes y longitudes de los lugares más destacables del mundo. No obstante, su meridiano de referencia, inspirado en Ptolomeo, sigue siendo aproximado: pasa por las islas Afortunadas, cuyo emplazamiento más o menos mitológico se supone situado en el extremo oeste del mundo y podría corresponder a las actuales islas Canarias.

En matemáticas, Al-Juarismi fue el autor del famoso *Libro de la suma y de la resta según el cálculo indio*, que reveló al mundo el sistema decimal posicional. Esta obra esencial habría bastado para hacerle ingresar en el panteón de las matemáticas; sin embargo, es otro libro de contenido revolucionario el que va a garantizarle definitivamente un puesto entre los mayores matemáticos de la historia, al lado de Arquímedes o de Brahmagupta.

Este libro es un encargo de Al-Mamun en persona. El califa desea poner a disposición de su población un manual de matemáticas que pueda resultar útil a todo el mundo para resolver las cuestiones que se plantean en la vida cotidiana.

Confía su elaboración a Al-Juarismi, quien comienza a compilar una lista de problemas clásicos acompañados de su método de resolución. Entre otras, incluye cuestiones relativas a la medición de las tierras, las transacciones comerciales o el reparto de una herencia entre diferentes miembros de una familia.

Todos estos problemas, aunque sumamente interesantes, no tienen nada de innovadores y, si Al-Juarismi se hubiera ceñido a la petición del califa, no cabe duda de que su libro no habría pasado jamás a la posteridad. Sin embargo, el sabio persa no se detiene aquí y decide incorporar a su obra, a modo de introducción, una primera parte puramente teórica. En ella expone, de manera estructurada y abstracta, los diferentes métodos de resolución que se ponen en práctica en los problemas concretos.

Concluida la obra, Al-Juarismi la titula *al-Kitab al-mukhtas ar fi h isab al-yabr wa-l-muqabala*, o *Compendio de cálculo por reintegración y comparación*. Mucho más tarde, al traducirse al latín, las últimas palabras del título árabe se transcribieron fonéticamente y el libro fue llamado *Liber algebrae et almucabola*. Poco a poco, el término *almucabola* fue abandonado y dio paso al único término que habría de designar en lo sucesivo la disciplina iniciada por Al-Juarismi: *al-jabr*, *algebrae*, álgebra.

Más que su contenido matemático, es la formulación que va a dar Al-Juarismi a sus métodos la que resulta revolucionaria. Detalla sus procedimientos de resolución de los problemas con independencia de los problemas mismos. Para comprender bien este sistema, observemos las tres preguntas siguientes:

1. Un campo rectangular tiene 5 unidades de anchura y una superficie de 30. ¿Cuánto mide su longitud?
2. Un hombre de 30 años tiene 5 veces la edad de su hijo. ¿Cuál es la edad de su hijo?
3. Un comerciante ha comprado 30 kilos de telas en 5 rollos idénticos. ¿Cuánto pesa cada rollo?

En los tres casos, la respuesta es 6. Y, al resolver estos problemas, advertimos que, aunque traten de temas radicalmente diferentes, las matemáticas que se esconden detrás son las mismas. En los tres casos, este resultado se halla por medio de una división: 30 ÷ 5 = 6. El primer procedimiento de Al-Juarismi consiste en despojar estas preguntas de su contexto con el fin de extraer de ellas un problema puramente matemático:

Buscamos un número que, multiplicado por 5, da 30.

En esta formulación, ignoramos lo que representan los números 5 y 30. Poco importa que se trate de dimensiones geométricas, de edades, de rollos de tela o de cualquier otra cosa. Esto no cambia en absoluto nuestra forma de buscar la respuesta. El objetivo del álgebra consiste, pues, en proponer métodos que permitan resolver este género de acertijos puramente matemáticos. Unos siglos más tarde, en Europa, estos acertijos recibirán el nombre de ecuaciones.

Al-Juarismi va todavía más lejos en su estudio de las ecuaciones. Afirma que el método no depende siquiera de los datos numéricos del problema. Observa las tres ecuaciones siguientes:

1. Buscamos un número que, multiplicado por 5, da 30.
2. Buscamos un número que, multiplicado por 2, da 16.
3. Buscamos un número que, multiplicado por 3, da 60.

Cada una de estas ecuaciones engloba ya, en su formulación, una multitud de problemas concretos diferentes. Pero, una vez más, advertimos que su resolución va a proceder del mismo método. En los tres casos, hallamos las soluciones dividiendo el segundo número por el primero: para la primera, 30 ÷ 5 = 6; para la segunda, 16 ÷ 2 = 8, y, para la tercera, 60 ÷ 3 = 20. Así pues, el método de resolución no solo es independiente del problema concreto, sino también de los números que intervienen en dicho problema.

Por consiguiente, se vuelve posible formular estas ecuaciones de manera todavía más abstracta:

Buscamos un número que, multiplicado por una cierta cantidad 1, da una cantidad 2.

Todos los problemas de este tipo podrán resolverse de la misma manera: basta con dividir la cantidad 2 por la cantidad 1.

Desde luego, este ejemplo es muy simple. Solo interviene una multiplicación y su resolución no utiliza más que una división. Ahora bien, es posible imaginar otros tipos de ecuaciones en las que la incógnita se somete a varias operaciones diferentes. Al-Juarismi se interesará principalmente por las ecuaciones en las que la incógnita puede someterse a las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), así como a los cuadrados. He aquí un ejemplo:

Buscamos un número cuyo cuadrado es igual a 3 veces su valor aumentado en 10.

En esta ocasión, la solución es 5. El cuadrado de 5 es 25 y tenemos que 25 = 3 x 5 + 10. Por esta vez, hemos tenido suerte, ya que esta solución es un número entero y habría sido posible adivinarlo haciendo varios intentos. Pero, cuando las soluciones son números muy grandes o números decimales, se vuelve necesario disponer de un método preciso que permita hallar sus valores de forma sistemática. Esto es justamente lo que construye Al-Juarismi en la introducción de su libro. En ella describe, etapa tras etapa, los cálculos que hay que efectuar a partir de los datos del problema, cualesquiera que estos sean. En un segundo momento, redacta asimismo demostraciones que prueban que sus métodos funcionan.

El procedimiento de Al-Juarismi se inscribe, pues, perfectamente en la dinámica global de las matemáticas que tiende hacia la abstracción y la generalidad. Desde hacía ya mucho tiempo, los objetos matemáticos se habían vuelto independientes de los objetos reales que representaban. Con Al-Juarismi, son los propios razonamientos que hacemos sobre estos objetos los que se despegan de los problemas que supuestamente han de resolver.

LA CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

No todas las ecuaciones son tan fáciles de resolver. Incluso hay algunas contra las que todavía se estrellan nuestros matemáticos actuales. La dificultad de una ecuación depende esencialmente de las operaciones que la componen.

Así, si la incógnita solo se somete a adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones, hablamos de ecuaciones de primer grado. He aquí algunos ejemplos:

¿Qué número da 10 si se le añade 3?

¿Qué número da 15 si se divide por 2?

¿Qué número da 0 si se multiplica por 2 y luego se le resta 10?

Las ecuaciones de primer grado son las más fáciles de resolver. Un poco de reflexión permite hallar las soluciones de estas tres: 7, porque 7 + 3 = 10; luego 30, porque 30 + *2* = 15; y, finalmente, 5, porque 5 x 2 - 10 = 0.

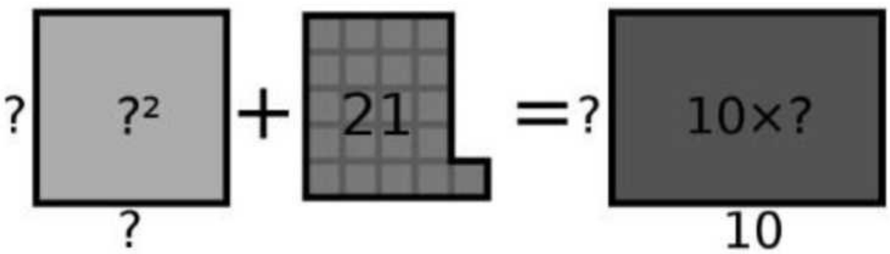
Si a estas cuatro operaciones les añadimos los cuadrados, es decir, la operación que consiste en multiplicar la incógnita por ella misma, pasamos a las ecuaciones de segundo grado y la dificultad aumenta considerablemente. Son precisamente estas ecuaciones de segundo grado las que resuelve Al-Juarismi en su obra. He aquí dos ejemplos tratados por el sabio persa:

El cuadrado de un número más 21 es igual a diez veces este número.

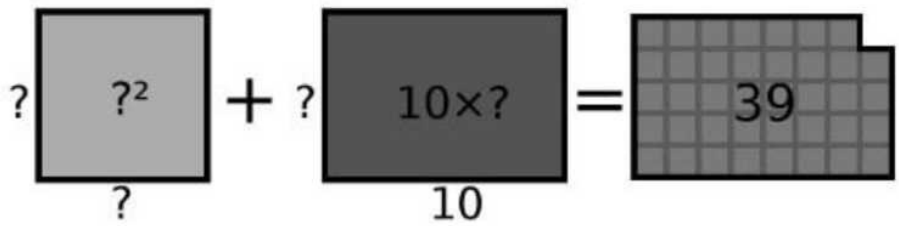
El cuadrado de un número al que se le añade diez veces este mismo número da 39.

Una de las particularidades de las ecuaciones de segundo grado es que pueden tener dos soluciones. Así sucede en estos casos: los números 3 y 7 responden a la primera cuestión, puesto que 3 x 3 + 21 = 3 x 10 y 7 x 7 + 21 = 7 x 10. La segunda ecuación posee asimismo dos soluciones: 3 y -13.

En el siglo IX, la geometría continúa siendo la disciplina de referencia en matemáticas y las demostraciones de Al-Juarismi se formulan sistemáticamente en términos geométricos. Según la interpretación iniciada por los sabios de la Antigüedad, el cuadrado de un número y la multiplicación de dos números pueden verse como superficies. Una ecuación de segundo grado puede tratarse, por tanto, como un problema de geometría plana. Veamos, por ejemplo, las versiones geométricas de nuestras dos ecuaciones precedentes. Los puntos de interrogación son las longitudes correspondientes al número desconocido.



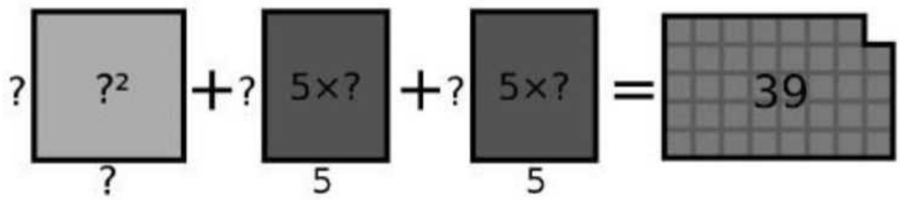
El cuadrado de un número más 21 es igual a diez veces dicho número.



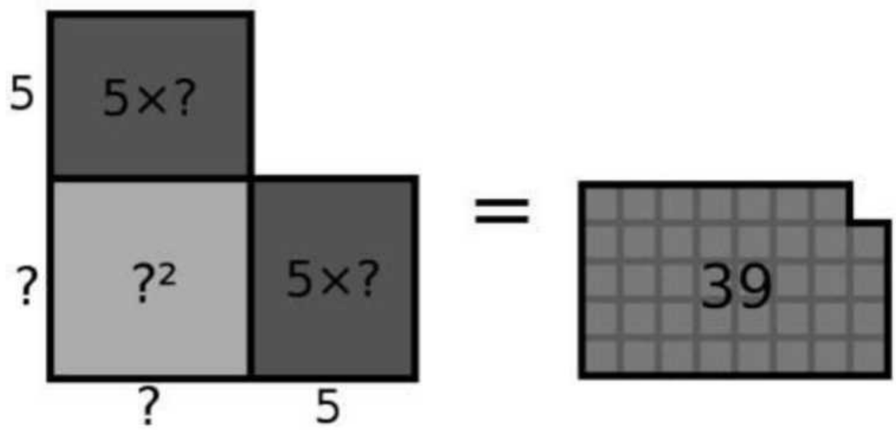
El cuadrado de un número al que se añade diez veces dicho número da 39.

Al-Juarismi resuelve entonces estos problemas con dos métodos de puzles perfeccionados. Corta piezas, añade o quita trozos en función de sus necesidades para obtener una figura que haga aparecer la solución.

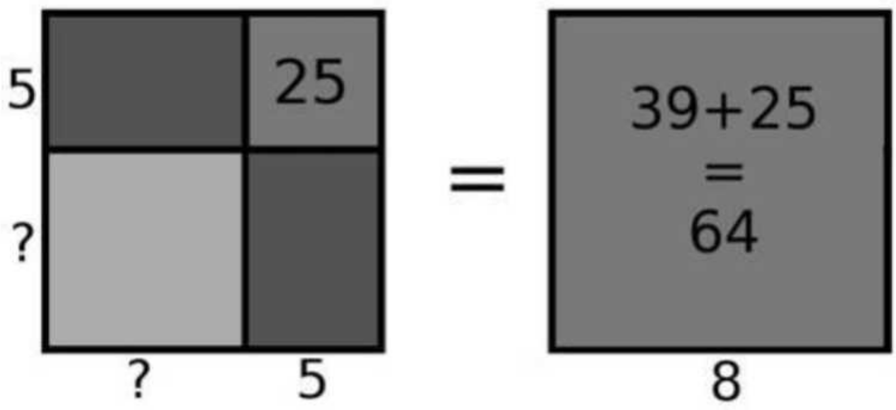
Observemos, por ejemplo, la segunda de las ecuaciones precedentes. Su método comienza por cortar el rectángulo que vale 10 veces la incógnita en dos rectángulos, cada uno de los cuales vale 5 veces la incógnita.



A continuación reorganiza los trozos de la siguiente forma:



Por último, añade en los dos lados de la igualdad una pieza que tiene una superficie de 25, con el fin de reconstruir cuadrados en ambos lados.



El cuadrado de la izquierda tiene entonces un lado igual a la incógnita aumentada en 5, en tanto que el de la derecha tiene un lado igual a 8. De ello se deduce que la incógnita vale 3.

Observa que la figura anterior está totalmente desproporcionada. Antes de su resolución, no era posible saber que la incógnita valía 3 y las longitudes representadas no son correctas. Esto carece de importancia, puesto que lo que cuenta aquí no son los valores numéricos, sino el hecho de que funcione el mismo despiece cualesquiera que sean los números concretos que aparezcan en estas ecuaciones. Dice un adagio que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras falsas. ¡He aquí una ilustración perfecta de ello!

Reparemos, sin embargo, en que, mediante este método, la incógnita es una longitud, es decir, un número positivo: las soluciones negativas se pasan por alto. Al-Juarismi ignora por completo que nuestra ecuación posee una solución igual a -13.

Tras el segundo grado, viene el tercero. Esta vez, resulta posible hacer intervenir el cubo de la incógnita. Estas ecuaciones son todavía demasiado complejas para Al-Juarismi y no se resolverán hasta el Renacimiento. Si las interpretamos en términos geométricos, caeremos en un problema de volúmenes en tres dimensiones.

A continuación llegan las ecuaciones de cuarto grado. Desde un punto de vista numérico, estas ecuaciones se plantean sin ningún problema. No obstante, la representación geo métrica nos traiciona, ya que sería preciso imaginar figuras en cuatro dimensiones, lo cual no resulta viable en nuestro mundo limitado a tres dimensiones.

Esta capacidad del álgebra de generar problemas inaccesibles *a priori* para la geometría será en buena medida responsable del vuelco que se va a producir en el Renacimiento, y veremos cómo la primera arrebata a la segunda el título de disciplina reina de las matemáticas.

A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil es uno de los principales sucesores de Al-Juarismi. Va a generalizar los métodos del sabio persa y a interesarse en particular por los sistemas de ecuaciones. Estos sistemas consisten en hallar simultáneamente varios números desconocidos a partir de varias ecuaciones. He aquí un ejemplo clásico:

El rebaño de un criador está compuesto por dromedarios, que tienen una giba, y camellos, que tienen dos. Suman en total 100 cabezas y 130 gibas. ¿Cuántos animales hay de cada especie?

Buscamos aquí dos incógnitas, el número de dromedarios y el de camellos, y las informaciones de las que disponemos están mezcladas. Las cabezas y las gibas nos dan dos ecuaciones, pero no es posible resolver estas dos ecuaciones de manera independiente: es preciso considerar el problema como un todo.

Hay varios métodos para abordar este problema. Una forma de razonar es la siguiente. Puesto que hay 100 cabezas, hay 100 animales. Ahora bien, si solamente hubiera dromedarios, habría también 100 gibas y faltarían 30. Por tanto, hay 30 camellos y los otros 70 son dromedarios. Aquí no hay más que una solución, pero otros sistemas más complejos pueden tener muchas más. Así, Abu Kamil, en una de sus obras, afirma haber resuelto ciertas ecuaciones para las cuales ha encontrado nada menos que 2676 soluciones diferentes.

En el siglo X, Al Karaji es el primero en escribir que cabe imaginar ecuaciones de cualquier grado, aunque los casos que llega a resolver son relativamente escasos. En los siglos XI y XII, son Omar Jayam y Sharaf alDin al-Tusi quienes se lanzan al asalto del tercer grado. Llegan a resolver ciertos casos particulares y producen avances significativos en su estudio sin lograr, sin embargo, un método sistemático de resolución. Varias tentativas más fracasan y algunos matemáticos comienzan a plantear la posibilidad de que estas ecuaciones no sean resolubles.

Finalmente, no serán los sabios árabes los que resuelvan el asunto. En el siglo XIII, la edad de oro islámica ya ha vivido sus años más hermosos e inicia un lento declive. Las razones de este declive son múltiples: el dominio del Imperio árabe musulmán no deja de concitar la codicia y sufre continuos ataques, tanto comerciales como militares.

En 1219, las hordas mongolas de Gengis Kan irrumpen en la Corasmia natal de Al-Juarismi. En 1258, están a las puertas de Bagdad bajo el mando de Hulagu Kan, nieto de Gengis. El califa Al-Mustasim se ve obligado a capitular. Bagdad es saqueada y quemada, y sus habitantes son masacrados. En la misma época, se acelera la reconquista de los territorios del sur de España por los pueblos cristianos. Córdoba, capital de la región, cae en 1236. España está totalmente reconquistada en 1492, con la toma de Granada y de su palacio de la Alhambra.

La organización científica del mundo árabe está suficientemente descentralizada para resistir durante algún tiempo a estas derrotas. Continuarán realizándose investigaciones de primer orden hasta el siglo XVI, pero el viento de la historia gira y Europa se prepara para recoger la antorcha de las matemáticas.

Capítulo 10
En serie

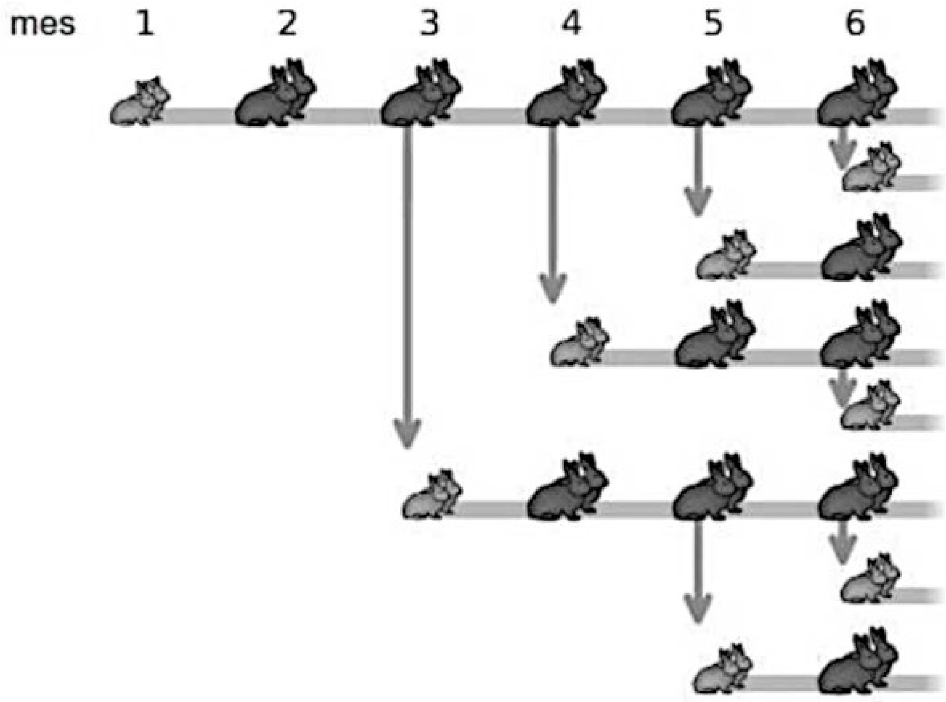
Es preciso reconocer que, a lo largo de la época medieval, las matemáticas no tienen en Europa el viento en popa. No obstante, encontramos algunas excepciones. El matemático europeo más importante de la Edad Media es, sin duda, el italiano Leonardo Fibonacci, nacido en Pisa en 1175 y muerto en 1250 en esta misma ciudad.

¿Cómo se llega a ser un matemático de importancia en esta época en Europa? No permaneciendo allí. El padre de Fibonacci es representante de los comerciantes de la república de Pisa en Bugía, en la actual Argelia. Es allí donde el sabio recibirá su educación y descubrirá los trabajos de los matemáticos árabes, y especialmente los de Al-Juarismi y Abu Kamil. De regreso en Pisa, publica en 1202 el *Liber abaci*, el *Libro del ábaco* o *Libro de los cálculos*, en el que presenta toda una gama de las matemáticas de la época, desde las cifras árabes hasta la geometría de Euclides, pasando por resultados de la aritmética de Diofanto o cálculos de sucesiones numéricas. Es, por cierto, una de estas sucesiones la que le granjeará una gran popularidad en los siglos venideros.

Una sucesión numérica es una secuencia de números que puede prolongarse hasta el infinito. Ya conocemos algunas. La sucesión de los números impares (1, 3, 5, 7, 9…) o la de los números cuadrados (1, 4, 9, 16, 25…) son algunos de los ejemplos más simples. En uno de los problemas del *Liber abaci*, Fibonacci intenta modelizar matemáticamente la evolución de una cría de conejos. Considera al respecto las siguientes hipótesis simplificadas:

1. Una pareja de conejos no está en edad de reproducirse durante sus dos primeros meses.
2. A partir de su tercer mes, una pareja engendra una nueva pareja todos los meses.

Partiendo de estas hipótesis, es posible predecir el árbol genealógico de una joven pareja de conejos.



Cada línea representa la evolución de una pareja de conejos a lo largo del tiempo.
Las flechas representan los nacimientos.

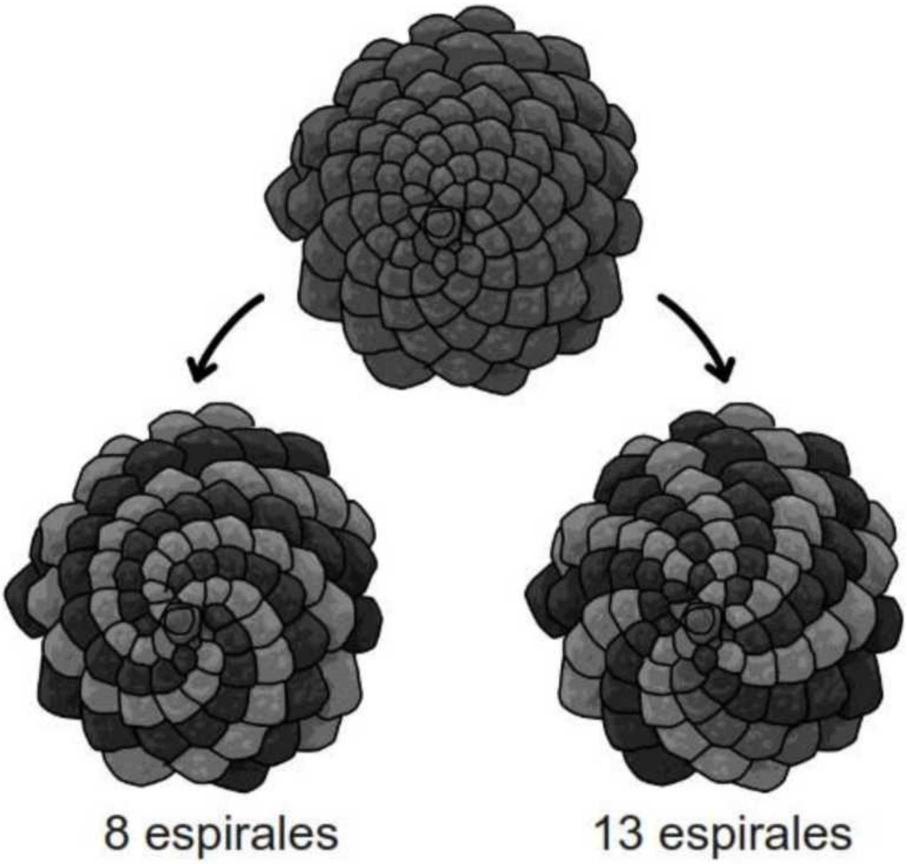
Así pues, podemos observar la sucesión formada por el número de parejas a lo largo del tiempo. Al observar columna a columna, el árbol anterior nos ofrece los valores de los seis primeros meses: 1, 1, 2, 3, 5, 8…

Fibonacci reparó en que, cada mes, la población de conejos era igual a la suma de los dos meses precedentes: 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8, y así sucesivamente. Esta regla tiene su explicación. Cada mes, el número de parejas que nacen, y se suman por tanto a los conejos ya existentes, es igual al número de parejas en edad de procrear del mes precedente, es decir, al número de parejas que ya habían nacido dos meses antes. Ahora es posible calcular los términos de la sucesión sin tener que detallar con exactitud la genealogía de los conejos.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Para Fibonacci, este problema es, ante todo, un enigma recreativo. Sin embargo, la sucesión demográfica de los conejos hallará en los siglos siguientes múltiples aplicaciones, tanto prácticas como teóricas.

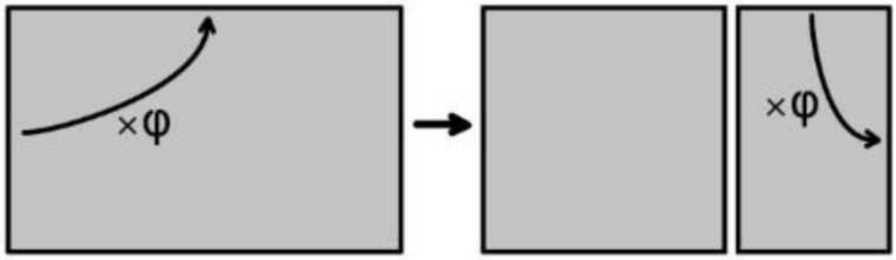
Uno de los ejemplos más llamativos es, sin duda, su aparición en botánica. La filotaxia es la disciplina que estudia la forma en que las hojas o los diferentes elementos constitutivos de un vegetal se implantan alrededor de su eje. Si observas una piña, comprobarás que su superficie está compuesta de escamas que se enrollan en espirales. Siendo más precisos, podemos contar el número de espirales que giran en el sentido de las agujas del reloj y el número de espirales que giran en el sentido inverso.



Por asombroso que pueda parecer, estos dos números son siempre dos términos consecutivos de la serie de Fibonacci. Paseando por el bosque, podrás encontrar, por ejemplo, piñas del tipo 5-8, 8-13 o 13-21, pero nunca del 6-9 ni del 811. Estas espirales de Fibonacci aparecen, de manera más o menos evidente, en otros muchos vegetales. Si resultan muy visibles en las piñas tropicales o en los flósculos del centro de los girasoles, en cambio son mucho más difíciles de detectar en la forma abultada de la coliflor. Y, sin embargo, allí están.

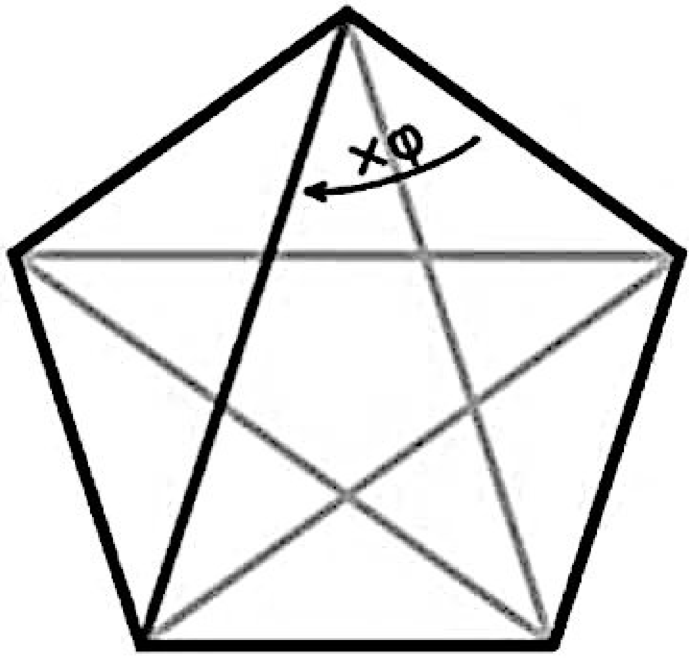
Entre otras curiosidades, la sucesión de Fibonacci revela asimismo un vínculo muy profundo con un número conocido desde la Antigüedad: el número áureo. Su valor es aproximadamente igual a 1,618 y los griegos lo consideraban una proporción perfecta. Al igual que sucede con el número π, el número áureo tiene una escritura decimal infinita, y por ello se le asigna un número, φ, que se lee «fi».

La proporción áurea se presenta en numerosas variantes geométricas. Un rectángulo áureo es un rectángulo cuya longitud es φ veces mayor que su anchura. Las propiedades del número áureo hacen que, si cortamos un cuadrado de su anchura, el rectángulo pequeño que queda sigue siendo un rectángulo áureo.



Los griegos lo emplearon principalmente en su arquitectura. La fachada del Partenón de Atenas posee proporciones muy próximas al rectángulo áureo y, pese a la dificultad de disponer de fuentes fiables sobre la voluntad de los arquitectos, es muy posible que no se trate de una casualidad. El primer texto que define claramente la proporción áurea y que ha llegado hasta nosotros es el libro VI de los *Elementos* de Euclides.

Lo vemos aparecer igualmente en los pentágonos regulares: sus diagonales y sus lados guardan exactamente la proporción áurea. Dicho de otro modo, la longitud de una de las cinco diagonales es igual a la longitud de un lado multiplicado por φ.



La proporción áurea se halla así en todas las estructuras geométricas que forman pentágonos. Tal es el caso, por ejemplo, de la geoda o de los balones de fútbol que ya hemos analizado. Cuando se intenta calcular su valor exacto mediante métodos algebraicos, se llega a la siguiente ecuación de segundo grado:

El cuadrado del número áureo es igual al número áureo aumentado en uno.

El método de Al-Juarismi permite obtener entonces su fórmula exacta. Hallamos que $\varphi = (1 + \sqrt{5}) \div 2 \approx 1{,}618034$[10]. Podemos verificar que este valor respeta bien el enunciado de la ecuación: $1{,}618034 \times 1{,}618034 \approx 2{,}618034$.

Pero ¿qué tiene que ver con esto la sucesión de Fibonacci?

Si observamos el tiempo suficiente la multiplicación de los conejos, comprobaremos que, cada mes, su número se multiplica aproximadamente por φ. Veamos, por ejemplo, el quinto y el sexto mes. La población pasa de 8 a 13 conejos, por lo que se ha multiplicado por $13 \div 8 = 1{,}625$. Ciertamente no está muy lejos del número áureo, pero tampoco coincide exactamente con él. Si observamos ahora el paso del undécimo al duodécimo mes, la población se ha multiplicado por $144 \div 89 = 1{,}61797$. Nos vamos acercando. Y podríamos continuar. Cuanto más tiempo pasa, más se acerca al número áureo el factor multiplicativo de un mes a otro.

Una vez efectuada la comprobación, llega la hora de las interrogaciones. ¿Por qué? ¿Cómo es posible que este número de apariencia anodina esté presente en tres ámbitos distintos de las matemáticas: la geometría, el álgebra y las sucesiones? Cabría pensar de entrada que solo se trata de tres números próximos pero diferentes. Pero no: podemos medir con la mayor precisión la diagonal de un pentágono, calcular con suma finura $(1 + \sqrt{5}) \div 2$ y llegar todo lo lejos que deseemos en la sucesión de Fibonacci; tendremos que rendirnos a las evidencias: nos toparemos una y otra vez con el mismo número.

Para responder esta cuestión, los matemáticos habrán de hacer demostraciones mixtas, que tiendan puentes entre diferentes ramas de las matemáticas. Este fenómeno, que existía ya entre la geometría y el álgebra gracias a las representaciones figuradas de los números de la Antigüedad, va a propagarse al resto de las matemáticas. Ciertas disciplinas que parecían hasta entonces alejadas las unas de las otras van a ponerse a dialogar. Los números tales como φ, más allá de su interés particular, se revelarán en lo sucesivo formidables mediadores. En tiempos de Fibonacci, el número π solo limita por el momento su campo de acción a la geometría. No obstante, en los siglos venideros, llegará a ser el campeón indiscutible de estos números pasarela.

El estudio de las sucesiones permite asimismo arrojar nueva luz sobre las paradojas de Zenón de Elea y, en particular, sobre la de Aquiles y la tortuga. Recuerda la carrera imaginada por el sabio griego: la tortuga comienza la carrera con cien metros de ventaja sobre Aquiles, pero este último corre dos veces más rápido. En esta situación, la paradoja parecía mostrar que, a pesar de su lentitud, la tortuga no podría ser adelantada jamás.

Esta conclusión resultaba de la división de la carrera en una infinidad de etapas. En el momento en que Aquiles alcance el punto de partida de la tortuga, esta habrá avanzado 50 metros. En el tiempo en que Aquiles recorre esos 50 metros, la tortuga estará 25 metros más allá, y así sucesivamente. Las distancias entre ambos corredores en cada una de estas etapas forman una sucesión en la que cada término vale la mitad del precedente:

$$100 \quad 50 \quad 25 \quad 12{,}5 \quad 6{,}25 \quad 3{,}125 \quad 1{,}5625\ldots$$

La sucesión es infinita y, por ese motivo, podríamos deducir falsamente que Aquiles no atrapará jamás a la tortuga. Ahora bien, si sumamos esta infinidad de números, hallamos un resultado que no es infinito en absoluto.

$$100 + 50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + 3{,}125 + 1{,}5625 + \ldots = 200$$

Es una de las grandes curiosidades de las sucesiones: ¡la adición de una infinidad de números puede ser finita! La suma anterior nos muestra que Aquiles adelantará a la tortuga a los doscientos metros de carrera[11].

Estas adiciones infinitas se revelarán asimismo sumamente útiles en el cálculo de los números procedentes de la geometría, tales como π o las relaciones trigonométricas. Si estos números no son expresables con las operaciones elementales clásicas, se vuelve posible obtenerlos mediante sumas de sucesiones. Uno de los primeros en explorar esta posibilidad fue el matemático indio Madhava de Sangamagrama, quien, en torno al año 1500, descubrió una fórmula para el número π:

$$\pi = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{13}\right) + \cdots$$

Los términos de la sucesión de Madhava son alternativamente positivos y negativos, y se obtienen dividiendo 4 entre los sucesivos números impares. No creamos por ello que esta suma resuelve definitivamente el problema de π. Una vez planteada la adición, todavía falta calcular el resultado. Ahora bien, si ciertas sumas de sucesiones, como la de Aquiles y la tortuga, pueden calcularse con facilidad, otras, en cambio, se resisten especialmente, y tal es el caso de la sucesión de Madhava.

En resumidas cuentas, esta suma infinita no permite en realidad ofrecer una escritura decimal exacta de π, pero abre nuevas puertas a mejores aproximaciones. Puesto que no podemos sumar de una sola vez infinitos términos, siempre podemos contentarnos con coger un número finito de ellos. Así, conservando solo los cinco primeros términos, se obtiene 3,34.

$$\left(\frac{4}{1}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) \approx 3{,}34.$$

Esta aproximación no es demasiado buena, pero no pasa nada, prosigamos. Si tomamos los cien primeros términos, llegamos a 3,13 y, tras un millón de términos, obtenemos 3,141592.

Ciertamente no resulta muy práctico sumar un millón de términos para obtener una mera aproximación de seis decimales. La sucesión de Madhava tiene el defecto de converger muy lentamente. Más tarde, otros matemáticos como el suizo Leonhard Euler en el siglo XVIII o el indio Srinivasa Ramanujan en el siglo XX descubrieron otra multitud de sucesiones cuya suma es igual a π, pero que se acercan mucho más deprisa a este número. Estos métodos reemplazarán poco a poco el método de Arquímedes y permitirán calcular cada vez más decimales.

Las relaciones trigonométricas también tienen sus sucesiones. He aquí, por ejemplo, la suma para el coseno de un ángulo dado:

$$\text{coseno} = 1 - \frac{\text{ángulo}^2}{1 \times 2} + \frac{\text{ángulo}^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{\text{ángulo}^6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} + \cdots$$

Para hallar el valor del coseno, basta con reemplazar «ángulo» por la medida del ángulo en cuestión[12]. Existen fórmulas similares para los senos y las tangentes, así como para un sinfín de otros números particulares aparecidos en diferentes contextos.

En la actualidad, las sucesiones continúan teniendo múltiples aplicaciones. Siguiendo los pasos de Fibonacci, se siguen utilizando en dinámica de poblaciones para estudiar la evolución de las especies animales a lo largo del tiempo. Los modelos actuales son, sin embargo, mucho más precisos, y tienen en cuenta múltiples parámetros como la mortalidad, los predadores, el clima o, en términos más generales, la variabilidad de los ecosistemas en los que viven los animales. Más en general, las sucesiones intervienen en la modelización de todo proceso que evoluciona por etapas a lo largo del tiempo. La informática, la estadística, la economía o la meteorología son otros tantos ámbitos que recurren a ellas.

Capítulo 11
Los mundos imaginarios

A comienzos del siglo XVI, las semillas sembradas por Fibonacci comienzan a dar sus frutos con el surgimiento de una nueva generación de matemáticos. Estos van a retomar las investigaciones algebraicas iniciadas por los sabios árabes. Son ellos los que lograrán resolver finalmente las ecuaciones de tercer grado, tras una historia de lo más rocambolesca.

Esta historia comenzó a principios del siglo XVI, con un hombre de negocios y profesor de aritmética de la Universidad de Bolonia llamado Scipione del Ferro. Del Ferro se interesó por el álgebra y fue el primero en descubrir las fórmulas de resolución de las ecuaciones de tercer grado. Por desgracia, en aquella época, el espíritu de difusión de los saberes que reinaba en el mundo árabe todavía no se estilaba en Europa. La Universidad de Bolonia convocaba periódicamente sus diferentes plazas de profesores. Para seguir siendo el mejor y conservar su puesto, Del Ferro se esmeraba en que sus competidores no conocieran su secreto. Redactó su descubrimiento, pero no lo publicó. Se limitó a revelárselo a un puñado de discípulos que, al igual que él, lo mantuvieron en secreto.

Por consiguiente, tras la muerte del matemático boloñés en 1526, la comunidad matemática italiana ignoraba todavía que las ecuaciones de tercer grado hubieran sido resueltas. Muchos de aquellos matemáticos continuaban pensando que sencillamente no se podían resolver. Sin embargo, uno de los discípulos de Del Ferro, llamado Antonio Maria del Fiore, a quien el maestro le había revelado su secreto, no pudo evitar dárselas de listo. Empezó a lanzar a los demás matemáticos del país desafíos consistentes básicamente en resolver ecuaciones de tercer grado. Ni que decir tiene que siempre ganaba. El rumor de la existencia de una solución comenzó entonces a propagarse lentamente.

En 1535, el retado por Del Fiore fue un sabio veneciano llamado Niccolo Fontana Tartaglia, que contaba por entonces treinta y cinco años de edad y todavía no había publicado obras científicas importantes. Del Fiore ignoraba, pues, que acababa de dirigirse a quien se convertiría en uno de los mejores matemáticos de su generación. Los dos sabios se plantearon mutuamente una lista de treinta cuestiones, apostándose treinta banquetes que el vencido habría de ofrecer al vencedor. Durante varias semanas, Tartaglia se devanó infructuosamente los sesos con los problemas de tercer grado enviados por Del Fiore, pero, a pocos días de vencer el plazo, descubrió las fórmulas. Resolvió entonces los treinta problemas en unas horas y ganó brillantemente el desafío.

La historia podría haber acabado ahí, pero Tartaglia se negó a su vez a hacer público su método. La situación se prolongó otros cuatro años.

El asunto llegó entonces a oídos de un matemático e ingeniero milanés llamado Girolamo Cardano. Su nombre afrancesado, Jérome Cardan, sonará sin duda a los aficionados a la mecánica: inventó, entre otras cosas, las juntas de cardán que, en nuestros coches, transmiten la rotación del motor hasta las ruedas. Hasta entonces, Cardano había sido de aquellos que consideraban imposible la resolución de las ecuaciones de tercer grado. Intrigado por el reto ganado por Tartaglia, intentó acercarse a él. A principios de 1539, le hizo llegar ocho problemas para resolver, pidiéndole que le comunicara su método. Tartaglia se negó categóricamente. El sabio milanés se enfadó e intentó una maniobra intimidatoria llamando al conjunto de los algebristas del país a denunciar la arrogancia de su colega. Tartaglia no cedió.

Finalmente Cardano se saldría con la suya recurriendo al engaño. Hizo saber a Tartaglia que el marqués de Ávalos, gobernador de Milán, deseaba conocerlo. En Venecia, Tartaglia se hallaba a la sazón en una situación precaria y necesitaba un protector. Aceptó dirigirse a Milán, donde la entrevista estaba prevista para el 15 de marzo de 1539 en casa del propio Cardano. En vano esperó Tartaglia al gobernador durante tres días. A Cardano le bastó ese tiempo para vencer su desconfianza. Tras incansables negociaciones, Tartaglia acabó por ceder a condición de que Cardano jurase no publicar jamás su método. Cardano prestó juramento y Tartaglia le reveló las fórmulas.

Una vez solo, Cardano comenzó a analizar las fórmulas. El método funcionaba de maravilla, pero todavía le faltaba una cosa: una demostración. Hasta entonces, ninguno de los matemáticos interesados había logrado demostrar de forma rigurosa que sus fórmulas funcionaban bien en todos los casos. A esta tarea se consagraría Cardano en los años siguientes. Acabó por conseguirlo y uno de sus alumnos, Ludovico Ferrari, llegó incluso a generalizar el método para resolver las ecuaciones de cuarto grado. Pero, atados por el juramento de Milán, ninguno de los dos matemáticos podía publicar sus resultados.

No obstante, Cardano no abandonó el asunto. En 1542, se dirigió a Bolonia junto con Ferrari para reunirse con Hannibal della Nave, otro antiguo discípulo de Scipione del Ferro. Los tres juntos consiguieron recuperar las antiguas notas de este último y constataron que había sido el primero en hallar las fórmulas. Desde ese momento, Cardano se consideró liberado de su juramento. Publicó en 1547 el *Ars magna* o *Arte mayor*, una obra que reveló finalmente al mundo el método de resolución de las ecuaciones de tercer grado. Tartaglia, furioso, insultó violentamente a Cardano y publicó su propia versión de la historia. Demasiado tarde. A ojos del mundo, Cardano se había convertido en el vencedor de las ecuaciones cúbicas, y todavía hoy conocemos su método con el nombre de «fórmulas de Cardano».

No obstante, algunos detalles del *Ars magna* suscitarán un cierto escepticismo entre los algebristas de la época. En varios casos, las fórmulas de Cardano parecen requerir el cálculo de raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, podemos ver aparecer en la resolución de una ecuación la raíz de -15, que, por definición, es supuestamente un número cuyo cuadrado es -15. Ahora bien, esto es absolutamente imposible en virtud de la regla de los signos de Brahmagupta. El cuadrado de un número positivo es positivo, ¡pero el cuadrado de un número negativo es también positivo! Por ejemplo, $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$. Ningún número multiplicado por sí mismo puede dar -15. En definitiva, las raíces cuadradas que aparecen en el cálculo de estas soluciones simplemente no existen. Y, sin embargo, utilizando estos números inexistentes como etapas intermedias, el método de Cardano llega al resultado correcto. Extraño e intrigante.

Será otro matemático de Bolonia, Rafael Bombelli, quien se ocupe de este problema y sugiera que las raíces de las cantidades negativas bien podrían ser una nueva especie de números. Números que no son positivos ni negativos. Números de una naturaleza extraña e inédita, cuya existencia nada habría hecho sospechar hasta entonces. Tras la llegada del cero y de los negativos, la gran familia de los números se encontraba de nuevo a punto de aumentar.

Al final de su vida, Bombelli escribió su obra más importante, el *Algebra*, que publicó en 1572, el año de su muerte. En ella retomó los descubrimientos del *Ars magna* e introdujo esas nuevas criaturas que denominó números sofisticados. Bombelli hace con ellos lo mismo que hiciera en su tiempo Brahmagupta con los negativos. Enumera el conjunto de las reglas de cálculo que rigen los números sofisticados y hacen especialmente que su cuadrado sea negativo.

Los sofisticados de Bombelli tendrán un destino bastante semejante al de los números negativos. También contarán con sus escépticos e incrédulos. Con todo, acabarán igualmente por imponerse y su potencia revolucionará el mundo de las matemáticas. Entre los escépticos conversos, se encuentra a comienzos del siglo XVII el matemático y filósofo francés René Descartes. Es él quien dará a estos recién llegados el nombre con el que todavía los conocemos en la actualidad: números imaginarios.

Los imaginarios tardarán aún dos siglos en ser plenamente aceptados por el conjunto de la comunidad matemática. A partir de entonces se volverán imprescindibles para la ciencia moderna. Más allá de las ecuaciones, estos números encontrarán múltiples aplicaciones en las ciencias físicas, especialmente en el estudio de todos los fenómenos ondulatorios que hallamos, por ejemplo, en electrónica o en física cuántica. Sin ellos, no habrían sido posibles numerosas innovaciones tecnológicas modernas.

No obstante, a diferencia de los negativos, los números imaginarios siguen siendo unos grandes desconocidos fuera de los círculos científicos. Van en contra de la intuición, son difíciles de concebir y no representan fenómenos físicos simples. Si los negativos podían comprenderse todavía como una deuda o un déficit, con los imaginarios es preciso renunciar definitivamente a concebir los números como cantidades. Resulta imposible atribuirles un sentido aplicable a la vida diaria y contar con ellos manzanas u ovejas.

Los números imaginarios van a liberar lentamente a los matemáticos de sus últimos complejos. Después de todo, si basta con aceptar la existencia de raíces cuadradas negativas para crear una nueva especie de números, ¿por qué no se podría llegar aún más lejos? ¿Acaso no sería posible añadir a voluntad nuevos números a condición de precisar sus propiedades aritméticas? ¿No cabría incluso inventar nuevas estructuras algebraicas totalmente independientes de los números clásicos?

En el siglo XIX quedan abolidos los últimos prejuicios que aún subsistían sobre lo que deben ser los números. En lo sucesivo, una estructura algebraica se convierte simplemente en una construcción matemática compuesta por elementos (que cabe llamar números en ciertos contextos, pero no siempre) y operaciones que pueden efectuarse con dichos elementos (que cabe llamar adición, multiplicación, etc. en ciertos contextos, pero no siempre).

Esta nueva libertad va a engendrar una formidable explosión creadora. Se descubren, estudian y clasifican nuevas estructuras algebraicas más o menos abstractas. Ante la magnitud de la tarea, los matemáticos de Europa, y luego del mundo, se organizan, discuten, colaboran. Hoy se siguen llevando a cabo en todo el mundo numerosas investigaciones algebraicas, y muchas conjeturas siguen pendientes de demostración.

INVENTA TU TEORÍA MATEMÁTICA

¿Sueñas con un teorema que lleve tu nombre, a semejanza de Pitágoras, Brahmagupta o Al-Kashi? Estupendo; te propongo ahora que crees y estudies tu propia estructura algebraica. Para ello, vas a necesitar dos ingredientes: una lista de elementos y una operación que permita combinarlos.

Tomemos, por ejemplo, ocho elementos que anotaremos con los símbolos siguientes: ♥, ♦, ♣, ♠, ♪, ♫, Δ y ∗. Necesitamos asimismo un signo para nuestra operación. Tomemos, por ejemplo, ß que, en homenaje al sabio italiano, llamaremos «bombellación». Con el fin de determinar el resultado de la bombellación de dos elementos, hemos de crear ahora la tabla de esta operación. Dibujemos una tabla de ocho filas y ocho columnas correspondientes a nuestros ocho elementos, y rellenémosla como mejor nos parezca colocando uno de los elementos en cada casilla.

	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼
♥	♥	♪	☼	♪	♣	♫	♥	♥
♦	♦	♦	♫	☼	♣	☼	♥	♦
♣	♦	♫	♣	♣	♪	♥	☼	♣
♠	☼	♪	▲	♠	♣	♦	▲	♠
♪	♥	▲	♫	♥	♪	♫	☼	♪
♫	▲	♥	♪	♣	♦	♫	☼	♫
▲	☼	♣	☼	♦	♪	♦	▲	▲
☼	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼

¡Listo! Ya tienes tu teoría; solo falta estudiarla. Al observar la segunda fila y la cuarta columna, puedes ver, por ejemplo, que al bombellar ♦ por ♠ obtenemos ∗. Dicho de otro modo, ♦ ß ♠ = ∗. Incluso puedes resolver ecuaciones en tu teoría. Fíjate en esta:

Hallar un número que da ♫ si se bombella con ♣.

Para encontrar eventuales soluciones, basta con echar un vistazo a nuestra tabla. Constatamos que existen dos soluciones: ♦ y ♪ , pues ♦ ß ♣ = ♫ y ♪ ß ♣ = ♫. No obstante, hemos de tener cuidado, pues, en nuestra nueva teoría, ciertas propiedades a las que estamos acostumbrados pueden tornarse falsas. Por ejemplo, el resultado puede variar en función del orden en el que se bombellen dos elementos: ♥ ß ♦ = ♪, mientras que ♦ ß ♥ = ♦. En ese caso decimos que la operación no es conmutativa.

Con un poco de observación, podemos descubrir no obstante algunas propiedades algo más generales. Por ejemplo, al bombellar un elemento consigo mismo, siempre se obtiene el mismo: ♥ ß ♥ = ♥, ♦ ß ♦ = ♦, ♣ ß ♣ = ♣, y así sucesivamente. Este resultado bien merece el título de primer teorema de nuestra teoría.

En resumidas cuentas, ya has comprendido el principio. Si quieres tus propios teoremas, te toca a ti formularlos. Por supuesto, puedes coger tantos elementos como desees. Incluso infinitos, si te resulta tentador. Puedes definir notaciones más complejas, como en el caso de los números enteros, en los que no existe un símbolo para cada uno, sino que se escriben a partir de las diez cifras indias. A continuación, puedes añadir reglas de cálculo que servirán de axiomas en tu teoría. Por ejemplo, en la definición de tu estructura algebraica podrías anunciar que la operación es conmutativa.

Pero no nos engañemos: al proceder de esta manera, hay pocas esperanzas de que tu teoría pase a la posteridad. No todos los modelos matemáticos están al mismo nivel. Unos son más útiles y más importantes que otros. Al crear tu mesa de operaciones al azar, existen muchas probabilidades de que tu modelo carezca de interés. Y, si resultase interesante, cabría apostar que otro matemático lo habrá estudiado ya antes que tú.

A fin de cuentas, tampoco hemos que exagerar, pues las matemáticas son un oficio.

¿Cómo reconocer una teoría interesante? A lo largo de la historia, han sido dos los criterios principales que han guiado a los matemáticos en sus exploraciones. El primero es la utilidad; el segundo, la belleza.

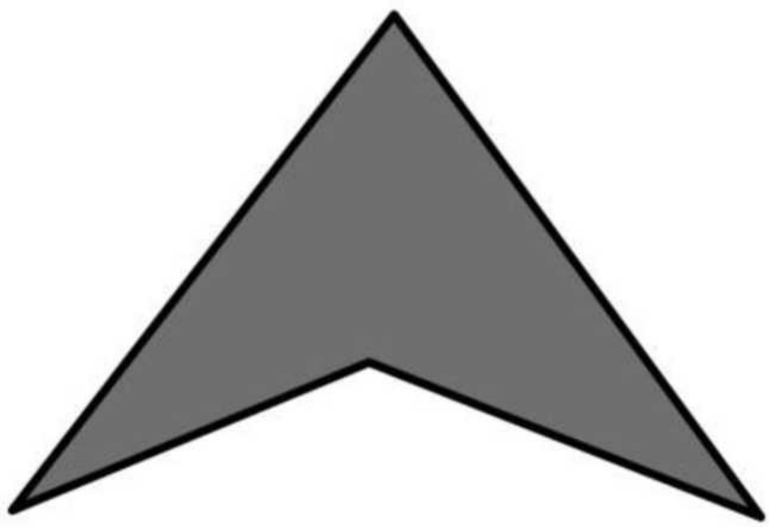
La utilidad es, sin duda, el aspecto más evidente. Servir para algo fue la razón primera de las matemáticas. Los números son útiles porque permiten contar y comerciar. La geometría permite medir el mundo. El álgebra permite resolver problemas de la vida cotidiana.

La belleza, por su parte, puede parecer un criterio más vago y menos objetivo. ¿Cómo puede ser bella una teoría matemática? Esto puede comprenderse mejor en geometría, donde ciertas figuras pueden apreciarse visualmente como obras de arte. Es lo que sucede con las cenefas de los mesopotámicos, los sólidos de Platón o los teselados de la Alhambra. Pero ¿en álgebra? ¿Puede ser realmente bella una estructura algebraica?

Durante mucho tiempo he creído que el privilegio de conmoverse por la elegancia o la poesía de los objetos matemáticos era un asunto de especialistas, de privilegiados, que solo podían captar los aficionados ilustrados, los que han pasado el suficiente tiempo estudiando, escudriñando y digiriendo las teorías en sus más ínfimos detalles, los que han desarrollado una intimidad madura y profunda con los conceptos abstractos. Estaba equivocado y, desde entonces, he tenido numerosas ocasiones de constatar que esta sensación de elegancia puede brotar en los perfectos neófitos e incluso en los niños pequeños.

Uno de los ejemplos más llamativos se me planteó un día en que animaba talleres de investigación en una clase de segundo de Primaria. Los niños rondaban los siete años. Tenían que manipular triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos, hexágonos y otras muchas formas, que debían clasificar siguiendo los criterios que les pareciesen oportunos. Resultó que, para cada una de estas figuras, podíamos contar su número de lados así como su número de vértices. Los triángulos tienen 3 lados y 3 vértices, los cuadrados o los rectángulos tienen 4 lados y 4 vértices, y así sucesivamente. Al confeccionar esta lista, los niños habían descubierto rápidamente un teorema: un polígono posee siempre tantos lados como vértices.

La semana siguiente, para plantearles un reto, llevamos figuras más irregulares, una de las cuales tenía la forma siguiente:



Preguntamos cuántos lados y cuántos vértices tiene, y la mayoría de la clase respondió que 4 lados y 3 vértices. Este ángulo invertido en la parte inferior de la figura no parece un vértice. No es puntiagudo. No se puede hacer girar la figura sobre él. Es cóncavo más que convexo. En resumidas cuentas, este ángulo hacia dentro no encajaba con la idea de vértice que se habían formado previamente.

Pedirles que llamaran vértice a este punto era pedirles que dieran el mismo nombre a cosas diferentes. ¡Menuda idea! Surgieron entonces las discusiones. No todos los niños estaban de acuerdo con la categoría de este nuevo punto. ¿Había que darle otro nombre? ¿Teníamos que ignorarlo por completo? Existían argumentos a favor y argumentos en contra, pero, en conjunto, ninguno parecía convencer a la mayoría.

Y entonces, de repente, un niño se acordó del teorema. Si esto no es un vértice, no podemos decir que todo polígono tiene tantos lados como vértices. Para mi gran asombro, fue este argumento el que hizo cambiar rápidamente de opinión a la clase. En unos segundos, todo el mundo estaba de acuerdo: había que llamar vértice a ese punto. Había que salvar el teorema, aunque fuese al precio de nuestros prejuicios. Habría sido una lástima que este enunciado tan simple y tan nítido hubiera de tener excepciones. Se trataba de la aparición más precoz de la que he sido testigo de un sentimiento de elegancia matemática en niños pequeños.

Los «salvo» no son bellos. Toda excepción es dolorosa. Cuanto más simple es un enunciado y mayor alcance tiene, más nos da la impresión de que estamos palpando algo profundo. La belleza en matemáticas puede adoptar varias formas, pero todas ellas se manifiestan mediante esta relación perturbadora entre la complejidad de los objetos estudiados y la simplicidad de su formulación. Una bella teoría es una teoría económica, sin desperdicios, sin excepciones arbitrarias ni distinciones inútiles. Es una teoría que dice mucho en pocas palabras, que expresa escuetamente lo esencial, que va directa a lo impecable.

Si el ejemplo de los polígonos resulta elemental, esta impresión de elegancia no hace sino aumentar a medida que las teorías crecen preservando un orden que se reduce a unas cuantas reglas simples. Resulta todavía más perturbador que una teoría nueva, que cabría suponer más compleja que la antigua, se revele en realidad mucho más ajustada y armoniosa. Los números imaginarios constituyen una perfecta ilustración de ello.

Recordemos las ecuaciones de segundo grado. Según el método de Al-Juarismi, era posible que estas ecuaciones tuvieran dos soluciones, pero era igualmente posible que no tuvieran más que una, incluso que no tuvieran ninguna. Esto es válido si solo consideramos las soluciones en las que no intervienen los números imaginarios. Si tenemos en cuenta estos últimos, la regla se simplifica considerablemente: todas las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones. Cuando Al-Juarismi afirmaba que una ecuación carecía de solución, era simplemente porque estaba atrapado en un conjunto demasiado reducido de números. Sus dos soluciones eran imaginarias.

Pero eso no es lo mejor. Gracias a los números imaginarios, todas las ecuaciones de tercer grado tienen tres soluciones, todas las ecuaciones de cuarto grado tienen cuatro soluciones y así sucesivamente. En resumen, la regla es que una ecuación tiene tantas soluciones como su grado. Este resultado fue conjeturado en el siglo XVIII antes de ser demostrado a principios del XIX por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss. En la actualidad se considera el teorema fundamental del álgebra.

Más de mil años después del tratado de Al-Juarismi, tras todos los sinsabores del tercer grado, tras las dificultades para concebir ecuaciones más allá del cuarto grado sin representación geométrica, ¿quién habría creído que todo acabaría por caber en una simple regla de ocho palabras? Una ecuación tiene tantas soluciones como su grado.

¡Este es el prodigio de los números imaginarios! Y las ecuaciones no son las únicas que sacan partido de ellos. En el mundo imaginario, son muchos los teoremas que se enuncian de repente con una concisión y una elegancia que dejan sin respiración. Todas las piezas del puzle matemático parecen encajar de maravilla. Probablemente Bombelli no sospechaba que, al legitimar sus números «sofisticados», abría tímidamente la puerta a un auténtico paraíso para generaciones de matemáticos.

En las nuevas estructuras algebraicas que van a hacer eclosión en el siglo XIX, los matemáticos investigan este mismo género de propiedades. Reglas generales, simetrías, analogías, resultados que se encadenan y se complementan a la perfección. La pequeña teoría que hemos inventado previamente se halla muy lejos de cumplir estos criterios para cobrar interés. Es perfectamente aleatoria y casi todos sus casos son particulares. No contiene reglas generales sobre las ecuaciones ni sobre las propiedades de su operación. ¡Qué se le va a hacer!

Entre los grandes nombres del álgebra moderna, figura el francés Évariste Galois, genio precoz que murió a los veintiún años en 1832 como consecuencia de un duelo, pero que, en su breve existencia, encontró no obstante el tiempo necesario para aportar su grano de arena a la historia de las ecuaciones. Galois llegó a probar que, a partir del quinto grado, las soluciones de ciertas ecuaciones ya no podían calcularse mediante fórmulas similares a las de Al-Juarismi o las de Cardano, que no emplean más que las cuatro operaciones básicas, las potencias y las raíces. Para su demostración particularmente brillante, creó a medida nuevas estructuras algebraicas que se siguen estudiando en nuestros días con el nombre de «grupos de Galois».

Pero tal vez la más prolífica en el arte de deducir grandes resultados algebraicos a partir de un número restringido de axiomas elementales fue la matemática alemana Emmy Noether. Desde 1907 hasta su muerte en 1935, Noether publicó cerca de una cincuentena de artículos de álgebra, algunos de los cuales revolucionarían la disciplina en virtud de su elección de estructuras algebraicas y de los teoremas que dedujo de ellas. Estudió sobre todo lo que hoy llamamos anillos, cuerpos y álgebras[13], es decir, estructuras que poseen respectivamente tres, cuatro y cinco operaciones unidas mediante propiedades debidamente seleccionadas.

El álgebra entró entonces en unas esferas de abstracción ante las cuales este modesto libro ha de ceder el paso a los cursos universitarios y a las obras académicas.

Capítulo 12

Un lenguaje para las matemáticas

La Europa del siglo XVI es un hervidero. El Renacimiento ha desbordado Italia e inunda todo el continente. Las innovaciones se encadenan y los descubrimientos se multiplican. Al oeste, más allá del Atlántico, los navíos españoles han descubierto un nuevo mundo. Y, mientras que un número cada vez mayor de exploradores se lanzan en busca de tierras lejanas, los intelectuales humanistas, en sus bibliotecas, viajan en el tiempo y redescubren los grandes textos de la Antigüedad. También en el ámbito religioso se revolucionan las tradiciones. La Reforma protestante llevada a cabo por Martín Lutero y Juan Calvino conoce un éxito creciente y las guerras de religión van a hacer estragos en la segunda mitad del siglo.

La propagación de estas nuevas ideas es obra, en buena medida, de la llegada de una novedosa invención creada hacia 1450 por el alemán Johannes Gutenberg: la imprenta de caracteres móviles. Gracias a este procedimiento, en esa época es posible imprimir con mucha rapidez numerosos ejemplares de un libro y difundirlos a gran escala. Ya en 1482, los *Elementos* de Euclides fueron la primera obra matemática impresa en Venecia. El procedimiento conoce un éxito fulgurante. A comienzos del siglo XVI, varios centenares de ciudades poseen su imprenta y se han impreso ya decenas de miles de obras.

Las ciencias participan activamente en estas transformaciones. En 1543, el astrónomo polaco Nicolás Copérnico publica *De revolutionibus orbium coelestium*, o *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*. ¡Menuda conmoción! Barriendo de un plumazo el sistema astronómico de Ptolomeo, Copérnico afirma que es la Tierra la que gira alrededor del Sol y no a la inversa. En los años siguientes, Giordano Bruno, Johannes Kepler y Galileo Galilei siguen su ejemplo, imponiendo el heliocentrismo como nuevo modelo cosmológico de referencia. Con todo, esta revolución atrajo sobre los sabios que la llevaron a cabo los ataques de la Iglesia católica, que, tras haber alentado durante un tiempo el desarrollo de las ciencias, no estaba preparada sin embargo para la refutación de sus propios dogmas. Si Copérnico había tenido la presencia de ánimo para no publicar sus trabajos hasta poco antes de su muerte, Bruno, en cambio, será quemado en público en Roma y Galileo se verá forzado a abjurar ante el tribunal de la Inquisición. Cuenta la leyenda que, al salir del juicio, el sabio italiano murmuró entre dientes estas cuatro palabras que se hicieron célebres: «*E pur si muove*!» (¡Y, sin embargo, se mueve!).

Las matemáticas siguen su marcha y desembarcan poco a poco en los grandes reinos del Occidente europeo. Y en particular en Francia.

Huelga decir que antes de este período ya se habían practicado las matemáticas en el territorio francés. Los galos disponían de su sistema de numeración en base veinte, un vestigio del cual es, sin lugar a dudas, el término francés para el número 80, *quatre-vingts*, es decir, «cuatro veintes». Los romanos que ocuparon la Galia, pese a no ser grandes matemáticos, dominaban suficientemente las cifras para administrar con eficacia su gigantesco imperio. Lo mismo cabe decir de los francos, los merovingios, los carolingios y los Capetos, que se sucedieron a lo largo de la Edad Media. No obstante, Francia nunca había contado con matemáticos de primer orden. Nunca antes se habían descubierto en el hexágono francés teoremas o resultados relevantes que no fueran ya conocidos en otras partes del mundo.

Dado que las matemáticas desembarcan en Francia, es mi oportunidad de ponerme en marcha con rumbo a la Vendée. Al oeste del país tengo hoy una cita con el primer gran matemático francés del Renacimiento: Frangois Viète.

El pueblo de Foussais-Payré, a 12 kilómetros de Fontenay-le-Comte, está cargado de historia. Las primeras huellas de ocupación del lugar se remontan a la época galorromana, pero es en el Renacimiento cuando el pueblo va a conocer un período de gran prosperidad. Un buen número de artesanos y comerciantes vienen a instalarse aquí y sus negocios son florecientes. El comercio de la lana, del lino y del cuero adquiere fama en las cuatro esquinas del reino. Todavía hoy se conservan increíblemente bien numerosas construcciones de esta época. Para su millar de habitantes, el pueblo cuenta al menos con cuatro edificios clasificados como monumentos históricos y con muchas otras viviendas antiguas.

Al norte del pueblo se encuentra un lugar llamado La Bigotiere, una antigua finca que Frangois Viète heredó de su padre y que le valió su título de señor de La Bigotiere. En la calle central se halla la posada Santa Catalina, antigua propiedad de la familia donde a Viète le gustaba pasar tiempo en su adolescencia. Me emociona penetrar en estos muros que vieron crecer al primer gran matemático del país. Sin duda, el joven Frangois pasaría numerosas noches de invierno al amor de esta chimenea gigantesca que reina en el corazón de la estancia principal, hoy reconvertida en comedor. ¿Sería al calor de esta lumbre donde prenderían las primeras brasas de sus pensamientos matemáticos?

Viète no permaneció toda su vida en Foussais-Payré. Después de estudiar Derecho en Poitiers, viajó a Lyon, donde fue presentado al rey Carlos IX, y luego pasó algún tiempo en La Rochelle antes de mudarse a París.

Las guerras de religión alcanzan por entonces su paroxismo. La propia familia de Frangois se halla dividida al respecto. Su padre, Étienne Viète, se convierte al protestantismo, en tanto que sus dos tíos siguen siendo católicos. Frangois permanece indiferente a estos debates y jamás desvelará sus convicciones profundas. Fue tanto abogado de grandes familias protestantes como alto dignatario del reino. Estas vacilaciones no siempre se vieron con buenos ojos, y atravesó varios períodos de desgracia. La noche de San Bartolomé de 1572 se encontraba en París, pero logró escapar de la masacre. No todos corrieron la misma suerte. Pierre de La Ramée, que había sido el primero en introducir las matemáticas en la Universidad de París, y cuyos trabajos habían ejercido una fuerte influencia en Viète, fue asesinado el 26 de agosto.

En paralelo a sus cargos oficiales, Viète practica las matemáticas como aficionado. Es un buen conocedor de Euclides, de Arquímedes y de los sabios de la Antigüedad cuyos textos se redescubren en el Renacimiento. Se interesa asimismo por los sabios italianos y es uno de los primeros en leer el *Álgebra* de Bombelli, cuya publicación había pasado más bien desapercibida. El matemático francés permanecerá no obstante del lado de los indecisos en cuanto a la introducción de los números sofisticados. A lo largo de su vida, Viète publicará sus obras matemáticas a sus expensas, para ofrecérselas a quien le parezca digno de leerlas. Se interesa por la astronomía, la trigonometría y la criptografía.

En 1591, Viète publica la que será su obra principal: *In artem analyticem isagoge*, o *Introducción al arte analítico*, conocido a menudo simplemente como *Isagoge*. Curiosamente, si la *Isagoge* marca un hito no es debido a sus teoremas o sus demostraciones matemáticas, sino a su manera de formular estos resultados. Viète será el principal instigador de la nueva álgebra que hará surgir, en algunas décadas, un lenguaje matemático completamente novedoso.

Para comprender su método, hemos de volver a sumergirnos en las obras matemáticas de épocas anteriores. Aunque los teoremas geométricos de Euclides o los métodos algebraicos de Al-Juarismi siguen siendo muy útiles en nuestros días, la forma de expresarlos se ha transformado radicalmente. Los sabios antiguos carecían de un lenguaje específico para escribir las matemáticas. Todos los símbolos que nos resultan tan familiares, como los empleados para las cuatro operaciones elementales, +, −, x y ÷, no se inventarían hasta el Renacimiento. Durante cerca de cinco milenios, desde los mesopotámicos hasta los árabes, pasando por los griegos, los chinos y los indios, las fórmulas matemáticas parasitaban el vocabulario corriente de las lenguas en las que estaban escritas.

Así pues, los libros de Al-Juarismi y de los algebristas de Bagdad están íntegramente redactados en árabe y sin ningún simbolismo. En sus obras, ciertos razonamientos que hoy pueden expresarse en unas líneas podían extenderse varias páginas. Recordemos la siguiente ecuación de segundo grado presentada en su *al-jabr*:

El cuadrado de un número más 21 es igual a diez veces dicho número.

Así detallaba Al-Juarismi su resolución:

Los Cuadrados y los Números son iguales a las Raíces; por ejemplo, «un cuadrado y 21 en números son iguales a 10 raíces del mismo cuadrado». Es decir, ¿cuál debe ser la cantidad de un cuadrado que, al añadirle 21 dírhams, se vuelve igual al equivalente de 10 raíces de este cuadrado? Solución: toma la mitad del número de raíces; aquí la mitad es 5. Multiplícala por ella misma; el producto es 25. Réstale el 21 asociado al cuadrado; el resto es 4. Extrae su raíz; es 2. Réstasela a la mitad de las raíces que es 5; quedan 3. Esta es la raíz del cuadrado que buscas y el cuadrado es 9. También podrías añadir la raíz a la mitad de las raíces: la suma es 7; esta es la raíz del cuadrado que buscas, y el cuadrado mismo vale 49.

Un texto semejante sigue resultando hoy engorroso, incluso para los estudiantes que dominan perfectamente el método en cuestión. Su resolución conduce a dos soluciones: 9 y 49.

El álgebra retórica, como se denominará más adelante, no solo es muy larga en su escritura, sino que adolece asimismo de ciertas ambigüedades de la lengua que pueden conferir varias interpretaciones a una misma frase. Al tornarse más complejos los razonamientos y las demostraciones, este modo de escritura va a revelarse cada vez más arduo de manipular.

A estas dificultades se añaden a veces las que los matemáticos se imponen a sí mismos. Así, es frecuente hallar matemáticas escritas en verso. Con frecuencia se trata de un fenómeno residual de una tradición oral en la que el aprendizaje memorístico se facilita mediante la forma poética. Cuando Tartaglia transmite su método de resolución de las ecuaciones de tercer grado a Cardano, lo redacta en italiano y en alejandrinos. Evidentemente, la demostración pierde en claridad lo que gana en poesía y cabe sospechar legítimamente que Tartaglia, cuyas reticencias a divulgar su prueba nos son conocidas, habría enturbiado voluntariamente la comprensión. He aquí un extracto traducido al castellano:

Cuando el cubo y las cosas
se hallen iguales al número,
encuentra otros dos que difieran de este.
Después, como es habitual,
que su producto sea igual
al cubo del tercio de la cosa.
Luego, en el resultado general,
de sus raíces cúbicas bien sustraídas,
obtendrás tu cosa principal.

Tirando a oscuro, ¿verdad? Lo que Tartaglia llama la cosa es precisamente el número buscado, la incógnita. La presencia de cubos en este texto indica que se trata de una ecuación de tercer grado. El propio Cardano, una vez en posesión del poema, experimentará las mayores dificultades para descifrarlo.

Para hacer frente a esta complejidad creciente, los matemáticos comenzarán a simplificar poco a poco el lenguaje algebraico. Este proceso se inicia en el Occidente musulmán en los últimos siglos de la Edad Media, pero el movimiento adquiere toda su extensión sobre todo en Europa entre los siglos XV y XVI.

En un primer momento, hicieron su aparición nuevos términos específicos de las matemáticas. Así, a mediados del siglo XVI, el matemático galés Robert Recorde propuso una nomenclatura para ciertas potencias del número desconocido, basada en un sistema de prefijos que permitía multiplicar las potencias hasta donde se desease. Así, por ejemplo, el cuadrado de la incógnita se denomina «zenzike», su sexta potencia «zenzicubike» y su octava potencia «zenzizenzizenzike».

Y después, poco a poco, comienzan a aparecer por doquier y de manera dispersa símbolos completamente nuevos que, sin embargo, hoy nos resultan muy familiares.

Hacia 1460, el alemán Johannes Widmann es el primero en emplear los signos + y - para designar la adición y la sustracción. A comienzos del siglo XVI, Tartaglia, a quien ya conocemos, es uno de los primeros en utilizar los paréntesis ( ) en los cálculos. En 1557, el inglés Robert Recorde utiliza por primera vez el signo = para designar la igualdad. En 1608, el neerlandés Rudolph Snellius emplea una coma para separar la parte entera y la parte decimal de un número. En 1621, el inglés Thomas Harriot introduce los signos < y > para marcar la inferioridad o la superioridad de dos números.

En 1631, el inglés William Oughtred utiliza la cruz x para expresar la multiplicación y, en 1647, será el primero en emplear la letra griega π para designar la famosa relación de Arquímedes. Por su parte, el alemán Johann Rahn emplea por vez primera en 1659 el símbolo ÷ para la división. En 1525, el alemán Christoph Rudolff designa la raíz cuadrada mediante el signo √, al que el francés René Descartes añade una barra horizontal en 1647.

Por supuesto, todo esto no se hace de manera lineal ni ordenada. A lo largo de este período, multitud de otros símbolos aparecen y desaparecen. Algunos se utilizan una sola vez. Otros se desarrollan y compiten entre ellos. Entre la primera utilización de un signo y su adopción definitiva por el conjunto de la comunidad matemática transcurren con frecuencia varios decenios. Así, un siglo después de su introducción, los signos + y - aún no se habían adoptado por completo, y muchos matemáticos empleaban todavía las letras P y M, iniciales de las palabras latinas *plus* y *minus*, para designar la adición y la sustracción.

¿Y qué papel desempeña Viète en todo esto? El sabio francés va a ser uno de los catalizadores de este vasto movimiento. En la *Isagoge*, lanza un ambicioso programa de modernización del álgebra y pone la piedra angular mediante la introducción del cálculo literal, es decir, el cálculo con letras del alfabeto. Su propuesta es tan sencilla como desconcertante: designar las incógnitas de las ecuaciones mediante vocales y los números conocidos mediante consonantes.

No obstante, esta distribución de las vocales y las consonantes se abandonará enseguida en favor de una propuesta ligeramente diferente de René Descartes: las primeras letras del alfabeto (a, b, c…) designarán las cantidades conocidas y las últimas (x, y y z) serán las incógnitas. Esta es la convención que hoy siguen utilizando la mayoría de los matemáticos, y la letra x se ha convertido, hasta en el lenguaje ordinario, en símbolo de lo desconocido y del misterio.

Para entender bien cómo se ha transformado el álgebra mediante este nuevo lenguaje, recordemos la siguiente ecuación:

Buscamos un número que, multiplicado por 5, da 30.

Gracias al nuevo simbolismo, esta ecuación se escribe en lo sucesivo con un puñado de signos: $5 \text{ x } x = 30$.

Hemos de reconocer que es mucho más corto. Recordemos también que esta ecuación no era sino un caso particular de una clase mucho más amplia:

Buscamos un número que, multiplicado por una cierta cantidad 1, da una cantidad 2.

Esta ecuación se expresa en lo sucesivo $a \text{ x } x = b$.

Al tomarse del principio del alfabeto, sabemos que los números a y b son cantidades conocidas a partir de las cuales intentamos calcular x. Y, como habíamos visto, las ecuaciones de este tipo se resuelven dividiendo la segunda cantidad conocida por la primera; en otros términos: $x = b \div a$.

Entonces los matemáticos empiezan a confeccionar listas de casos y a establecer las reglas de manipulación de las ecuaciones literales. El álgebra se transforma poco a poco en una forma de juego cuyas jugadas autorizadas vienen determinadas por estas reglas de cálculo. Retomemos la resolución de nuestra ecuación. Al pasar de $a \text{ x } x = b$ a $x = b \div a$, la letra a ha pasado de izquierda a derecha del signo = y su operación se ha transformado de multiplicación en división. Esta es, pues, una regla autorizada: toda cantidad multiplicada puede pasar dividida al otro lado de la igualdad. Reglas similares permiten tratar las adiciones y las sustracciones o transformar las potencias. El objetivo del juego sigue siendo el mismo: averiguar el valor de la incógnita x.

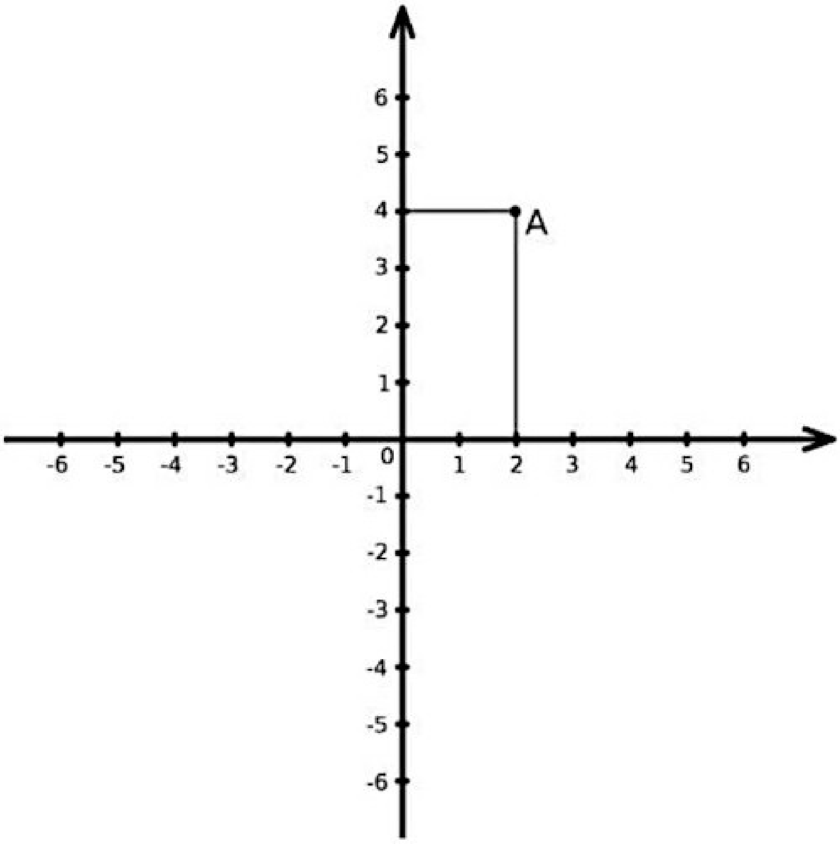
Este juego de símbolos es tan eficaz que el álgebra se independiza rápidamente de la geometría. Ya no es preciso interpretar las multiplicaciones como rectángulos, ni hacer demostraciones en forma de puzles. Las *x*, las *y* y las *z* cogen el relevo. Y eso no es lo mejor. La fulgurante eficacia del cálculo literal va a invertir la relación de fuerzas y pronto será la geometría la que dependerá de las demostraciones algebraicas.

Esta inversión la desencadenará el francés René Descartes al introducir un medio simple y poderoso de algebrizar los problemas de la geometría a través de un sistema de ejes y coordenadas.

COORDENADAS CARTESIANAS

La idea de Descartes es tan elemental como genial: situar en el plano dos rectas graduadas, una horizontal y otra vertical, a fin de localizar cada punto geométrico mediante sus coordenadas en función de estos dos ejes. Observemos, por ejemplo, el punto A siguiente:

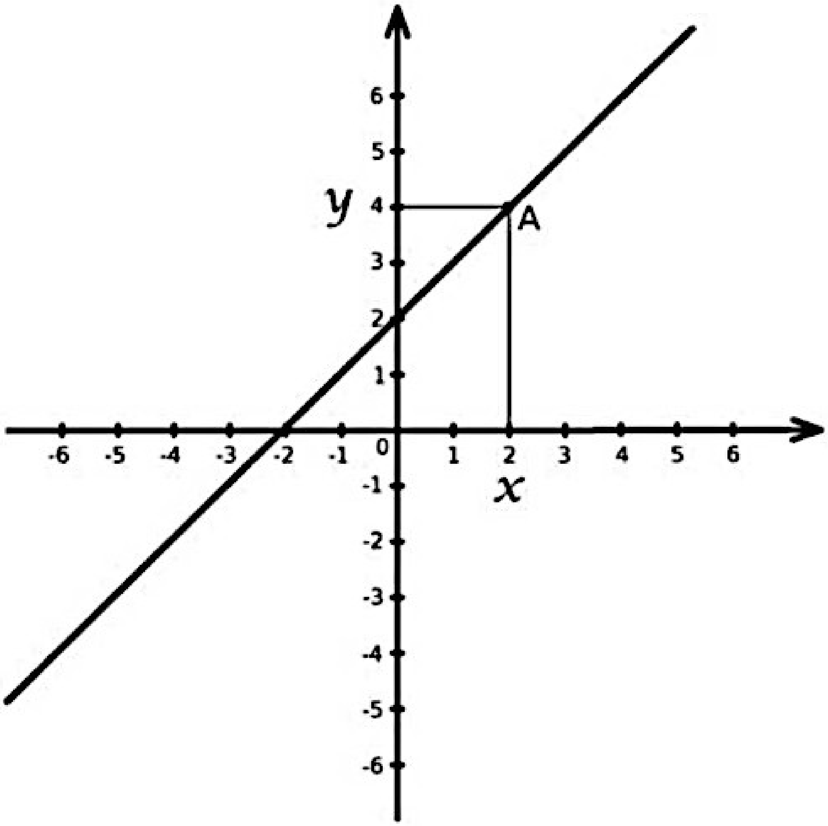
El punto A se halla justo encima de la graduación 2 del eje horizontal y al nivel de la graduación 4 del eje vertical. Sus coordenadas son, por tanto, 2 y 4. Mediante este procedimiento, se vuelve posible representar cada punto geométrico mediante dos números e, inversamente, asociar un punto a cada par de números.



Desde sus inicios, la geometría y los números han mantenido siempre relaciones estrechas, pero, con las coordenadas de Descartes, ambas disciplinas van a fundirse. En lo sucesivo, cada problema de geometría puede interpretarse en términos algebraicos y cada problema de álgebra puede representarse geométricamente.

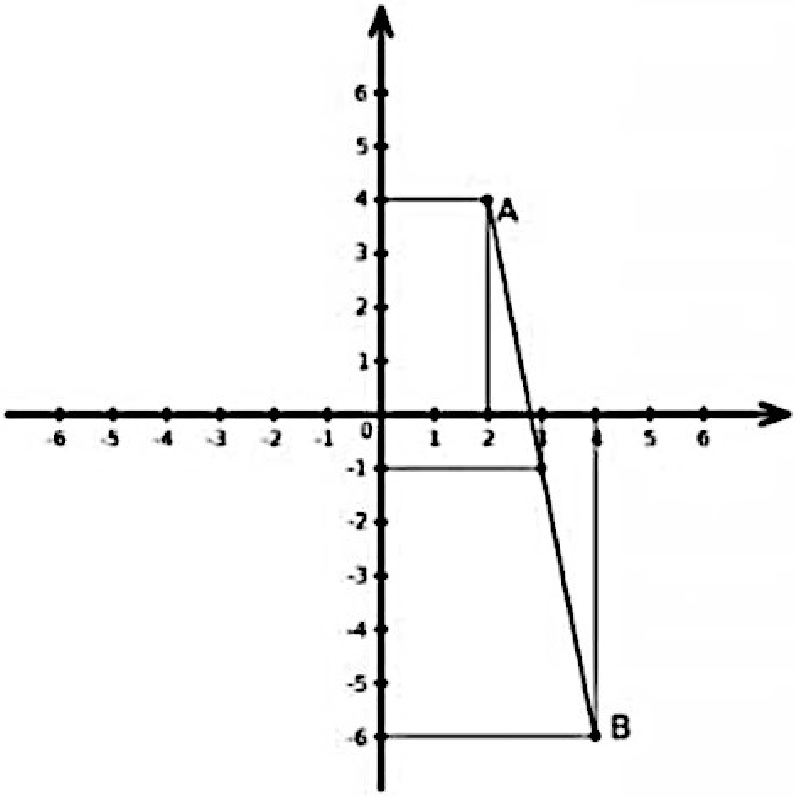
Observemos, por ejemplo, la siguiente ecuación de primer grado: $x + 2 = y$. Se trata de una ecuación con dos incógnitas: buscamos x e y. Por ejemplo, es posible ver que $x = 2$ e $y = 4$ forman una solución, puesto que $2 + 2 = 4$. Cabe advertir entonces que los números 2 y 4 son precisamente las coordenadas del punto A. Así pues, esta solución se puede representar geométricamente con este punto.

A decir verdad, la ecuación $x + 2 = y$ posee infinitas soluciones. Por ejemplo, $x = 0$ e $y = 2$, o $x = 1$ e $y = 3$. Para cada valor posible de x, es posible hallar la y correspondiente añadiendo 2. Así pues, podemos situar en nuestro plano todos los puntos correspondientes a estas soluciones. Esto es lo que obtenemos:



¡Una línea recta! Todas las soluciones se alinean perfectamente para formar una línea recta. Ni una sola queda fuera. En el mundo de Descartes, esta recta es, por tanto, la representación geométrica de la ecuación, al igual que la ecuación es la representación algebraica de la recta. Ambos objetos se confunden, y hoy en día no es raro oír hablar a los matemáticos de la recta «$x + 2 = y$». Damos el mismo nombre a cosas diferentes; el álgebra y la geometría se están convirtiendo en una misma disciplina.

Esta correspondencia da lugar a todo un diccionario que permite traducir los objetos del lenguaje geométrico al lenguaje algebraico y viceversa. Por ejemplo, lo que se llama «punto medio» o «centro» en geometría se denomina «media» en álgebra. Retomemos nuestro punto A de coordenadas 2 y 4, y añadamos un punto B de coordenadas 4 y -6. Para hallar el punto medio del segmento que une A y B, basta entonces con hacer la media de las coordenadas. La primera coordenada de A es 2 y la de B es 4, por lo que podemos deducir que la primera coordenada del punto medio es igual a la media de estos dos números: $(2 + 4) / 2 = 3$. Al hacer lo mismo en el eje vertical, obtenemos $(4 + (-6)) / 2 = -1$. Las coordenadas del punto medio son, pues, 3 y -1. Podemos comprobar que esto funciona dibujando la figura:



En este diccionario de álgebra-geometría, un círculo se convierte en una ecuación de segundo grado y el punto de intersección de dos curvas viene dado por un sistema de ecuaciones, mientras que el teorema de Pitágoras, las construcciones trigonométricas o los despieces en puzles se transforman en diversas fórmulas literales.

En resumen, ya no es preciso dibujar las figuras para hacer geometría; los cálculos algebraicos han ocupado su lugar y son mucho más rápidos y prácticos.

En los siglos posteriores, las coordenadas cartesianas cosecharon numerosos éxitos. Uno de sus más bellos logros fue sin duda la resolución de una conjetura que se les resistía a los matemáticos desde la Antigüedad: la cuadratura del círculo.

¿Podemos dibujar con regla y compás un cuadrado de la misma superficie que un círculo dado? Recordemos que, hace más de tres mil años, el escriba Ahmes ya se devanaba los sesos con esta pregunta. Después de él, los chinos y los griegos habían intentado responderla sin más éxito y, con el transcurso de los siglos, el problema se había convertido en una de las conjeturas más importantes de las matemáticas.

Gracias a las coordenadas cartesianas, las líneas rectas trazadas con regla se transforman en ecuaciones de primer grado, en tanto que los círculos dibujados con compás se convierten en ecuaciones de segundo grado. Desde un punto de vista algebraico, la cuadratura del círculo se plantea, pues, de la siguiente forma: ¿puede hallarse una serie de ecuaciones de primer o de segundo grado cuya solución sea el número π? Esta nueva formulación relanzó las investigaciones, pero, incluso formulada en estos términos, la pregunta seguía siendo complicada.

Finalmente fue el matemático alemán Ferdinand von Lindemann quien puso fin al suspense en 1882. No, el número π no es solución de ecuaciones de primer o segundo grado y, por consiguiente, la cuadratura del círculo es imposible. Así acabó el problema que conserva en la actualidad el título de la conjetura que más tiempo ha resistido los asaltos de los matemáticos.

Las coordenadas cartesianas pueden hacerse extensivas con facilidad a la geometría en el espacio. En tres dimensiones, cada punto se identifica mediante tres coordenadas y los procedimientos algebraicos pueden aplicarse aquí de la misma forma.

Las cosas se tornan más delicadas al pasar a la cuarta dimensión. En geometría, resulta imposible representar una figura en 4D, puesto que todo nuestro mundo físico es tridimensional. En álgebra, en cambio, no hay ningún problema: un punto de la cuarta dimensión es simplemente una secuencia de cuatro números. Y todos los métodos algebraicos se aplican aquí con naturalidad. Si consideramos, por ejemplo, los puntos A y B cuyas coordenadas son 1, 2, 3 y 4 por una parte y 5, 6, 7 y 8 por la otra, podemos emplear tranquilamente la media de estos números para afirmar que su punto medio tiene las coordenadas 3, 4, 5 y 6. La geometría en cuatro dimensiones será explotada especialmente en el siglo XX por la teoría de la relatividad de Albert Einstein, quien utilizará la cuarta coordenada para modelizar el tiempo.

Y podemos continuar por esta vía durante mucho tiempo. Una secuencia de cinco números es un punto en cinco dimensiones. Añadamos un sexto número y estaremos en seis dimensiones. Este proceso no tiene límites. Una secuencia de mil números es un punto en un espacio de mil dimensiones.

A este nivel, la analogía puede antojarse un simple juego del lenguaje, apto como diversión, pero carente de utilidad real. Desengañémonos: esta correspondencia encuentra múltiples aplicaciones, sobre todo en estadística, cuyo objetivo es precisamente el estudio de largas series de datos numéricos.

Si estudiamos, por ejemplo, datos demográficos de una población, puede que deseemos cuantificar hasta qué punto ciertas características como la estatura, el peso o los hábitos alimentarios de un grupo de individuos fluctúan alrededor de la media. Al interpretar esta cuestión en términos geométricos, se trata de calcular la distancia entre dos puntos, el primero de los cuales representa la serie de datos relativos a cada individuo, y el segundo, la serie media. Por consiguiente, existen tantas coordenadas como el número de individuos del grupo. El cálculo se hace entonces con ayuda de triángulos rectángulos a los que puede aplicarse el teorema de Pitágoras. El estadístico que calcula la desviación típica de un grupo de mil individuos emplea, por tanto, a menudo sin saberlo, el teorema de Pitágoras en un espacio de mil dimensiones. Este método se aplica igualmente en biología de la evolución, para calcular la diferencia genética entre dos poblaciones animales. Midiendo mediante fórmulas tomadas de la geometría la distancia entre sus genomas codificados en forma de serie de números, se puede establecer la proximidad relativa de diferentes especies y, a partir de ahí, deducir poco a poco el árbol genealógico del ser vivo.

Podemos llevar incluso la exploración hasta series infinitas de números, es decir, hasta puntos en un espacio de dimensión infinita. A decir verdad, ya conocemos algunas: son las sucesiones numéricas tales como la de Fibonacci. Al estudiar sus conejos, el matemático italiano hacía, sin sospecharlo, geometría en infinitas dimensiones. Esta interpretación geométrica es la que permitirá especialmente a los matemáticos del siglo XVIII establecer con la mayor claridad posible el vínculo sutil que conecta la sucesión de Fibonacci con la proporción áurea.

Capítulo 13
El alfabeto del mundo

«La filosofía está escrita en este inmenso libro que se mantiene siempre abierto ante nuestros ojos, me refiero al universo, pero no podemos comprenderlo si no nos esmeramos primero en comprender el lenguaje y en conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin mediación de las cuales resulta humanamente imposible comprender ni una sola palabra».

Este pasaje, que figura entre los más famosos de la historia de las ciencias, fue escrito en 1623 por el propio Galileo en una obra titulada *Il saggiatore*, o *El ensayador*.

Galileo es, sin ningún género de dudas, uno de los científicos más prolíficos e innovadores de todos los tiempos. Al sabio italiano se le suele considerar el fundador de las ciencias físicas modernas. Hay que decir que su currículum es, cuando menos, impresionante. Inventor del anteojo astronómico. Descubridor de los anillos de Saturno, de las manchas solares, de las fases de Venus y de los cuatro satélites principales de Júpiter. Fue uno de los defensores más influyentes del heliocentrismo de Copérnico, enunció el principio de relatividad del movimiento que hoy lleva su nombre y fue el primero en estudiar experimentalmente la caída de los cuerpos.

El ensayador atestigua el estrecho vínculo que se teje en esta época entre las matemáticas y las ciencias físicas. Galileo es uno de los primeros en fomentar este acercamiento. Es preciso decir que tuvo buenos maestros pues, a sus diecinueve años, lo inició en las matemáticas Ostilio Ricci, uno de los discípulos de Tartaglia. Seguirán sus pasos varias generaciones de científicos para quienes el álgebra y la geometría se convertirán inexorablemente en el lenguaje en el que se expresa el mundo.

Hemos de aclarar bien la naturaleza de esta relación incipiente entre las matemáticas y la física. Y es que, por supuesto, como hemos visto ya en numerosas ocasiones desde el comienzo de nuestra historia, las matemáticas se han utilizado desde siempre para estudiar y comprender el mundo. Ahora bien, lo que se produce en el siglo XVII es radicalmente novedoso. Hasta entonces, las modelizaciones matemáticas habían permanecido en la fase de construcciones humanas, calcadas sobre lo real, pero no creadas por ello. Cuando los agrimensores mesopotámicos utilizaban la geometría para medir un campo rectangular, este había sido trazado por hombres. El rectángulo no pertenece a la naturaleza hasta que el agricultor no lo introduce en ella. Análogamente, cuando los geógrafos triangulan una región para levantar su mapa, los triángulos que consideran son puramente artificiales.

La pretensión de matematizar el mundo preexistente al hombre supone un reto completamente diferente. Cierto es que algunos sabios de la Antigüedad lo habían intentado. Tal es el caso de Platón que, como recordarás, había asociado los cinco poliedros regulares a los cuatro elementos y al cosmos. Los propios pitagóricos eran especialmente aficionados a este género de interpretaciones, pero hay que reconocer que, en términos generales, sus teorías carecían de todo rigor. Construidas sobre consideraciones puramente metafísicas y sin ser jamás comprobadas experimentalmente, la práctica totalidad de ellas se han revelado finalmente falsas.

Lo que van a comprender los sabios del siglo XVII es que la propia naturaleza, en su funcionamiento más íntimo, está regulada por leyes matemáticas precisas que es posible desvelar gracias a la experimentación. Uno de los logros más impactantes de esta época es, sin lugar a dudas, la ley de la gravitación universal, descubierta por Isaac Newton.

En los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o *Principios matemáticos de la filosofía natural*, el sabio inglés es el primero en entender que la caída de los cuerpos sobre la Tierra y la rotación de los astros en el cielo pueden explicarse mediante un mismo fenómeno. Todos los objetos del universo se atraen entre sí. Esta fuerza es prácticamente indetectable para objetos pequeños, pero deviene significativa cuando se trata de planetas o de estrellas. La Tierra atrae los objetos, y esta es la razón de que caigan. La Tierra atrae asimismo a la Luna y, en cierto modo, la Luna también cae. Ahora bien, como la Tierra es redonda y la Luna se ve lanzada a una velocidad muy grande, esta cae constantemente al lado de la Tierra, lo que la hace dar vueltas. Y, por este mismo principio, los planetas giran alrededor del Sol.

Newton no se conforma con enunciar esta ley de atracción. Precisa la intensidad de la fuerza con la que se atraen los objetos. Y la precisa mediante una fórmula matemática. Dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas dividido por el cuadrado de su distancia.

Gracias al cálculo literal de Viète, esto puede expresarse de la siguiente manera:

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

En esta fórmula, la letra F designa la intensidad de la fuerza, m_1 y m_2 son las masas respectivas de los dos objetos cuya atracción estudiamos, y *d* es la distancia que los separa. Por su parte, el número G es una constante fija que vale 0,0000000000667. Su escaso valor explica que la fuerza resulte imperceptible para los objetos pequeños y que sean precisas las masas gigantescas de los planetas y de las estrellas para que se note la gravitación. Pensemos además que, cada vez que levantamos un objeto, demostramos que nuestra fuerza muscular es superior a la fuerza de atracción de la Tierra entera.

Una vez establecida la fórmula, los problemas físicos se transforman en problemas matemáticos. Se hace así posible calcular las trayectorias de los objetos celestes y, en particular, prever su evolución futura. Hallar la fecha del próximo eclipse supone hallar el valor de la incógnita de una ecuación algebraica.

En los decenios siguientes, la fórmula de Newton cosechó numerosos éxitos. La gravitación universal permitió afirmar que la Tierra debía de estar ligeramente achatada por los polos, lo que confirmaron los geómetras que midieron el meridiano por triangulación. Uno de los logros más espectaculares de la teoría newtoniana sigue siendo, sin embargo, el cálculo del regreso del cometa Halley.

Desde la Antigüedad, los sabios habían observado y consignado la aparición aleatoria de cometas en los cielos. Para explicar este fenómeno, había dos escuelas enfrentadas. Los aristotélicos consideraban que los cometas eran fenómenos atmosféricos y, por tanto, relativamente próximos a la Tierra, en tanto que los pitagóricos los veían como especies de planetas, es decir, objetos mucho más lejanos. Cuando Newton publicó sus *Principia mathematica*, la polémica no se había zanjado todavía y los sabios de ambas escuelas continuaban peleándose sobre ese asunto.

Uno de los medios de probar que los cometas son astros lejanos que orbitan alrededor del Sol sería descubrir en ellos una cierta periodicidad: un objeto que gira ha de volver a pasar por el mismo punto a intervalos regulares. Por desgracia, a comienzos del siglo XVIII todavía no se había detectado ninguna regularidad de este tipo. Y entonces, en 1707, un astrónomo británico amigo de Newton, llamado Edmund Halley, anunció haber hecho un posible descubrimiento.

En 1682, Halley había observado un cometa que, en un primer momento, no le había parecido nada extraordinario. No obstante, el año anterior el astrónomo había viajado a Francia, donde había conocido a Cassini I en el Observatorio de París. Este había planteado con él la hipótesis de un retorno periódico de los cometas. Halley se sumergió entonces en los archivos astronómicos donde otros dos pasos de cometas acabaron por atraer su atención. Uno en 1531 y el otro en 1607. Los cometas de 1531, 1607 y 1682 formaban dos intervalos idénticos de 76 años. ¿Y si se trataba del mismo? Halley asume el reto y anuncia que el cometa regresará en 1758.

¡Cincuenta y un años en suspenso! La espera fue insoportable y trepidante. Otros sabios aprovecharon para afinar la predicción de Halley. En concreto se sugirió que la atracción gravitacional de los dos planetas gigantes, que son Júpiter y Saturno, podría modificar un poco la trayectoria del cometa. En 1757, el astrónomo Jérome Lalande y la matemática Nicole-Reine Lepaute se lanzan a hacer cálculos basándose en un modelo desarrollado por Alexis Clairaut a partir de las ecuaciones de Newton. Los cálculos son largos y tediosos; los tres sabios necesitarán varios meses para predecir finalmente un paso del cometa lo más cerca del Sol en abril de 1759, con un margen de error posible de un mes.

Y entonces se produjo lo increíble. El cometa acudió a la cita y el mundo entero lo vio marcar en el cielo el triunfo de Newton y de Halley. Pasó al lado del Sol el 13 de marzo, en el intervalo calculado por Clairaut, Lalande y

Lepaute. Lamentablemente, Halley no vivió el tiempo suficiente para asistir al retorno del cometa al que se dio su nombre, pero la teoría de la gravitación y, a través de ella, la matematización de la física, acababan de demostrar con brillantez su increíble poder.

Ironías de la historia: Galileo, aparte de su discurso sobre la matematización del mundo, sostenía en *El ensayador* la tesis de los cometas atmosféricos. Su libro era, de hecho, una respuesta al matemático Orazio Grassi, quien había defendido algunos años antes el punto de vista opuesto. La reputación de Galileo y el tono fuertemente polémico del libro lo convirtieron en un *bestseller* de la época, pero ni la celebridad ni el éxito garantizan la verdad. «*E pur si muove…*», habría podido responder Grassi a Galileo.

Más allá del error de Galileo, esta anécdota ilustra de manera soberbia la robustez del proceso científico que se pone en marcha en esta época. Las conclusiones del método científico no dependen de la opinión previa del sabio que lo cultiva, aunque fuera Galileo. Los hechos son tozudos. La naturaleza real de los cometas, como la del conjunto de los objetos del mundo físico, es independiente de la idea que los hombres se hagan de ellos. Cuando un sabio reconocido de la Antigüedad se equivocaba, un montón de discípulos solían seguirlo sin rechistar, pues la autoridad hacía las veces de argumento. Con frecuencia no bastaban varios siglos para desprenderse de una idea recibida que, sin embargo, habría podido desmentir un simple experimento. La detección en unos decenios del error de Galileo es, por el contrario, el signo de una comunidad científica saludable.

Una cosa es prever la trayectoria de un cometa que ya se ha visto, y otra calcular la de un astro totalmente desconocido. En la categoría de los grandes logros de las matemáticas en astronomía, es preciso incluir igualmente el descubrimiento de Neptuno en el siglo XIX. El octavo y último planeta del sistema solar es el único que no se descubrió por medio de observaciones, sino mediante el cálculo. Debemos tamaña proeza al astrónomo y matemático francés Urbain Le Verrier.

Desde finales del siglo XVIII, varios astrónomos habían advertido ciertas irregularidades en la trayectoria de Urano, a la sazón último planeta conocido. Este no seguía exactamente la trayectoria que le predecía la ley de gravitación universal. Solo cabían dos explicaciones: o bien la teoría de Newton era falsa, o bien otro astro todavía desconocido era el responsable de esas perturbaciones. A partir de la trayectoria observada de Urano, Le Verrier se lanzó a calcular la posición de este hipotético nuevo planeta. Necesitó dos años de trabajo intenso para lograr un resultado.

Entonces llegó la hora de la verdad. La noche del 23 al 24 de septiembre de 1846, el astrónomo alemán Johann Gottfried Galle apuntó con su anteojo en la dirección que le había comunicado Le Verrier, colocó su ojo en el extremo del ocular y… lo vio. Una pequeña mancha azulada, perdida en las profundidades abismales del cielo nocturno. ¡Ahí estaba el planeta, a más de cuatro mil millones de kilómetros de la Tierra!

¡Qué formidable y embriagador sentimiento, qué impresión de potencia universal, qué emoción insondable debió invadir aquel día el espíritu de Urbain Le Verrier, quien, pluma en mano y a fuerza de ecuaciones, había sabido comprender, capturar y casi controlar la danza titánica de los planetas alrededor del Sol!

Mediante las matemáticas, los monstruos celestes, los dioses de antaño, se hallaban de repente domesticados, dominados, dóciles y ronroneantes bajo las caricias del álgebra. Es fácil imaginar el estado de exaltación intensa en el que se sumió la comunidad astronómica mundial en los días que siguieron, y que todavía hace estremecerse en nuestros días a todo astrónomo aficionado que apunta con su telescopio hacia Neptuno.

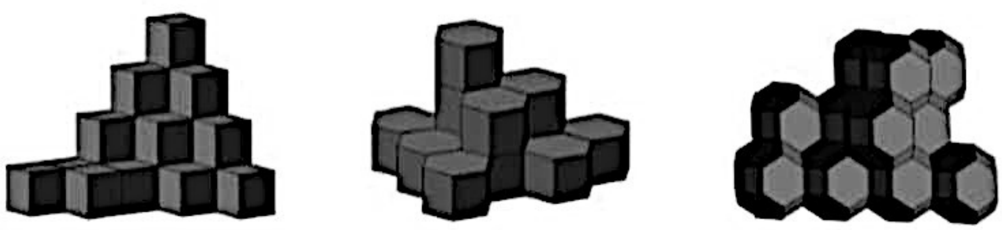
La vida de una teoría científica tiene sus fases. Lo primero es el tiempo de las hipótesis, de los errores, de la construcción progresiva y neblinosa de las ideas. Luego viene el momento de la confirmación, el momento de las experiencias que validan o no las ecuaciones que, como jueces implacables, confirman o rechazan definitivamente. Y, a continuación, el despegue, la emancipación. El momento en que la teoría confía lo bastante en ella misma como para osar hablar del mundo sin tener que mirarlo ya a los ojos. El momento en que las ecuaciones pueden preceder a la experiencia y predecir un fenómeno todavía no observado e incluso inesperado. El momento en que la teoría pasa de descubierta a descubridora, en que se convierte en la aliada, casi la colega, de los sabios que la han creado. Entonces la teoría está madura y es el tiempo de los cometas Halley y de Neptuno. El tiempo también de los eclipses de Einstein como el que, el 29 de mayo de 1919, verá el triunfo de la relatividad, el tiempo de los bosones de Higgs descubiertos en 2012 conforme a las previsiones del modelo estándar de la física de partículas, o el tiempo de las ondas gravitacionales detectadas por vez primera el 14 de septiembre de 2015.

Para hacerse adultos y granjearse su legitimidad, todos los grandes descubrimientos científicos tienen una necesidad vital de matemáticas, de ecuaciones algebraicas y de figuras geométricas. Las matemáticas han sabido dar pruebas de su increíble poder y, hoy en día, ninguna teoría física seria osaría ya expresarse en otro lenguaje.

CRISTALOGRAFÍA

La matematización del mundo llega igualmente a la química, donde vamos a reencontrarnos con viejos conocidos. A comienzos del siglo XIX, el mineralogista francés René Just Haüy, dejando caer un bloque de calcita, constata que se rompe en multitud de esquirlas, dotadas todas ellas de la misma estructura geométrica. Los trozos no son aleatorios, sino que tienen caras planas que forman ángulos muy precisos unas con otras. Para que se produzca semejante fenómeno, Haüy deduce que el bloque de calcita debe de estar formado por una multitud de elementos semejantes, que se ensamblan entre sí de manera perfectamente regular. Un sólido que posee esta propiedad se denomina cristal. En otros términos, un cristal observado a escala microscópica consiste en un motivo de varios átomos o moléculas que se repite de modo idéntico en todas las direcciones.

¿Un motivo que se repite? ¿No te recuerda a nada? El principio se asemeja asombrosamente a las cenefas mesopotámicas y a los teselados árabes. Una cenefa presenta un motivo que se repite en una dirección, y un teselado, en dos direcciones. Para estudiar un cristal, hemos de retomar los mismos principios, pero esta vez en el espacio de tres dimensiones. Los artesanos mesopotámicos habían descubierto las siete categorías de cenefas y los artistas árabes las diecisiete de teselados. Gracias a las estructuras algebraicas, resultaba posible en lo sucesivo demostrar que estos números eran óptimos: no faltaba ninguno. Estas mismas estructuras algebraicas permitieron establecer la existencia de 230 categorías de teselados en 3D. Entre las más simples figuran, por ejemplo, los teselados con cubos, con prismas hexagonales o con octaedros truncados[14], representados aquí.



De izquierda a derecha: apilamientos de cubos, de prismas hexagonales y de octaedros truncados. Estos apilamientos pueden prolongarse hasta el infinito en el espacio.

En cada caso, estas figuras se apilan y se ensamblan perfectamente sin dejar huecos, formando una estructura que puede prolongarse hasta el infinito en todas las direcciones. ¿Quién habría creído que las reflexiones geométricas de los artesanos mesopotámicos contenían en germen las bases de lo que llegaría a ser uno de los componentes esenciales del estudio de las propiedades de la materia?

Los cristales se encuentran por doquier en nuestra vida cotidiana. Entre otros ejemplos, cabe mencionar nuestra sal de mesa, compuesta por multitud de pequeños cristales de cloruro sódico, o el cuarzo, cuyas oscilaciones sumamente regulares cuando se le aplica una corriente eléctrica constituyen un elemento indispensable de nuestros relojes. No obstante, hemos de tener cuidado, pues la palabra *cristal* se emplea a veces de manera abusiva en el lenguaje ordinario. Así, los vasos de cristal no son en realidad de cristal en el sentido científico del término.

Si deseas admirar especímenes más espectaculares, siempre puedes visitar una colección de mineralogía. La de la Universidad Pierre y Marie Curie de París es una de las más hermosas del mundo.

No obstante, la eficacia fulgurante de la matematización del mundo no responde una pregunta desconcertante. ¿Cómo es posible que el lenguaje de las matemáticas se adapte con tanta perfección a la descripción del mundo? Para comprender bien lo que tiene de asombroso, volvamos a la fórmula de Newton:

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

La intensidad de la fuerza de gravitación se enuncia, pues, mediante una fórmula en la que intervienen dos multiplicaciones, una división y un cuadrado. La simplicidad de esta expresión parece un golpe de suerte increíble. Sabemos bien que no todos los números pueden expresarse con fórmulas matemáticas simples. Tal es el caso, por ejemplo, del número π y de muchos otros. Desde un punto de vista estadístico, los números complicados son muchos más que los simples. Si escogemos un número al azar, tendrás muchas más probabilidades de dar con un número decimal que con un número entero. Análogamente, será mucho más probable que te topes con un número de desarrollo decimal infinito que finito, y mucho más probable que encuentres un número que no se puede expresar con ninguna fórmula que uno calculable a partir de las operaciones elementales.

La fórmula de Newton es todavía más asombrosa, pues la fuerza varía en función de las masas y la distancia entre los objetos. No es una simple constante como π. Y, sin embargo, sean cuales sean las masas de los dos cuerpos y cualquiera que sea su distancia, la atracción que ejercen el uno sobre el otro se mide siempre con esta misma fórmula. Antes de que Newton estableciera su ley, habría sido razonable considerar que la intensidad de la fuerza fuese imposible de expresar mediante una fórmula matemática. Y, en caso de que fuera posible, habría podido esperarse que se tratara de una fórmula compleja en la que intervinieran operaciones mucho más enmarañadas que las multiplicaciones, las divisiones y los cuadrados.

¡Qué suerte que la fórmula de Newton sea la que es! ¡Y qué misterio que la naturaleza hable con tanta elegancia el idioma de las matemáticas! Es frecuente que los modelos desarrollados por los matemáticos únicamente por su belleza encuentren, siglos después de su creación, aplicaciones en las ciencias físicas. Y este misterio no se detiene en la gravitación. Los fenómenos electromagnéticos, el funcionamiento cuántico de las partículas elementales, la deformación relativista del espacio-tiempo, todos estos fenómenos se expresan en el lenguaje matemático con una concisión extraordinaria.

Tomemos la más célebre de todas las fórmulas: $E = m c^2$. Esta igualdad, establecida por Albert Einstein, establece una equivalencia entre la masa y la energía de los objetos físicos. No pretendo explicar aquí esta fórmula, pero pensemos simplemente en lo siguiente: este principio, generalmente considerado uno de los más fascinantes y profundos del funcionamiento de nuestro universo, se expresa con una fórmula algebraica de cinco símbolos solamente. ¿A qué obedece semejante prodigio? Suele atribuirse al propio Einstein la frase que resume una situación tan impresionante: «Lo más incomprensible del universo es que sea comprensible». Entiéndase comprensible para los matemáticos. En 1960, el físico Eugene Wigner hablará por su parte de la «irrazonable eficacia de las matemáticas».

En definitiva, ¿conocemos tan bien estos objetos abstractos, números, figuras, sucesiones o fórmulas, que pensábamos haber creado? Si las matemáticas son verdaderamente el producto de nuestro cerebro, ¿por qué volvemos a encontrarlas como espectros errantes más allá de nuestra cavidad craneal? ¿Qué pintan en el mundo físico? ¿De veras están en él? ¿No hay que ver más bien en estos fantasmas de lo real una gigantesca ilusión óptica? Considerar que los objetos matemáticos poseen una forma de existencia fuera del espíritu humano equivaldría a conferirles una realidad a pesar de que no son más que una pura abstracción. ¿Qué significaría entonces el verbo *existir* si tuviéramos que aplicárselo a estos objetos que, sin embargo, no tienen nada de material?

No cuentes conmigo para proponer el mínimo atisbo de respuesta a estas preguntas.

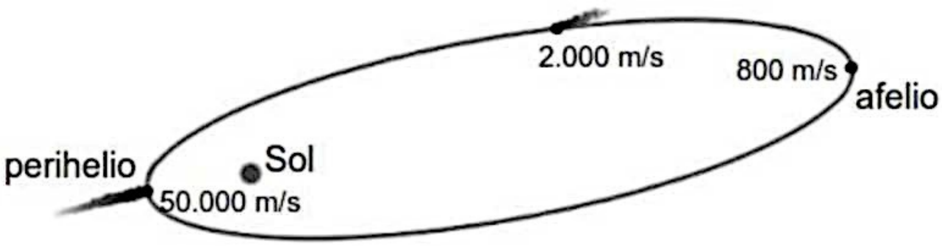
Capítulo 14

Lo infinitamente pequeño

La estrecha colaboración de las matemáticas con las ciencias físicas no actuará durante mucho tiempo en sentido único. A partir del siglo XVI, ambas disciplinas no cesarán de intercambiar ideas y de nutrirse mutuamente. Puesto que la física está ávida de fórmulas, cada nuevo descubrimiento planteará en lo sucesivo la pregunta de las matemáticas que se esconden detrás. ¿Existen ya o están todavía por inventar? En la segunda eventualidad, los matemáticos se enfrentan al desafío de esculpir a medida nuevas teorías. Hallarán entonces en las ciencias físicas una de sus más bellas musas.

El desarrollo de la gravitación newtoniana es una de las primeras que exigen matemáticas innovadoras. Para comprenderlo, volvamos sobre la pista del cometa Halley. Una cosa es conocer la fuerza que lo atrae hacia el Sol, pero ¿cómo deducir, a partir de esta información, su trayectoria y los datos útiles como su posición en una fecha determinada o su período preciso de revolución?

Una de las preguntas clásicas que será necesario responder es la de la distancia recorrida en función de la velocidad. Si te digo que el cometa vuela por el espacio a la velocidad de 2000 metros por segundo y te pregunto qué distancia habrá recorrido en un minuto, la respuesta es relativamente simple. En un minuto, el cometa recorrerá 60 veces 2000 metros, es decir, 120 000 metros o 120 kilómetros. El problema es que la realidad es más compleja. La velocidad del cometa no es fija, sino que varía a lo largo del tiempo. En su afelio, es decir, en su punto más alejado del Sol, es de 800 metros por segundo, mientras que en su perihelio, lo más cerca del Sol, es de 50 000 metros por segundo. ¡Una diferencia abismal!



Y la clave estriba en el hecho de que, entre estos dos extremos, el cometa acelera progresivamente, sin conservar jamás durante un instante una velocidad fija. Por ejemplo, en un momento dado el cometa evoluciona a 2000 metros por segundo, pero esto no dura. Una fracción de segundo antes, su velocidad era un poco mayor, digamos que 2000,001, y una fracción de segundo después ya había pasado a 1999,999. Resulta imposible captar el menor intervalo de tiempo, ni siquiera minúsculo, durante el cual el cometa mantiene una velocidad constante. ¿Cómo calcular con exactitud en estas condiciones la distancia que recorre?

Para responder esta pregunta, los matemáticos van a recurrir a un método que se asemeja curiosamente al utilizado dos mil años atrás por Arquímedes para calcular el número π. Al igual que el sabio de Siracusa se había aproximado al círculo mediante polígonos que tenían cada vez más lados, es posible aproximarse a la trayectoria considerando que el cometa pasa niveles de velocidad a intervalos cada vez más cortos. Por ejemplo, cabe imaginar que el cometa mantiene una velocidad constante de 800 metros por segundo durante un cierto tiempo, y luego pasa repentinamente a 900 metros por segundo durante un cierto tiempo, y así sucesivamente. La trayectoria calculada de este modo no será exacta, pero puede considerarse una aproximación. Y, para aumentar la precisión, basta con afinar los niveles. En lugar de considerar niveles de 100 metros por segundo cada uno, es posible descender por tramos de 10, de 1 o incluso de 0,1 metros por segundo. Cuanto más se acorten los tramos, más se aproximará el resultado a la trayectoria real del cometa.

Las aproximaciones sucesivas obtenidas para la distancia recorrida entre el afelio y el perihelio forman entonces una serie que podría parecerse a esta:

47 42 40 39 38,6 38,52 38,46 38,453…

Estos números se expresan en unidades astronómicas[15]. Dicho de otro modo, si consideramos que la velocidad del cometa permanece constante en tramos de 100 metros por segundo, hallamos que la distancia entre el afelio y el perihelio es igual a 47 unidades astronómicas. Todavía no es sino una burda aproximación. Si afinamos tomando tramos de 10 metros por segundo, hallamos que esta misma distancia es de 42 unidades astronómicas. Afinando cada vez más el recorte de velocidades, constatamos claramente que estas longitudes se acercan cada vez más a un valor límite que gira en torno a 38,45. Este valor límite corresponde entonces a la distancia real recorrida por el cometa entre los dos puntos extremos de su trayectoria.

En cierto modo, cabe arriesgarse a decir que este resultado límite corresponde al resultado obtenido al acortar la trayectoria del cometa en una infinidad de intervalos infinitamente cortos. Análogamente, el método de Arquímedes para calcular π llegaba a afirmar que un círculo es un polígono que posee una infinidad de lados infinitamente pequeños. Todo el problema de estas dos afirmaciones radica en la noción de infinito. Como sabemos desde Zenón, el infinito es una noción ambigua y subversiva cuyo manejo nos lleva a un equilibrio peligroso al borde del abismo de las paradojas.

Se nos ofrecen entonces dos opciones: o bien rehusar categóricamente toda intervención del infinito y hallarnos reducidos a estudiar laboriosamente los problemas de la física newtoniana mediante límites de sucesiones de aproximaciones, o bien armarnos de valor para penetrar prudentemente en la ciénaga de las subdivisiones infinitamente finas. Esta segunda vía es la elegida por Newton en sus *Principia mathematica*. Lo sigue enseguida el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, quien descubrió de manera independiente los mismos conceptos y desarrolló con más precisión ciertas nociones que resultaban confusas en Newton. De estas exploraciones va a nacer una nueva rama de las matemáticas que recibirá el nombre de cálculo infinitesimal.

La cuestión de la paternidad del cálculo infinitesimal fue largamente debatida en los años siguientes. Si Newton fue en efecto el primero que emprendió esta senda a partir de 1669, tardó en dar a conocer sus resultados y Leibniz se le adelantó en el último momento publicando sus trabajos en 1684, tres años antes de los *Principia mathematica*. Este enredo de fechas no dejará de generar una viva controversia entre el inglés y el alemán, cada uno de los cuales se atribuirá la invención de la teoría y llegarán a acusarse mutuamente de plagio. No obstante, hoy parece que ambos sabios no habrían tenido conocimiento mutuo de sus trabajos y habrían inventado el cálculo infinitesimal de manera independiente.

Como sucede a menudo con las premisas de una teoría, no todo es perfecto desde el comienzo. En los trabajos de Newton y Leibniz hay numerosos aspectos que carecen todavía de rigor y de justificación. Como ocurriera en su momento con los números imaginarios, se constata que algunos métodos funcionan y otros no, pero sin saber explicar demasiado bien por qué.

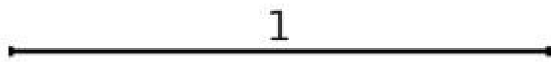
El objetivo del cálculo infinitesimal pasa a ser entonces cartografiar este territorio todavía desconocido balizando los puntos de paso autorizados y los que, por el contrario, conducen a los callejones sin salida y a las paradojas. En 1748, la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi publica las *Instituzioni analitiche*, o las *Instituciones analíticas*, que hacen un primer balance completo sobre el estado de la joven disciplina. Un siglo más tarde, será el alemán Bernhard Riemann quien realice los últimos trabajos que permitirán hacer practicable el terreno sin ningún peligro.

A partir de entonces, los matemáticos cultivarán plenamente el cálculo infinitesimal y comenzarán a plantearse multitud de preguntas a años luz de las aplicaciones físicas originarias. Y es que, muy lejos de ser una simple herramienta, la teoría se reveló apasionante para el estudio y de una extraordinaria belleza. Y, como la ciencia es una interminable partida de pimpón, estos nuevos desarrollos van a ofrecer poco a poco nuevas aplicaciones en otros campos distintos de la astronomía.

Se recurrirá a los infinitesimales en todos los problemas en los que, como la trayectoria del cometa, intervienen magnitudes que varían de forma continua. En meteorología, para modelizar y predecir la evolución de la temperatura o de la presión atmosférica. En oceanografía, para seguir las corrientes marinas. En aerodinámica, para controlar la penetración en el aire de un ala de avión o de diversos artefactos espaciales. En geología, para seguir la evolución del manto terrestre y estudiar los volcanes, los seísmos o, a más largo plazo, la deriva de los continentes.

En el transcurso de sus exploraciones, los matemáticos descubrirán en el mundo infinitesimal una multitud de resultados extraños que, en algunos casos, los sumergirán en una intensa perplejidad.

Una de las primeras ideas que pueden surgir al intentar definir un intervalo infinitamente pequeño es la de coger puntos. Como bien había precisado el propio Euclides, un punto es el elemento geométrico más pequeño. Con una longitud igual a 0, es infinitamente pequeño. Por desgracia, esta idea, demasiado simple para funcionar, va a fracasar. Para comprender por qué, observemos este segmento de recta que mide una unidad de longitud.



El segmento está constituido por infinitos puntos, cada uno de los cuales posee una longitud igual a 0. Por tanto, parece posible decir que la longitud del intervalo es igual a infinitas veces 0. En lenguaje algebraico, esto se expresa como $\infty \times 0 = 1$, donde ∞ es el símbolo del infinito. El problema de esta conclusión es que, si consideramos ahora un intervalo de longitud 2, también estará compuesto por infinitos puntos, con lo que esta vez resultará $\infty \times 0 = 2$. ¿Cómo puede el mismo cálculo tener dos resultados diferentes? Y, al hacer variar la longitud del intervalo, podemos obtener asimismo que $\infty \times 0$ equivale a 3, a 1000 o incluso a π.

De este experimento hemos de sacar una conclusión: los conceptos de cero y de infinito utilizados en este contexto no están definidos con la suficiente precisión para el uso que queremos hacer de ellos. Un cálculo tal como x 0, cuyo resultado varía en función de su interpretación, se denomina «forma indeterminada». Es imposible utilizar estas formas en los cálculos algebraicos sin ver proliferar de inmediato las paradojas. Si se autorizase la multiplicación $\infty \times 0$, habría que aceptar que 1 es igual a 2 y otras aberraciones de este tenor. En resumidas cuentas, hay que buscar otra solución.

Segundo intento: puesto que un intervalo infinitesimal no puede ser un solo punto, podría tratarse de un segmento delimitado por dos puntos distintos, pero infinitamente próximos. Aunque la idea es seductora, volvemos a toparnos con una dificultad, pues tales puntos no existen. La distancia entre dos puntos puede ser tan pequeña como deseemos, pero seguirá teniendo una longitud positiva. Un centímetro, un milímetro, una milmillonésima de milímetro o incluso menos si se quiere: todas estas longitudes son ciertamente pequeñas, pero en ningún caso infinitesimales. En otros términos, dos puntos distintos no se tocan jamás.

Hay algo muy desconcertante en este enunciado. Cuando dibujamos una línea continua, como un segmento, carece de huecos y, sin embargo, los puntos que la componen no se tocan. Ningún punto está en contacto directo con otro. La ausencia de huecos en la línea obedece únicamente a la acumulación infinita de puntos infinitamente pequeños. Y, si interpretamos los puntos de la recta mediante su coordenada, el mismo fenómeno puede traducirse en términos algebraicos: dos números diferentes no se siguen nunca directamente; siempre hay otros infinitos números que vienen a deslizarse entre ellos. Entre los números 1 y 2 está el 1,5. Entre los números 1 y 1,1 está el 1,05. Y entre los números 1 y 1,0001 está el 1,00005. Podríamos continuar así mucho tiempo. El número 1, como todos los demás, carece de sucesor inmediato en contacto con él. Y, sin embargo, los números se agregan infinitamente a su alrededor, asegurando la continuidad perfecta de su larga sucesión.

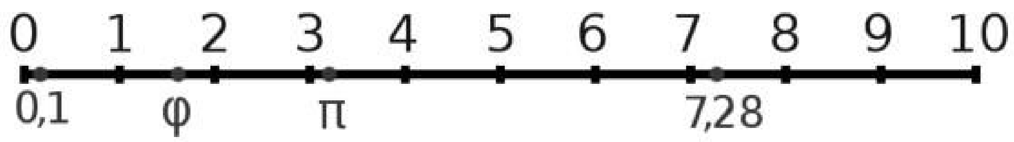
Tras estos dos intentos infructuosos, debemos decidirnos a admitir que los números clásicos, tal como se habían definido hasta entonces, no son lo bastante potentes como para generar cantidades infinitamente pequeñas. Estas criaturas imperceptibles que, sin valer cero, son no obstante más pequeñas que todos los números positivos, van a tener que inventarse por completo. Eso es lo que hicieron Leibniz y los sabios que siguieron sus pasos en la construcción del cálculo infinitesimal. Durante tres siglos, se esforzaron en definir las reglas de cálculo aplicables a estas nuevas cantidades y en delimitar su campo de acción. Crearon así, entre los siglos XVII y XX, todo un arsenal de teoremas que permitían responder con gran eficacia a los problemas planteados por los infinitesimales.

¿Números que en realidad no son tales, pero que se emplean no obstante como intermediarios en el cálculo? Esta situación comienza a hacerse familiar en lo sucesivo. Los negativos y los imaginarios ya pasaron por ello. Pero, como en cada ocasión, el proceso de asimilación es largo y resulta difícil predecir su final. En la década de 1960, el matemático estadounidense Abraham Robinson inició un nuevo modelo, bautizado como análisis no estándar, que integraba los infinitesimales como números de pleno derecho. Sin embargo, a diferencia de los imaginarios, las cantidades infinitesimales todavía no han adquirido realmente, a comienzos del siglo XXI, el título de números auténticos. El modelo no estándar de Robinson sigue siendo marginal y poco utilizado.

Tal vez se necesiten nuevos descubrimientos, evoluciones y teoremas cruciales para que la teoría no estándar se imponga como indispensable. Puede que, por el contrario, nunca llegue a tener el potencial para convertirse en el modelo dominante, y los infinitesimales no lleguen a equipararse jamás a sus ilustres predecesores, los números negativos e imaginarios. El análisis no estándar es ciertamente bello, pero quizás no lo suficiente y con demasiados pocos beneficios como para suscitar un entusiasmo general. Después de solo unas décadas de existencia, el modelo de Robinson sigue siendo muy joven, y les corresponde a los matemáticos del futuro decidir su suerte.

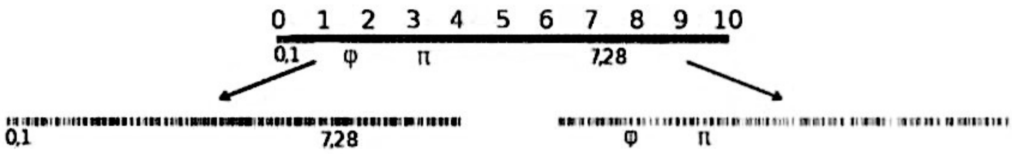
Entre los desarrollos más fructíferos del cálculo infinitesimal, una de las ramas más curiosas es la teoría de la medida, concebida justo a comienzos del siglo XX por el francés Henri-Léon Lebesgue. La pregunta planteada es la siguiente: ¿es posible, gracias a los infinitesimales, imaginar y medir nuevas figuras geométricas que siguen siendo inaccesibles a la regla y al compás? La respuesta es afirmativa, y estas figuras inéditas mandarán a paseo en unos años hasta las leyes más intuitivas de la geometría clásica.

Tomemos, por ejemplo, un segmento graduado de 0 a 10.



A la manera de Descartes, esta graduación permite asociar cada punto del segmento a un número comprendido entre el 0 y el 10. En este segmento cabe distinguir entonces los puntos que corresponden a números que tienen una escritura decimal finita (por ejemplo 0,1 o 7,28) y los que tienen infinitas cifras después de la coma (como π o el número áureo φ). ¿Qué sucede entonces si dividimos nuestro segmento según este criterio? En otros términos, si coloreamos de oscuro los puntos de la primera categoría y los otros de claro, ¿cómo serán las dos figuras geométricas, oscura y clara, así representadas?

No resulta fácil responder esta pregunta, ya que estas dos categorías de números se entrecruzan infinitamente. Si tomamos un intervalo de números, por pequeño que sea, seguirá conteniendo a la vez puntos oscuros y puntos claros. Entre dos puntos claros existe siempre al menos un punto oscuro y entre dos puntos oscuros existe siempre al menos un punto claro. Así pues, las dos figuras se asemejan a líneas de partículas infinitamente finas que están perfectamente ensambladas entre sí.

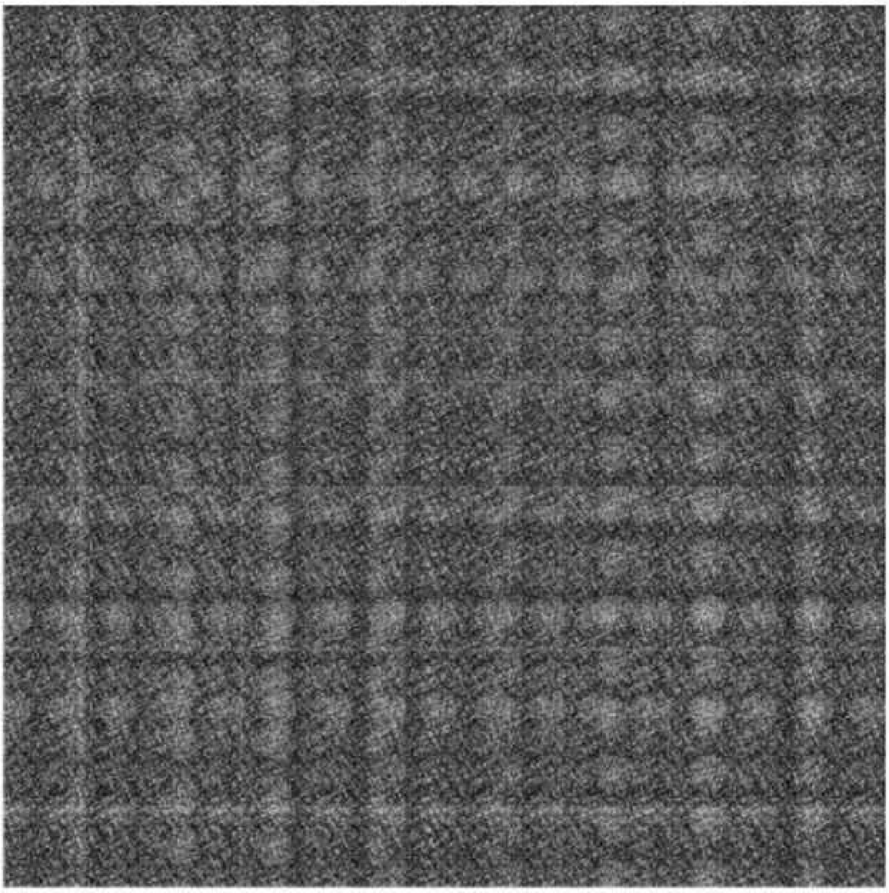


El segmento [0,10] está dividido en dos partes: a la izquierda los números con desarrollo decimal finito y a la derecha los que tienen desarrollo decimal infinito.

La representación de la página anterior es, desde luego, errónea. No es más que una burda visualización, puesto que los detalles en ella visibles se dibujan muy pequeños, pero no son realmente infinitesimales. Es imposible dibujar concretamente estas figuras, que solo pueden aprehenderse mediante el álgebra y el razonamiento.

Se plantea entonces la pregunta: ¿cuánto miden estas figuras? Puesto que el segmento de partida posee una longitud igual a 10, estas dos figuras deberían sumar la misma longitud entre las dos, pero ¿cómo se hace el reparto? ¿Mide 5 cada una o hay una más larga que la otra? La respuesta que descubrieron los matemáticos que se ocuparon de este problema es sorprendente. Absolutamente toda la longitud la acapara la figura compuesta por números de escritura infinita. La figura clara mide 10 y la figura oscura 0. Aunque ambos conjuntos parecen iguales en su enmarañamiento, hay infinitamente más puntos claros que puntos oscuros.

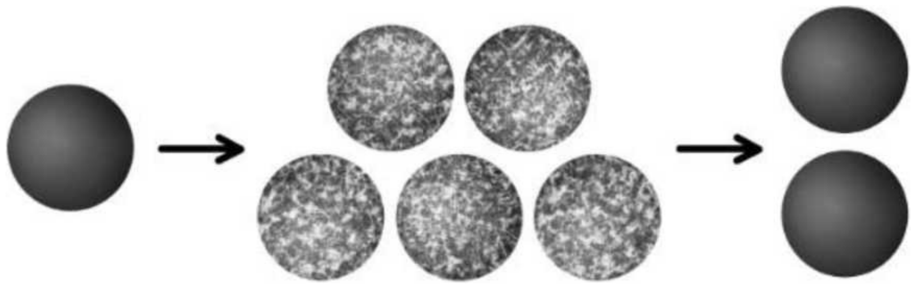
Con las coordenadas cartesianas, este tipo de figuras granuladas puede generalizarse a las superficies y a los volúmenes. Por ejemplo, puede considerarse el conjunto de los puntos de un cuadrado cuyas dos coordenadas tienen un desarrollo infinito.



Una vez más, se trata de una burda representación que solo nos da una vaga idea de la precisión infinita de los detalles.

La medida de las figuras granuladas va a desembocar en uno de los resultados más asombrosos de las matemáticas. Y es que, pese a todos los esfuerzos de los matemáticos que se interesaron por este problema, algunas de estas figuras siguen siendo imposibles de medir. Esta imposibilidad la pusieron de manifiesto en 1924 Stefan Banach y Alfred Tarski, que descubrieron un contraejemplo al principio del puzle.

Encontraron la manera de cortar una bola en cinco trozos de tal forma que, al volver a ensamblar estas piezas, es posible construir dos bolas rigurosamente idénticas a la primera y sin ningún hueco.



Las cinco figuras intermediarias que utilizan son precisamente figuras granuladas con despieces infinitesimales. Si las piezas del puzle de Banach-Tarski fueran medibles, entonces la suma de sus volúmenes sería igual a su vez al volumen de la bola de la que proceden más el volumen de las dos bolas que integran. Dado que esto resulta imposible, se impone una sola conclusión: la propia noción de volumen carece de sentido en estas figuras.

De hecho, el resultado de Banach y Tarski tiene un alcance mucho mayor, puesto que afirma que, si cogemos dos figuras geométricas clásicas de tres dimensiones, siempre es posible dividir la primera en un cierto número de piezas granuladas que permitan reconstruir la segunda. Así, por ejemplo, es posible dividir en varios trozos una bola del tamaño de un guisante, y reconstruir con estos trozos una bola del tamaño del Sol sin ningún hueco en su interior. Este despiece se denomina a menudo erróneamente «paradoja de Banach-Tarski», por ser claramente contrario a la intuición. Sin embargo, no se trata de una paradoja, sino de un teorema que las figuras granuladas hacen posible sin que el razonamiento sufra contradicción alguna.

Por supuesto, la naturaleza infinitesimal de estos despieces los vuelve totalmente irrealizables en la práctica. Las figuras granuladas permanecen hasta la fecha en el armario de las curiosidades matemáticas sin aplicaciones físicas. ¿Quién sabe si no saldrán de allí algún día para hallar usos inesperados?

Capítulo 15

Medir el futuro

Marsella, 8 de junio de 2012.

Esta mañana me he levantado de madrugada. Un poco nervioso, pero ardiente de impaciencia, he engullido rápidamente mi desayuno, me he puesto mi camisa más bonita[16] y he salido de casa. Fuera, el sol se estira en el cielo de la Provenza y el frescor de la noche se evapora precipitadamente. El día promete ser cálido. En el Puerto Viejo se instala el mercado de pescado, mientras algunos turistas matinales deambulan ya por la Canebiere.

Pero hoy no tengo tiempo de pasear. Bajo al metro y me dirijo al barrio de Chateau-Gombert, al norte de la ciudad. Allí se encuentra el CMI, Centro de Matemáticas e Informática, donde trabajo desde hace cuatro años. Un centenar de matemáticos trabajan aquí a diario. Al llegar a mi despacho, compruebo por última vez mi material. Tres grandes recipientes semiesféricos llenos de bolas multicolores y, al lado, una pila de folletos en cuya portada puede leerse:

Urnas interactuantes

TESIS

presentada para obtener el grado de doctor,

especialidad de Matemáticas,

por Mickael Launay,

bajo la dirección de Vlada Limic

Hoy es mi último día en el CMI. A las dos de la tarde, voy a defender mi tesis de doctorado.

Los años de tesis forman un período atípico en la vida de un científico. Aunque en teoría seguimos siendo estudiantes, los doctorandos ya no tenemos que asistir a clase ni aprobar exámenes trimestrales. En realidad, nuestras jornadas se parecen mucho más a las de los investigadores de pleno derecho. Leer los últimos artículos aparecidos, discutir con otros matemáticos, participar en seminarios, trabajar para hacer progresar nuestro campo, para plantear conjeturas, para formular nuevos teoremas, para demostrarlos y redactarlos. Todo ello bajo el control de un matemático aguerrido encargado de guiar nuestros primeros pasos en el mundo de la investigación y de enseñarnos los entresijos del oficio. Por lo que a mí respecta, mi directora de tesis es la matemática franco-croata Vlada Limic, especialista en el tema sobre el que he investigado a lo largo de estos cuatro años. Sus trabajos y los míos se encuadran en una rama de las matemáticas surgida en el siglo XVII: las probabilidades.

Para comprender los retos de esta disciplina, hemos de sumergirnos de nuevo en las profundidades de la historia. Hasta las dos de la tarde, salgamos del CMI y déjame llevarte por los aventurados caminos de lo aleatorio.

Hace mucho tiempo que el azar fascina. Desde la prehistoria, los humanos han observado la multitud de fenómenos inexplicados, irregulares, sin causas aparentes, que les ofrecía la naturaleza. En un principio, y a falta de algo mejor, se acusaba a los dioses. Eclipses, arcoíris, terremotos, epidemias, crecidas excepcionales de los ríos o cometas son algunas de las manifestaciones que se interpretaban como mensajes divinos dirigidos a quien supiera descifrarlos. La tarea se confiaba a brujos, oráculos, sacerdotes u otros chamanes que, como tenían que ganarse la vida, realizaban sobre la marcha toda una panoplia de rituales destinados a interrogar a los dioses sin esperar que estos se dignasen a manifestarse por sí mismos. En otros términos, los hombres comenzaron a imaginar medios para crear lo aleatorio a la carta.

La belomancia, o el arte de la adivinación mediante flechas, constituye uno de los testimonios más antiguos. Inscribe en flechas las diferentes preguntas de opción múltiple que diriges a tu dios, colócalas en tu carcaj, agítalas y saca una al azar: ahí tienes su respuesta. Así es, por ejemplo, como Nabucodonosor II, rey de Babilonia, elegía los enemigos a los que declarar la guerra en el siglo VI a. C. Además de las flechas, los objetos extraídos podían adoptar múltiples formas: guijarros, tablillas, varillas o bolas de colores. Los romanos daban a estos objetos el nombre de *sors*. De este término proviene nuestra expresión «echar a suerte», pero también la palabra *sortilegio*, que designa en un principio bien al adivino que interroga a los dioses, bien el veredicto del propio dios.

Poco a poco, los mecanismos de sorteo aleatorio van a multiplicarse y a encontrar numerosas aplicaciones. Varios sistemas políticos recurrirán a ellos, como en Atenas para designar a los quinientos ciudadanos que integraban la Boulé o, unos siglos más tarde, en Venecia, en el proceso de designación del *dux*. El azar también va a revelarse como una gran fuente de inspiración para los creadores de juegos. Así se inventaron el cara o cruz, los dados numerados a los que prestaron sus formas los sólidos platónicos, o los juegos de cartas.

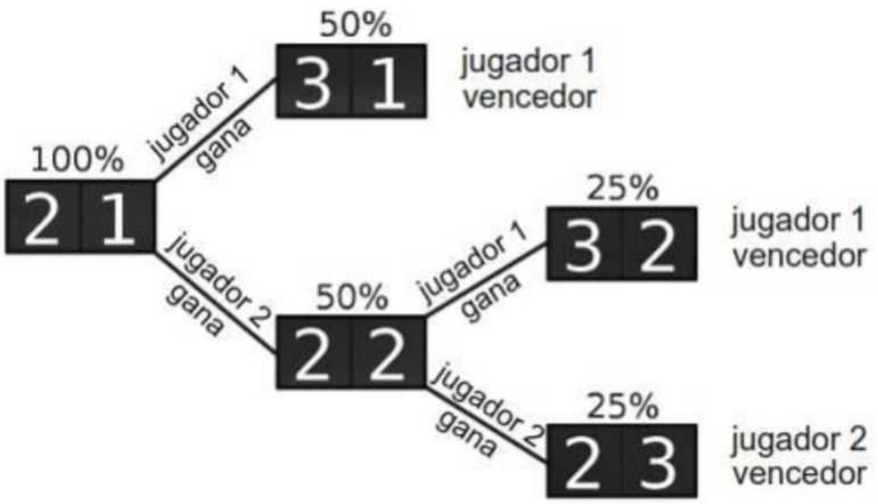
Es justamente por mediación de los juegos de azar como las decisiones de los dioses acabarán por atraer la atención de algunos matemáticos. Estos tendrán la extraña idea de jugar a medidores del destino estudiando, mediante la lógica y el cálculo, las propiedades del futuro antes de que acontezca.

Todo comienza a mediados del siglo XVII, durante una reunión de la Academia Parisina, predecesora de la Academia de las Ciencias, creada en 1635 por el matemático y filósofo Marin Mersenne. En el transcurso de una discusión entre sabios de diferentes ámbitos, el escritor Antoine Gombaud, aficionado a las matemáticas en sus ratos libres, somete a la asamblea un problema que le han planteado. Imaginemos que dos jugadores han invertido una cierta suma de dinero en un juego de azar a tres partidas ganadas, pero que el juego se interrumpe cuando el primer jugador gana dos partidas a una. ¿Cómo deben repartirse la apuesta estos dos jugadores antes de separarse?

Entre los científicos presentes aquel día, el problema atrae especialmente la atención de dos franceses: Pierre de Fermat y Blaise Pascal. Tras algunos intercambios epistolares, ambos concluyen que tres cuartas partes de la apuesta deben ser para el primer jugador y el cuarto restante para el segundo.

Para llegar a esta respuesta, los dos sabios enumeraron la serie de escenarios que habrían podido producirse si se hubiera terminado la partida, evaluando las posibilidades de llegar a cada uno de ellos. Así, en la hipotética ronda siguiente, el primer jugador habría tenido un 50 % de probabilidades de ganar la partida, en tanto que el segundo jugador habría tenido el 50 % de probabilidades de empatar. Y, en esta segunda eventualidad, habrían jugado una nueva ronda con las mismas probabilidades de ganar para cada uno de los dos jugadores, lo que da lugar a dos escenarios, cada uno de los cuales con un

25 % de probabilidades de producirse. Este razonamiento puede expresarse mediante el siguiente gráfico, que resume los diferentes futuros posibles de la partida.



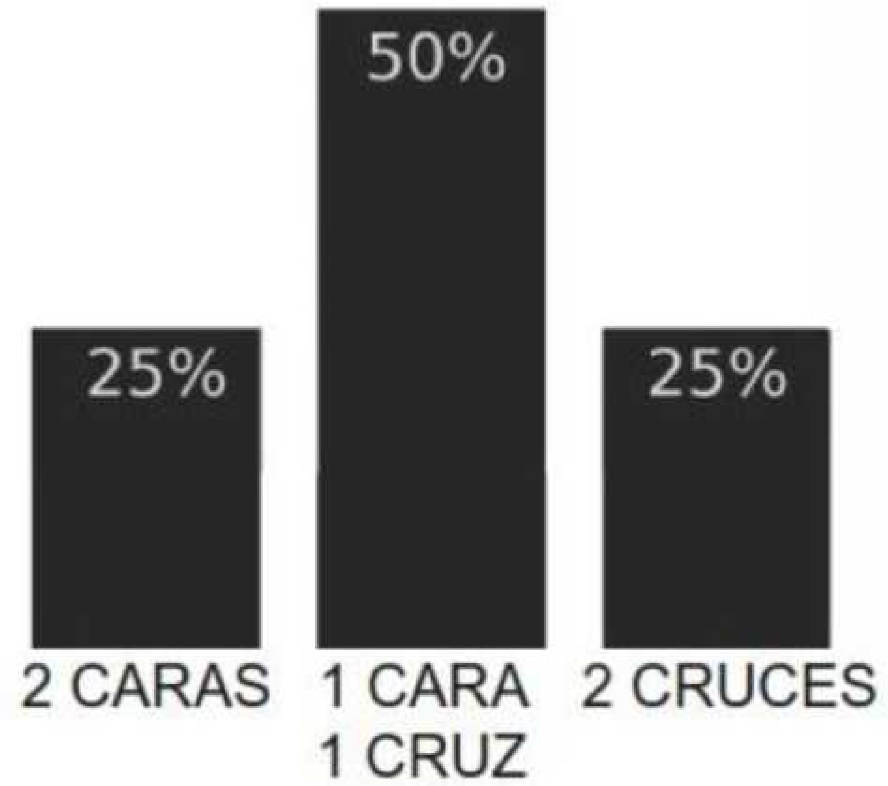
En resumen, constatamos que el 75 % de los futuros conducen a la victoria del primer jugador, mientras que solo el 25 % llevan a la del segundo. Así pues, la conclusión de Pascal y Fermat reparte el dinero en juego según estas mismas proporciones: lo justo es que el primer jugador se quede con el 75 % de la apuesta y el segundo con el 25 % restante.

El razonamiento de los dos sabios franceses va a revelarse particularmente fecundo. La mayor parte de los juegos de azar pueden ser objeto de este tipo de examen. El matemático suizo Jacques Bernoulli fue uno de los primeros en seguir su ejemplo escribiendo, a finales del siglo XVII, una obra titulada *Ars conjectandi*, o *El arte de la conjetura*, que no se publicará hasta después de su muerte, en 1713. En este libro, retoma el análisis de los juegos de azar clásicos y enuncia por vez primera uno de los principios fundamentales de la teoría de las probabilidades: la ley de los grandes números.

Esta ley afirma que, cuanto más repetimos una experiencia aleatoria un gran número de veces, más previsible se vuelve la media de los resultados y se aproxima a un valor límite. En otros términos, incluso el más puro azar acaba, a la larga, generando comportamientos medios que no tienen nada de aleatorio.

Para comprender este fenómeno, no es preciso ir a buscar demasiado lejos. El simple estudio de un juego de cara o cruz permite ver emerger la ley de los grandes números. Si lanzamos una moneda equilibrada, cada una de las caras tiene un 50 % de probabilidades de salir, lo cual puede representarse mediante el siguiente histograma.

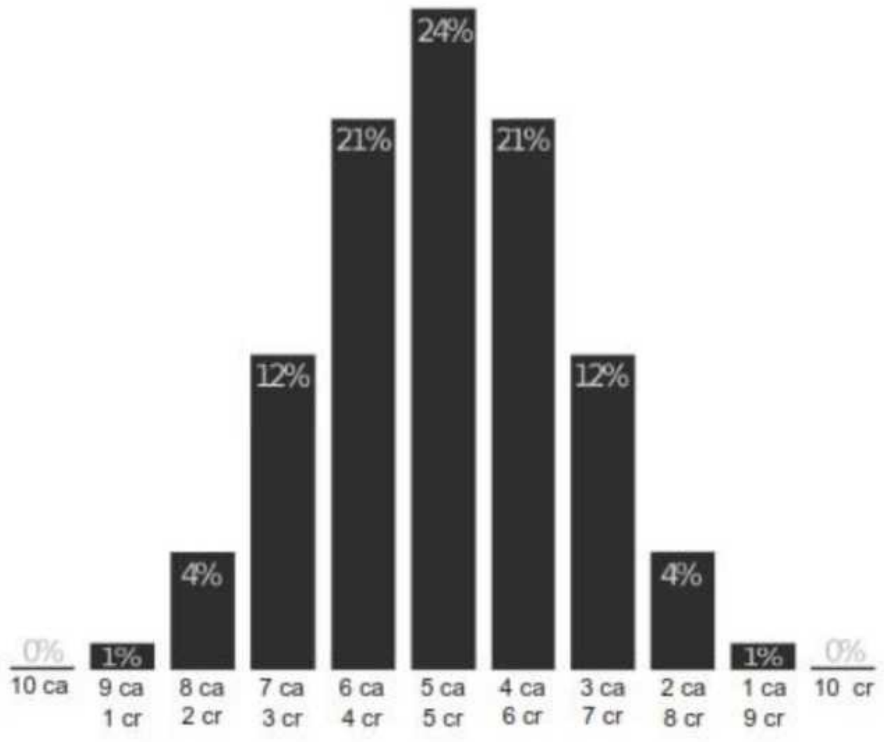
Imaginemos ahora que lanzamos una moneda dos veces seguidas y contamos el número total de caras y de cruces. Tenemos entonces tres posibilidades: dos caras, dos cruces o una cara y una cruz. Sería tentador pensar que estas tres eventualidades suceden en proporciones iguales, pero no es el caso. En realidad, hay un 50 % de posibilidades de obtener una cara y una cruz, mientras que las probabilidades de dos caras o dos cruces son del 25 % cada una.



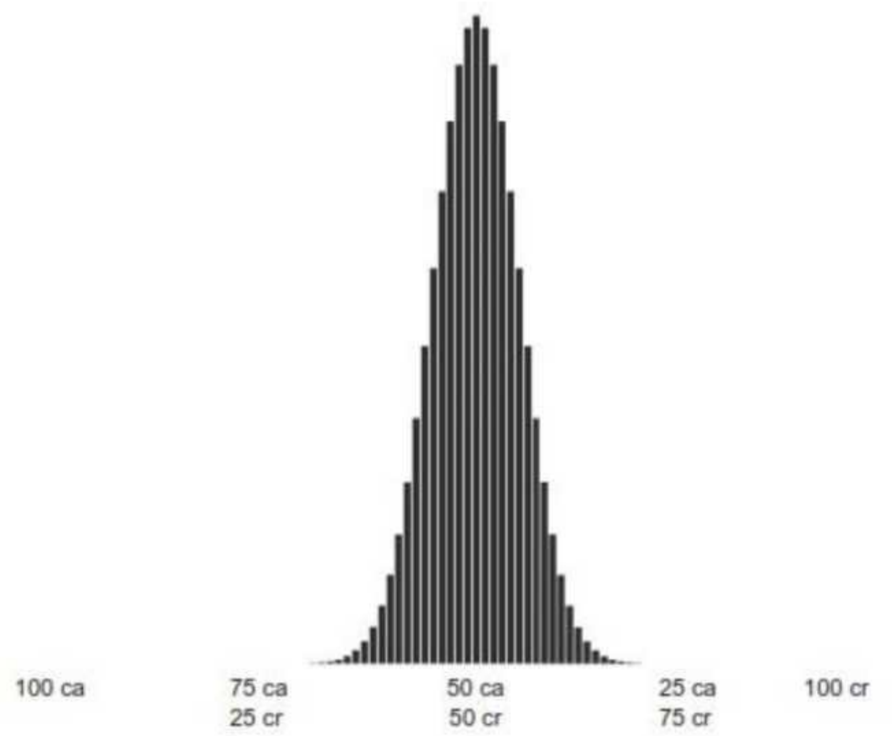
Este desequilibrio viene provocado por el hecho de que dos lanzamientos diferentes pueden dar el mismo resultado final. Cuando lanzamos dos veces la moneda, existen en realidad cuatro escenarios posibles: cara-cara, cara-cruz, cruz-cara y cruz-cruz. Los escenarios cara-cruz y cruz-cara arrojan el mismo resultado final de una cara y una cruz, lo cual explica que esta eventualidad sea dos veces más probable. De la misma manera, los jugadores saben bien que, si se lanzan los dados, su suma tiene más probabilidades de ser igual a 7 que a 12, puesto que hay varias formas de obtener 7 (1 + 6; 2 + 5; 3 + 4; 4 + 3; 5 + 2 y 6 + 1), mientras que solo hay una forma de obtener 12 (6 + 6).

Conforme aumenta el número de lanzamientos, se acentúa el fenómeno. Los escenarios que se alejan de la media se vuelven poco a poco ultraminoritarios frente a los escenarios medios. Si lanzamos una moneda diez veces seguidas, hay en torno a un 66 % de probabilidades de obtener entre 4 y 6 caras. Si lanzamos esta misma moneda cien veces, tendremos un 96 % de probabilidades de obtener entre 40 y 60 caras. Y, si la lanzamos mil veces, tendremos un 99,99999998 % de probabilidades de lograr entre 400 y 600 caras.

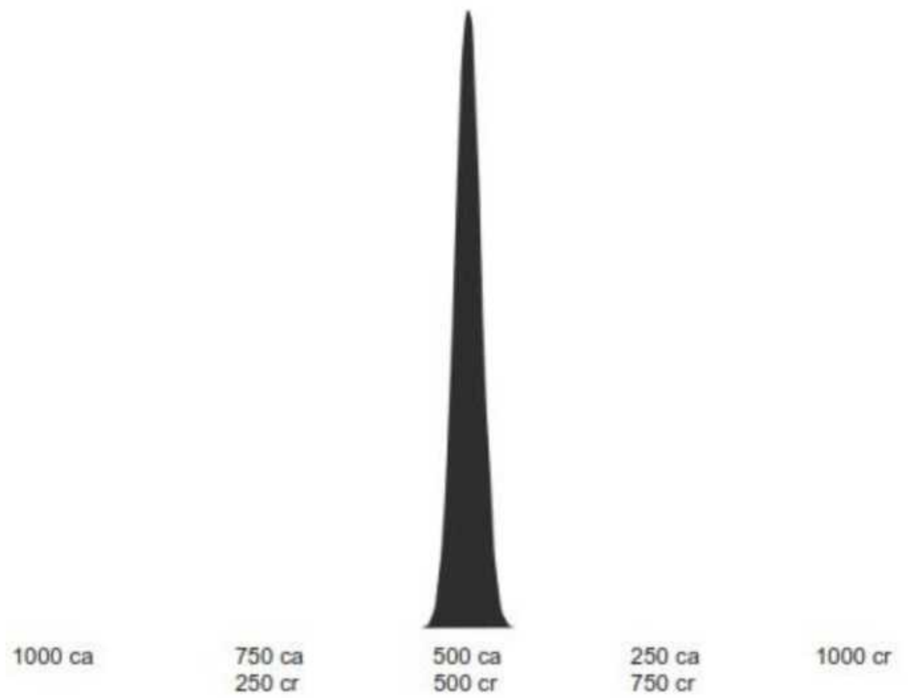
Si dibujamos los histogramas correspondientes a 10, 100 y 1000 lanzamientos, constatamos que, poco a poco, la inmensa mayoría de los futuros posibles se estrechan en torno al eje central, hasta tal punto que los rectángulos correspondientes a las situaciones extremas se vuelven invisibles a simple vista.



Histograma de probabilidad de los escenarios posibles al lanzar 10 monedas.



Histograma de probabilidad de los escenarios posibles al lanzar 100 monedas.



Histograma de probabilidad de los escenarios posibles al lanzar 1000 monedas.

En resumen, esto es lo que afirma la ley de los grandes números: al repetir indefinidamente una experiencia aleatoria, la media de los resultados obtenidos se aproximará indefectiblemente a un valor límite que ya no tiene nada de aleatorio.

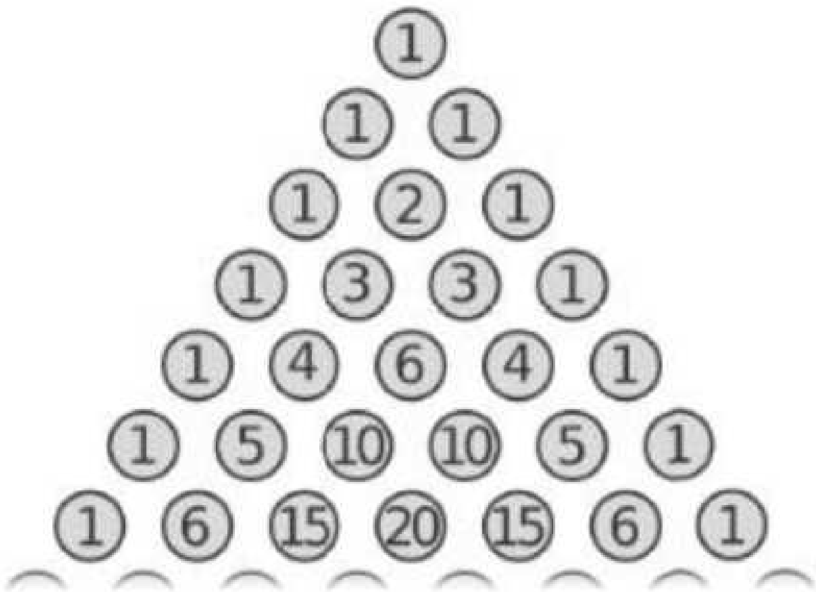
Este principio se halla en la base del funcionamiento de los sondeos y de otras estadísticas. En una población dada, cojamos 1000 personas y preguntémosles si prefieren el chocolate negro o el chocolate con leche. Si 600 responden negro y 400 con leche, tenemos todas las probabilidades de que en la población entera, incluso si está compuesta por millones de individuos, la proporción se aproxime igualmente al 60 % que lo prefieren negro y el 40 % con leche. Interrogar sobre sus gustos a una persona escogida al azar puede considerarse una experiencia aleatoria al mismo nivel que el lanzamiento de una moneda. Las opciones cara y cruz son simplemente reemplazadas por negro y con leche.

Por supuesto, habría sido posible tener mala suerte y dar con 1000 personas a las que les gustase el chocolate negro o con 1000 personas a las que les gustase el chocolate con leche. Ahora bien, estos escenarios extremos tienen una probabilidad absolutamente ínfima de acontecer, y la ley de los grandes números nos asegura que, al interrogar a una muestra suficientemente grande, la media obtenida tiene muchas probabilidades de estar cerca de la media de la población entera.

Llevando más lejos el desciframiento de los múltiples escenarios y de sus probabilidades de producirse, resulta posible asimismo establecer un intervalo de confianza y estimar los riesgos de error. Cabrá decir, por ejemplo, que existe un 95 % de probabilidades de que la proporción de la población que prefiere el chocolate negro se halle comprendida entre el 57 y el 63 %. Por cierto que todo sondeo realizado con honestidad debería ir siempre acompañado por estas cifras que indican su precisión y su fiabilidad.

EL TRIÁNGULO DE PASCAL

En 1654, Blaise Pascal publica una obra titulada *Tratado del triángulo aritmético*. En ella describe un triángulo compuesto por casillas en cuyo interior se inscriben números.



Aquí aparecen representadas solo las siete primeras filas, pero el triángulo puede prolongarse hasta el infinito. Los números que figuran en las casillas se determinan mediante dos reglas. En primer lugar, las casillas que se hallan en los bordes solo contienen el número 1. En segundo lugar, las casillas interiores contienen la suma de las dos casillas que se encuentran inmediatamente encima de ellas. Por ejemplo, el número 6 que se encuentra en la quinta línea es igual a la adición de los dos 3 situados encima de él.

A decir verdad, este triángulo ya se conocía mucho antes de que Pascal se interesase por él. Los matemáticos persas Al-Karaji y Omar Jayam lo mencionan desde el siglo XI. En la misma época lo estudia en China Jia Xian, cuyos trabajos serán prolongados en el siglo XIII por Yang Hui. En Europa, Tartaglia y Viète lo conocían también. No obstante, Blaise Pascal es el primero en dedicarle un tratado tan completo y detallado. Es asimismo el primero en descubrir la existencia de un vínculo estrecho entre el triángulo y el cálculo de los futuros en probabilidad.

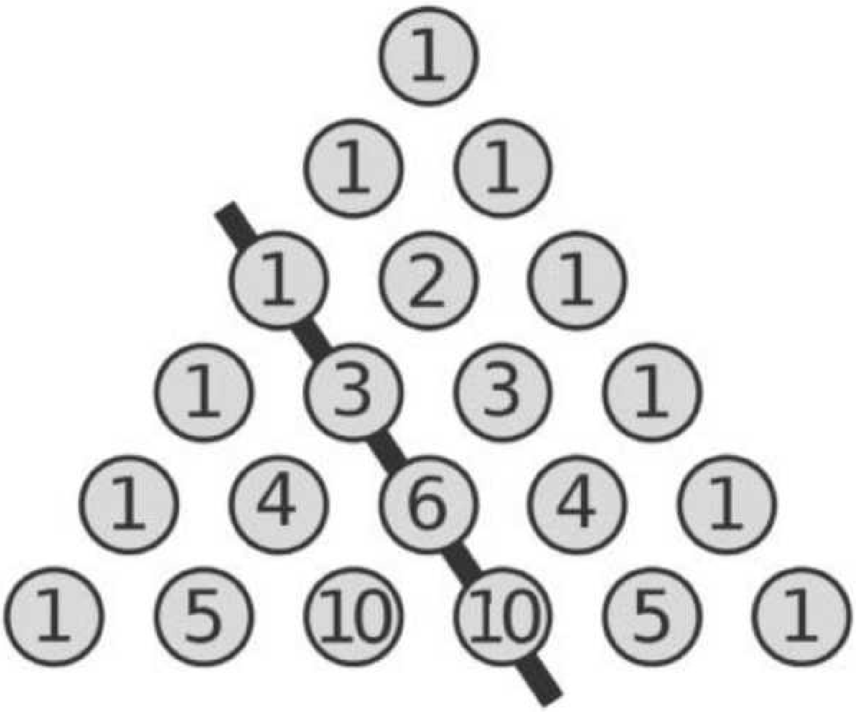
Cada fila del triángulo de Pascal permite, en efecto, contabilizar el número de escenarios posibles de una sucesión de acontecimientos con dos opciones como la cara o la cruz. Si lanzamos una moneda tres veces seguidas, entonces hay ocho futuros posibles: cara-cara-cara, cara-cara-cruz, cara-cruz-cara, cara-cruz-cruz, cruz-cara-cara, cruz-cara-cruz, cruz-cruz-cara y cruz-cruz-cruz. Al hacer balance de estos ocho futuros, se advierte que:

- 1 escenario da tres caras;
- 3 escenarios dan dos caras y una cruz;
- 3 escenarios dan una cara y dos cruces;
- 1 escenario da tres cruces.

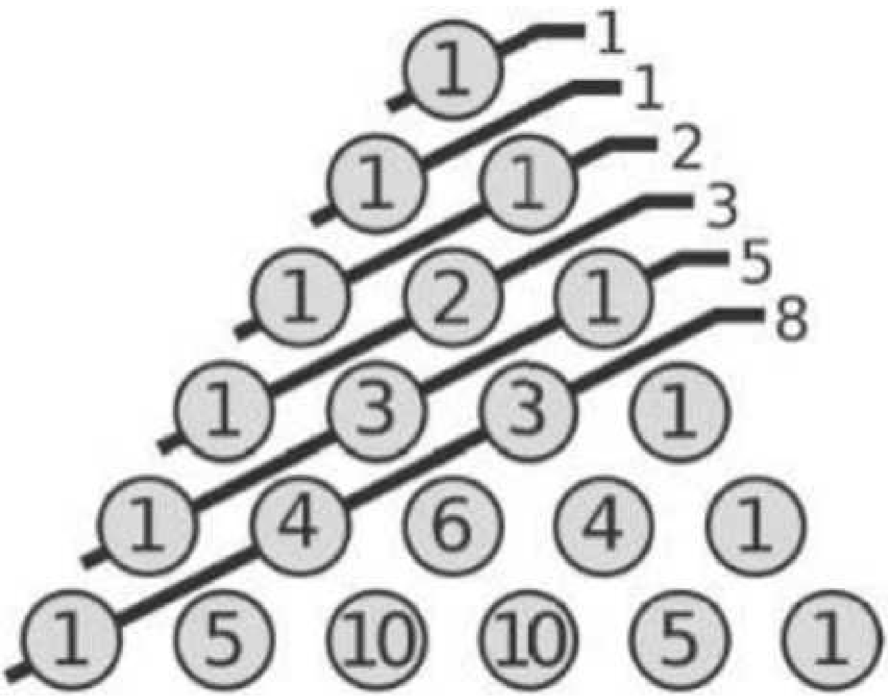
Pues bien, esta secuencia de cuatro números, 1-3-3-1, se corresponde exactamente con la cuarta fila del triángulo. Pascal logra demostrar que no se trata de una casualidad.

Al observar la sexta fila, es posible ver por ejemplo que, al lanzar cinco veces una moneda, hay 10 escenarios que dan 2 caras y 3 cruces. Avanzando en el triángulo, se vuelve posible contabilizar fácilmente los escenarios resultantes de diez lanzamientos de una moneda: se hallan inscritos en la fila 11. Cien lanzamientos vendrán dados en la fila 101 y así sucesivamente. Además, gracias al triángulo de Pascal han podido dibujarse con facilidad los histogramas presentados anteriormente. Sin él, el número de futuros llega a ser tan prodigiosamente grande que enseguida resulta imposible enumerarlos todos de forma individual.

Más allá de las probabilidades, el triángulo de Pascal va a revelar igualmente numerosos vínculos con otros ámbitos de las matemáticas. Los números que lo componen resultan, por ejemplo, de gran utilidad en las manipulaciones algebraicas que permiten resolver ciertas ecuaciones. Asimismo, podemos hallar en sus casillas varias sucesiones de números muy conocidos como los números triangulares (1, 3, 6, 10…) en una de sus diagonales o la sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8.), al hacer la adición de los términos a lo largo de las rectas paralelas inclinadas.



La sucesión de números triangulares en el triángulo de Pascal.



En los siglos siguientes, la teoría de las probabilidades desarrolló herramientas cada vez más afinadas y potentes para analizar el conjunto de los futuros posibles. Pronto se estableció una colaboración estrecha y fructuosa con el cálculo infinitesimal. Numerosos fenómenos aleatorios producen, en efecto, futuros que pueden sufrir variaciones infinitamente pequeñas. En un modelo meteorológico, la temperatura varía de forma continua. Al igual que un segmento posee una longitud en tanto que los puntos que lo componen carecen de ella, pueden producirse ciertos acontecimientos mientras que cada uno de los futuros que los componen no tiene ninguna posibilidad de suceder individualmente. La probabilidad de que, dentro de una semana, haga exactamente 23,41 grados o cualquier otra temperatura exacta es igual a 0. Sin embargo, la probabilidad global de que la temperatura esté comprendida entre 0° y 40° es ciertamente positiva.

Otro reto de la teoría de las probabilidades fue comprender el comportamiento de los sistemas aleatorios capaces de modificarse a sí mismos. Lanzada una o mil veces, una moneda sigue siendo la misma, pero muchas situaciones reales no son tan simples. En 1930, el matemático húngaro George Pólya publicó un artículo en el que intentaba entender la propagación de una epidemia en el seno de una población. La sutileza de este modelo viene del hecho de que una epidemia se propaga más rápido cuando ha alcanzado ya a un gran número de personas.

Si hay muchos enfermos en tu entorno, tendrás más probabilidades de enfermar. Y, si caes enfermo, eres tú quien aumenta los riesgos para las personas que te rodean. En resumidas cuentas, el proceso se alimenta a sí mismo y las probabilidades se hallan en constante evolución. Esto es lo que se denomina «azar reforzado».

Los procesos aleatorios reforzados conocieron posteriormente numerosas variantes y múltiples aplicaciones. Una de las más fértiles fue su utilización en dinámica de poblaciones. Tomemos una población animal en la que deseamos seguir la evolución de los caracteres biológicos o genéticos a lo largo de las generaciones. Imaginemos, por ejemplo, que el 60 % de sus individuos tienen los ojos negros y el 40 % los ojos azules. Entonces, por herencia, los individuos nuevos que nacen tienen un 60 % de probabilidades de tener los ojos negros y un 40 % de tenerlos azules. La evolución del color de ojos en esta población tiene, por tanto, una dinámica similar a la propagación de una epidemia: cuanto más abunda un determinado color, más probabilidades tiene este de aparecer de nuevo y, por ende, de aumentar su proporción. El proceso se alimenta a sí mismo.

Así pues, el estudio del modelo de Pólya permite evaluar las probabilidades de evolución de los diferentes caracteres biológicos de las especies. Algunos pueden acabar por desaparecer. Otros, por el contrario, pueden imponerse en el conjunto de la población. Otros se instalan en un equilibrio intermedio y no sufren sino pequeñas variaciones en el transcurso de las generaciones. No es posible saber de antemano cuál de estos escenarios se producirá, pero, como sucede en el juego de cara o cruz, las probabilidades permiten inferir los futuros mayoritarios y prever las evoluciones más probables a largo plazo.

Cuando murió George Pólya en 1985, yo tenía apenas un año. Por tanto, puedo decir que fui contemporáneo, durante unos meses, del iniciador de la teoría sobre la que yo mismo trabajaría y descubriría varios teoremas.

Sin entrar demasiado en detalles, mis resultados conciernen a la evolución de varios procesos aleatorios reforzados que interactúan de manera ocasional. Imaginemos, por ejemplo, varios rebaños de una misma especie que viven por separado en un mismo territorio, pero que permiten de vez en cuando la migración de algunos individuos de un grupo a otro. ¿Qué futuros son posibles y cómo calcular sus probabilidades? Mis investigaciones han aportado elementos para responder este tipo de preguntas.

Por supuesto, mis teoremas son modestos y sería una temeridad mencionarlos en medio de esta gran historia formada por tantos grandes nombres. Aunque, durante mis cuatro años de tesis, creo haber sido un investigador honesto que hace correctamente su trabajo, la importancia de mis descubrimientos resulta irrisoria en comparación con los de muchos otros matemáticos más brillantes que yo. No obstante, fueron suficientes para convencer al tribunal al que se los expuse durante una hora aquel 8 de junio de 2012, y que me concediera el título de doctor.

Resulta bastante emocionante ingresar, mediante esta ceremonia, en una historia tan prestigiosa. El término *doctor* viene del latín *docere*, que significa «enseñar». El doctor es, por tanto, aquel que ha adquirido una maestría suficiente sobre su tema para poder transmitirla a su vez. Desde finales de la Edad Media, las universidades, herederas modernas del Museion de Alejandría o del Bayt al-Hikma de Bagdad, expiden el título de doctorado y ofrecen a la investigación y a la enseñanza científica un marco institucional estable y perenne.

A partir de entonces, las ciencias iniciaron un movimiento que ve sucederse, siglo tras siglo, investigadores, enseñantes y alumnos, en un relevo generacional casi permanente. Resulta divertido observar que, con este funcionamiento, es posible rastrear la ascendencia académica de los científicos. Si mi directora de tesis es la matemática Vlada Limic, a su vez ella había tenido como director al probabilista británico David Aldous unos años antes. Y cabe continuar así durante mucho tiempo. Al ir subiendo de discípulo a maestro, es posible rastrear la «genealogía» completa de un matemático. En la página siguiente puede verse mi linaje, que se remonta al siglo XVI a lo largo de más de veinte generaciones.

Mi antepasado más lejano es, pues, el matemático Niccolo Tartaglia a quien ya conocemos. Resulta imposible remontarnos más lejos, pues el sabio italiano fue autodidacta. Procedente de una familia pobre, la leyenda cuenta incluso que el joven Tartaglia habría robado en su escuela los libros en los que aprendió las matemáticas.

En esta genealogía, nos topamos igualmente con Galileo y con Newton, que ya no necesitan presentación. En una esquina vemos también a Marin Mersenne, el creador de la Academia Parisina en la que nació la teoría de las probabilidades. Su discípulo Gilles Personne de Roberval es el inventor de la balanza de dos astiles que lleva su nombre. Un poco más lejos, Georges Darwin es el hijo de Charles Darwin, padre de la teoría de la evolución.

No hay nada particularmente excepcional en el hecho de encontrarnos a estos personajes en este linaje; la mayoría de los matemáticos cuya genealogía se remonta lo bastante atrás acaban por descubrir en ella grandes nombres. Hay que precisar además que este gráfico solo representa a mis antepasados directos e ignora a mis «primos», muy numerosos. Hoy en día, Tartaglia posee más de trece mil descendientes, y este número continúa aumentando año tras año.

Capítulo 16

La llegada de las máquinas

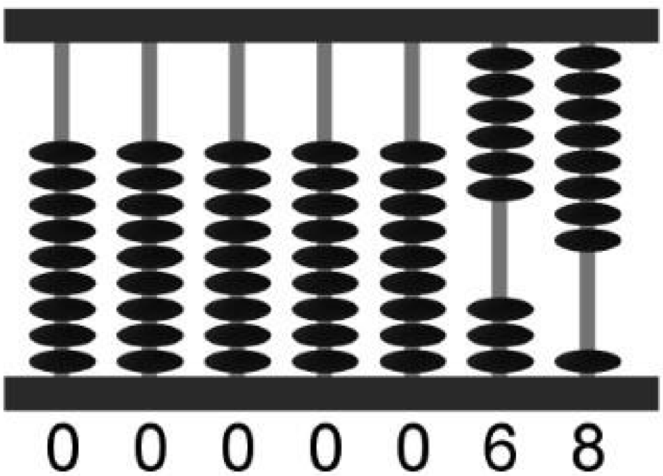
La estación de metro Arts et Métiers es una de las más singulares de París. El viajero que se baja en ella se encuentra de repente como engullido en el vientre de cobre de un gigantesco submarino. Grandes engranajes rojizos salen del techo y una docena de ojos de buey se alinean en sus flancos. Al asomarnos a ellos, descubrimos curiosas representaciones de diversas invenciones antiguas o insólitas. Engranajes elípticos, astrolabios esféricos y ruedas hidráulicas se codean con una aeronave dirigible o un convertidor siderúrgico. Sin la oleada perpetua de los parisinos apresurados que se precipitan y surgen sin tregua en los pasillos subterráneos, apenas nos sorprendería ver aparecer la figura imponente del capitán Nemo recién salido de la novela de Julio Verne.

La decoración del metro no es, sin embargo, más que un anticipo de lo que nos aguarda en la superficie. Hoy me dirijo al Conservatorio Nacional de Artes y Oficios o CNAM, cuyo museo alberga una de las colecciones más importantes de toda clase de máquinas antiguas. Desde los primeros automóviles motorizados hasta los telégrafos de dial, pasando por los manómetros de pistón, los relojes holandeses con autómatas, las pilas en columna, los telares con tarjetas perforadas, las prensas tipográficas de tornillo y los barómetros de sifón, todas estas invenciones resurgidas del pasado me arrastran en el vertiginoso torbellino tecnológico de los cuatro últimos siglos. Suspendido en medio de la gran escalera, me cruzo con un avión del siglo XIX que parece un murciélago gigantesco. A la vuelta de un pasillo, tengo frente a mí el Lama, primer robot imaginado por los sabios rusos del siglo XX para rodar por la superficie del planeta Marte.

Paso rápidamente por delante de todos estos objetos fabulosos y subo directamente al segundo piso. En él se encuentra la galería de los instrumentos científicos. Veo los anteojos astronómicos, las clepsidras, las brújulas, las balanzas de Roberval, los termómetros gigantescos y sublimes globos astronómicos que pivotan sobre sus ejes. Y entonces, de repente, en el rincón de una vitrina, descubro el instrumento que me ha traído hasta aquí: la pascalina. Esta curiosa máquina se presenta en forma de un estuche de latón de 40 centímetros de largo por 20 de ancho, en cuya superficie se han fijado seis ruedas numeradas. Este mecanismo fue concebido en 1642 por Blaise Pascal, que a la sazón contaba solamente diecinueve años. Tengo ante mí la primera máquina de calcular de la historia.

¿La primera? A decir verdad, ya existían dispositivos que permitían hacer cálculos mucho antes del siglo XVII. En cierto modo, los dedos fueron la primera calculadora de todos los tiempos, y el *Homo sapiens* utilizó muy pronto diversos accesorios para contar. Los huesos de Ishango y sus muescas, las fichas de arcilla de Uruk, los palillos de los an tiguos chinos o los ábacos que conocieron un gran éxito desde la Antigüedad, todos estos instrumentos sirven de soporte a la numeración y al cálculo. No obstante, ninguno de ellos encaja en la definición habitual de máquina de calcular.

Para entenderlo, dediquemos unos instantes a detallar el funcionamiento de un ábaco clásico. El objeto está compuesto por varias varillas sobre las que se deslizan bolas perforadas. La primera varilla corresponde a las unidades, la segunda a las decenas, la tercera a las centenas y así sucesivamente. Por tanto, si queremos anotar el número 23, empujamos dos bolas en la columna de las decenas y tres en la de las unidades. Y, si queremos añadir 45, empujamos cuatro decenas y cinco unidades suplementarias, lo que da 68.



En cambio, si la adición incluye una llevada, es preciso hacer una pequeña manipulación suplementaria. Para añadir 5 a 68, solo nos queda una bola disponible en la varilla de las unidades. En este caso, una vez que llegamos a

9, tenemos que bajar de nuevo todas las bolas para proseguir las unidades a partir de 0, pasando una bola de llevada a la columna de las decenas. El resultado es 73.

Aunque no se trata de una manipulación muy complicada, impedirá que el ábaco y todos los mecanismos que preceden a la pascalina accedan a la categoría de máquina de calcular. Para efectuar la misma operación, el usuario no hace el mismo gesto si incluye o no una llevada. En realidad, la máquina no es más que un memorando que recuerda a la persona en qué punto se encuentra, pero siempre le deja la tarea de operar a mano en las diferentes etapas del cálculo. En cambio, cuando efectuamos una adición con una calculadora moderna, no nos preocupa en absoluto la forma en que la máquina encuentra el resultado. Nos da lo mismo que haya o no llevadas. Ya no necesitamos reflexionar ni adaptarnos a la situación, pues el aparato se ocupa de todo.

Siguiendo este criterio, la pascalina es en realidad la primera máquina de calcular de la historia. Aunque su mecanismo es muy preciso y exige una gran habilidad a su constructor, su principio de funcionamiento sigue siendo bastante simple. En la parte superior de la máquina hay seis ruedas con diez muescas numeradas.

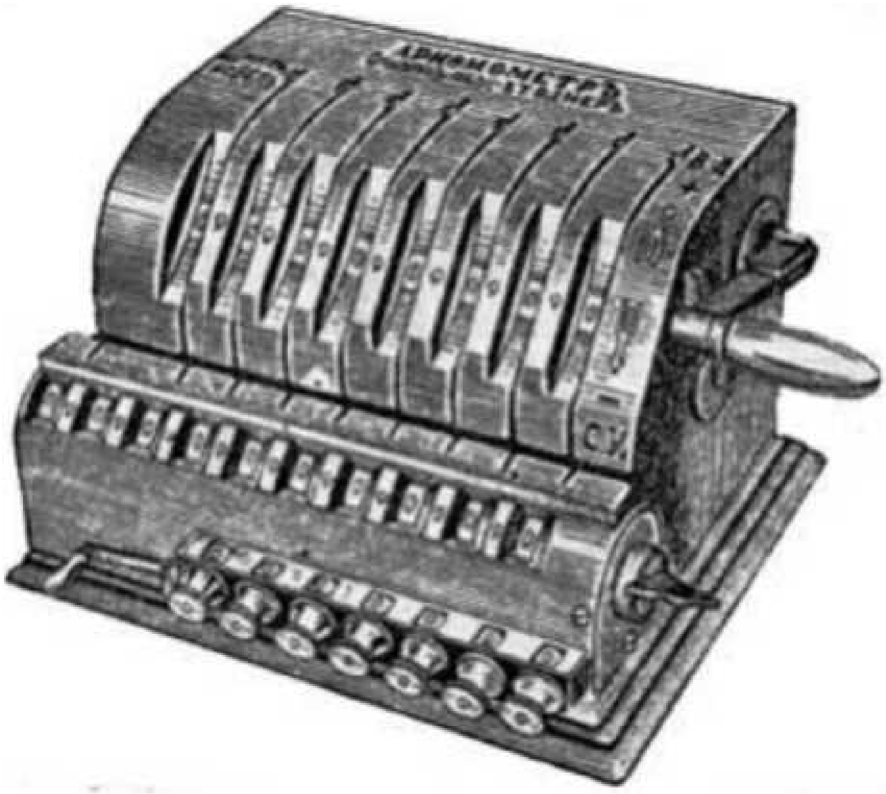
La primera rueda de la derecha representa la cifra de las unidades; la segunda, la cifra de las decenas, y así sucesivamente. Encima de las ruedas se halla la zona de visualización compuesta por seis pequeñas casillas, una por rueda, cada una de las cuales indica una cifra. Para anotar el número 28, giramos simplemente la rueda de las decenas dos muescas en el sentido de las agujas del reloj y la de las unidades ocho muescas. Mediante un sistema interno de engranajes, veremos aparecer entonces las cifras 2 y 8 en las dos casillas correspondientes. Y si ahora deseamos añadir 5 a este número, no necesitamos hacer la llevada nosotros mismos: nos basta con girar la rueda de las unidades cinco muescas y, en el momento en que esta pase de 9 a 0, la cifra de las decenas pasará automáticamente de 2 a 3. La máquina indica entonces 33.

Y esto funciona con tantas llevadas como deseemos. Indiquemos 99 999 en la pascalina y giremos entonces una muesca la rueda de las unidades. Veremos propagarse hacia la izquierda todas las llevadas en cascada para hacer aparecer el número 100 000, sin que el usuario haya tenido que hacer ningún otro gesto.

Después de Pascal, numerosos inventores perfeccionaron su máquina para poder hacer cada vez más operaciones de manera cada vez más rápida y eficaz. A finales de siglo XVII, Leibniz fue uno de los primeros en seguir sus pasos imaginando un mecanismo que permitiera hacer con más facilidad las multiplicaciones y las divisiones. No obstante, su sistema sigue siendo incompleto, y las máquinas que fabrica continúan cometiendo errores de llevada en ciertos casos particulares. Habrá que esperar hasta el siglo XVIII para que sus ideas se pongan en marcha plenamente. Aparecen entonces prototipos cada vez más fiables y eficaces bajo el impulso de inventores cada vez más ingeniosos e imaginativos. La complejización de los mecanismos se hace, no obstante, a costa del tamaño de las máquinas que, de objetos de dimensión modesta, pasan a convertirse a veces en auténticos muebles de pequeño tamaño.

En el siglo XIX, las máquinas de calcular se democratizan y conocen una propagación bastante parecida a la de sus primas, las máquinas de escribir. Numerosas empresas de contabilidad, hombres de negocios o simplemente comerciantes se dotan de estas calculadoras que se integran en el paisaje y no tardan en volverse indispensables. La gente se pregunta cómo había podido vivir sin ellas hasta entonces.

Prosiguiendo mi visita al museo, me topo con varios sucesores de la pascalina. Están el aritmómetro de Thomas de Colmar, la máquina de multiplicar de Léon Bollée, el aritmógrafo polícromo de Dubois o el contómetro de Felt y Tarrant. Uno de los mecanismos que conoció el mayor éxito fue el aritmómetro inventado en Rusia por el ingeniero sueco Willgodt Theophil Odhner. Esta máquina está compuesta por tres elementos principales: la parte superior en la que se indica, con ayuda de pequeñas palancas, el número con el que se desea operar; la parte inferior formada por un carro que puede desplazarse horizontalmente y en el que se indica el resultado de la operación; y, a la derecha, la manivela que permite efectuar la operación.



En cada vuelta de manivela, el número indicado en la parte superior se suma al número mostrado ya en el carro de abajo. Para hacer una resta, basta con girar la manivela en sentido inverso.

Imaginemos ahora que queremos realizar la multiplicación 374 x 523. Indicamos el número 374 en la parte superior y damos tres vueltas de manivela. La parte inferior muestra entonces 1122, resultado de la operación 374 x 3. Desplazamos entonces el carro de visualización una muesca en la dirección de las decenas y giramos otras dos veces la manivela. Se muestra el número 8602, que corresponde al producto de 374 por 23. Desplazamos de nuevo el carro una muesca para pasar a las centenas, damos cinco vueltas de manivela y obtenemos nuestro resultado: 195 602. Con un poco de hábito y de entrenamiento, solo habríamos necesitado unos segundos para efectuar nuestra multiplicación.

En 1834, una idea cuando menos estrafalaria atraviesa la mente del matemático británico Charles Babbage: cruzar una máquina de calcular con un telar. Desde hace algunos años, el funcionamiento de los telares se ha ido perfeccionando. Una de sus mejoras es la introducción de tarjetas perforadas, que permiten que una misma máquina produzca una gran variedad de motivos sin necesidad de cambiar sus ajustes. Según haya o no un hueco en un lugar concreto de la tarjeta, esta atraviesa o no un gancho articulado, y el hilo de trama pasa por encima o por debajo del hilo de cadena. En resumidas cuentas, basta con trasladar el motivo deseado a la tarjeta perforada para que la máquina se adapte por sí misma.

Siguiendo este modelo, Babbage imagina una calculadora mecánica no limitada a hacer determinados cálculos precisos, como adiciones o multiplicaciones, sino capaz de adaptar su comportamiento y realizar millones de operaciones diferentes en función de la tarjeta perforada que se le inserte. Para ser más exactos, esta máquina puede realizar todas las operaciones polinómicas, es decir, los cálculos que combinan en un orden cualquiera las cuatro operaciones básicas y las potencias. Así como la pascalina permitía a su usuario hacer el mismo movimiento cualesquiera que fueran los números utilizados, la máquina de Babbage permite hacer los mismos movimientos para cualesquiera que sean las operaciones realizadas. Ya no es preciso, como ocurría por ejemplo con la calculadora de Odhner, girar la manivela en sentido opuesto al hacer una adición o una sustracción. Basta con escribir el cálculo en la tarjeta perforada y la máquina se ocupa de todo. Este funcionamiento revolucionario convierte la máquina de Babbage en el primer ordenador de la historia.

Su funcionamiento plantea, no obstante, un nuevo desafío. Para efectuar un cálculo, hemos de ser capaces de suministrar a la máquina la tarjeta perforada adecuada. Esta se halla compuesta por una serie de sitios huecos y llenos que el mecanismo detecta y que le indican etapa a etapa las operaciones que han de efectuarse. Así pues, antes incluso de ponerla en marcha, el usuario de la máquina debe traducir el cálculo que desea hacer en una sucesión de sitios llenos y huecos legibles por la máquina.

La continuación y el desarrollo de este trabajo de traducción corre a cargo de la matemática británica Ada Lovelace. Esta estudia el funcionamiento de la máquina y comprende todo su potencial, tal vez más de lo que había imaginado el propio Babbage. Describe en particular un código complejo que permite calcular la serie de Bernoulli, extremadamente útil en el cálculo infinitesimal y descubierta más de un siglo antes por el suizo Jacques

Bernoulli. Este código suele considerarse el primer programa informático y convierte a Lovelace en la primera programadora de la historia.

Ada Lovelace murió en 1852 a los treinta y seis años. Charles Babbage intentó toda su vida construir su máquina, pero murió en 1871 antes de terminar su prototipo. Habrá que esperar al siglo XX para que se pueda fabricar finalmente una máquina de Babbage. La observación de una de estas calculadoras en movimiento resulta impresionante a la par que mágico. Sus imponentes dimensiones (en torno a dos metros de alto por tres de ancho) y el baile coordinado de centenares de engranajes que se agitan y se arremolinan en su vientre, provocan una impresión sorprendente y maravillosa.

El prototipo inacabado del sabio británico todavía se puede admirar hoy en el Museo de la Ciencia de Londres. Por su parte, un ejemplar funcional reconstruido a comienzos del siglo XXI puede verse en el Museo de Historia del Ordenador de Mountain View en California.

El siglo XX presenciará el triunfo de los ordenadores en proporciones que Babbage y Lovelace sin duda jamás habrían imaginado. Las máquinas de calcular se beneficiarán de la convergencia de las matemáticas más antiguas y más recientes.

Por un lado, el cálculo infinitesimal y los números imaginarios permitieron traducir a ecuaciones fenómenos electromagnéticos que pronto darían lugar a los aparatos electrónicos. Por otro lado, el siglo XIX vio renacer las cuestiones relativas a los fundamentos de las matemáticas, a los axiomas y a los razonamientos elementales que permiten hacer demostraciones. El primer aspecto proporcionará a las máquinas una infraestructura material de una rapidez extraordinaria; el segundo permitirá la organización eficaz de los cálculos elementales para producir los resultados más complejos.

Uno de los principales artífices de esta revolución fue el matemático británico Alan Turing. Este publicó en 1936 un artículo en el que establecía un paralelismo entre la posibilidad de demostrar un teorema en matemáticas y la de hacer calcular un resultado a una máquina en informática. En dicho artículo describe por vez primera el funcionamiento de una máquina abstracta que llevará su nombre y que continúa siendo ampliamente utilizada en informática teórica. La máquina de Turing es puramente imaginaria. El matemático británico no se preocupa de los mecanismos concretos que posibilitarían su construcción. Se limita a plantear las operaciones elementales que puede realizar su máquina, y luego se pregunta lo que es capaz de obtener combinándolas entre sí. Se percibe aquí con claridad la analogía con un matemático que formula sus axiomas y luego intenta combinarlos para deducir teoremas.

La serie de instrucciones que se le dan a una máquina para desembocar en un resultado se denomina «algoritmo», deformación latina del nombre de Al-Juarismi. Es preciso decir que los algoritmos informáticos se inspirarán profundamente en los procedimientos de resolución de problemas ya conocidos por los antiguos. Recordemos que Al-Juarismi, en su *al-jabr*, no solo consideraba objetos matemáticos abstractos, sino que también ofrecía métodos prácticos que permitían a los ciudadanos de Bagdad hallar la solución a sus problemas sin haber comprendido forzosamente toda la teoría. Análogamente, un ordenador no necesita que le expliquen la teoría que, de todas formas, es incapaz de entender. Solo necesita que le indiquen qué cálculos deben realizarse y en qué orden.

He aquí un ejemplo de algoritmo que se puede suministrar a una máquina. Esta posee tres casillas de memoria en las que pueden anotarse números. ¿Serías capaz de adivinar lo que va a calcular este algoritmo?

Etapa A. Anotar el número 1 en la casilla de memoria n.º 1 y luego pasar a la etapa B.

Etapa B. Anotar el número 1 en la casilla de memoria n.º 2 y luego pasar a la etapa C.

Etapa C. Anotar la suma de la casilla de memoria n.º 1 y la casilla de memoria n.º 2 en la casilla de memoria n.º 3 y luego pasar a la etapa D.

Etapa D. Anotar el número de la casilla de memoria n.º 2 en la casilla de memoria n.º 1 y luego pasar a la etapa E.

Etapa E. Anotar el número de la casilla de memoria n.º 3 en la casilla de memoria n.º 2 y luego pasar a la etapa C.

Podemos observar que la máquina gira en bucle, puesto que la etapa E vuelve a la etapa C. Por consiguiente, las etapas C, D y E se repiten hasta el infinito.

¿Qué hace entonces esta máquina? Hemos de reflexionar un poco para descifrar esta secuencia de instrucciones ofrecida fríamente y sin explicación alguna. No obstante, llegaremos a comprender que este algoritmo calcula números que ya conocemos bien, puesto que se trata de los términos de la sucesión de Fibonacci[17]. Las etapas A y B inician los dos primeros términos de la sucesión: 1 y 1. La etapa C calcula la suma de los dos términos precedentes. Las etapas D y E desplazan a continuación los resultados obtenidos en la memoria a fin de poder comenzar de nuevo. Si observamos los datos que se registran sucesivamente en las casillas de memoria durante el funcionamiento de la máquina, veremos desfilar los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 y así sucesivamente.

Si este algoritmo es relativamente simple, todavía no lo es tanto como para que puedan leerlo las máquinas de Turing. Efectivamente, tal como las define su creador, estas máquinas no son capaces de hacer una adición, como se pide en la etapa C. Sus únicas facultades son escribir, leer y desplazarse por la memoria siguiendo las instrucciones dadas a cada etapa. No obstante, es posible enseñarle la adición suministrándole el algoritmo mediante el cual las cifras se suman fila a fila, y teniendo en cuenta las llevadas, como en el ábaco. En otros términos, la adición no forma parte de los axiomas de la máquina, pero constituye ya uno de sus teoremas para cuya utilización necesitamos proporcionar el algoritmo correspondiente. Una vez escrito este algoritmo, basta con sustituirlo en la etapa C para que una máquina de Turing pueda calcular los números de Fibonacci.

Al ascender en complejidad, a continuación es posible enseñar a una máquina de Turing a hacer multiplicaciones, divisiones, cuadrados y raíces cuadradas, a resolver ecuaciones, a calcular aproximaciones de π o relaciones trigonométricas, a determinar las coordenadas cartesianas de figuras geométricas o a hacer cálculo infinitesimal. En resumidas cuentas, siempre y cuando le suministremos los algoritmos correctos, una máquina de Turing puede hacer todas las matemáticas de las que hemos hablado hasta ahora y lograr una precisión mucho mayor.

EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

Cojamos el mapa de un territorio compuesto por varias regiones delimitadas por sus fronteras. ¿Cuántos colores se necesitan como mínimo para poder colorear este mapa de manera que dos regiones limítrofes no sean nunca del mismo color?

En 1852, el matemático sudafricano Francis Guthrie examinó esta cuestión y lanzó la hipótesis de que, cualquiera que sea el mapa, siempre basta con emplear un máximo de cuatro colores. Después de él, numerosos sabios intentaron demostrar este enunciado, pero nadie lo logró durante más de un siglo. No obstante, se hicieron algunos progresos y se estableció que todos los mapas posibles podían reducirse a 1478 casos particulares, cada uno de los cuales precisaba numerosas verificaciones. Pero resultaba imposible que un ser humano o incluso un equipo entero de seres humanos efectuaran todas estas verificaciones por sí mismos. No habría bastado una vida entera. Podemos imaginar la frustración de estos matemáticos, que disponían del método que permitía probar o refutar la conjetura, pero que no podían utilizarlo por una cuestión de tiempo.

En la década de 1960, la idea de recurrir a un ordenador comienza a germinar en el espíritu de algunos investigadores y, en 1976, son finalmente dos estadounidenses, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes anuncian haber demostrado por fin el teorema. Habrán sido precisas, sin embargo, más de 1200 horas de cálculos y 10 000 millones de operaciones elementales con la máquina para acabar los 1478 mapas.

El anuncio estalla como una bomba en los círculos matemáticos. ¿Cómo acoger este nuevo género de «demostración»? ¿Cabe aceptar la validez de una demostración tan larga que ningún ser humano ha podido leerla en su integridad? ¿Hasta qué punto podemos confiar en las máquinas?

Estos interrogantes suscitarán numerosos debates. Si algunos propusieron que no se podía tener la absoluta certeza de que la máquina no se hubiera equivocado, otros replicaron que podía decirse otro tanto de los humanos. ¿Acaso vale menos un mecanismo electrónico que el mecanismo biológico que es un *Homo sapiens*? ¿Resulta menos fiable una prueba efectuada por una máquina metálica que una prueba proporcionada por una máquina orgánica? Con frecuencia se ha visto a los matemáticos, a veces de los más grandes, cometer errores que no se detectaron hasta mucho más tarde. ¿Debe ello hacernos dudar de la validez del edificio matemático en su conjunto? Sin duda, una máquina puede tener fallos y cometer a veces errores, pero, si su fiabilidad es al menos igual a la de un humano (y a menudo es aún mayor), no existe motivo alguno para rechazar sus resultados.

Hoy en día, los matemáticos han aprendido a confiar en los ordenadores y la mayoría de ellos consideran en lo sucesivo válida la demostración del teorema de los cuatro colores. Desde entonces se demostraron otros muchos resultados con la ayuda de la informática. Sin embargo, este tipo de método no es siempre muy apreciado. Una prueba concisa realizada por una persona se considera con harta frecuencia más elegante. Si el objetivo de las matemáticas es comprender los objetos abstractos que se manipulan, las pruebas humanas son mucho más instructivas y suelen permitir una mejor comprensión de su sentido profundo.

El 10 de marzo de 2016, el mundo está pendiente de Seúl. Allí se celebra la partida tan esperada de juego de go, en la que el mejor jugador del mundo, el coreano Lee Sedol, se enfrenta al ordenador AlphaGo. La partida, retransmitida en directo por internet y por varias cadenas de televisión, es seguida por cientos de millones de personas de todo el mundo. Se respira tensión en el ambiente. Hasta el momento, ningún ordenador ha batido a un humano de este nivel.

El go tiene fama de ser uno de los juegos más difíciles de enseñar a una máquina. Su estrategia exige a los jugadores una importante dosis de intuición y de creatividad. Ahora bien, si las máquinas son muy buenas a la hora de calcular, es mucho más difícil encontrar algoritmos que simulen comportamientos instintivos. Otros juegos célebres, como el ajedrez, se basan mucho más en el cálculo. Por esa razón el ordenador Deep Blue llegó a batir al campeón ruso de ajedrez Garri Kaspárov ya en 1997, en una partida que también había causado un gran revuelo. En otros juegos, como, por ejemplo, las damas, los ordenadores han llegado incluso a diseñar una estrategia imbatible. Ningún humano puede esperar ya derrotar a un ordenador a las damas. A lo sumo puede quedar en tablas jugando a la perfección. En la familia de los grandes juegos de estrategia, el go seguía siendo en 2016 el último en resistir una y otra vez el asalto de las máquinas.

Al cabo de una hora de juego, estamos en la trigésimo séptima jugada y la partida parece muy reñida. Es entonces cuando AlphaGo va a dejar estupefactos a todos los especialistas que siguen la partida. El ordenador decide jugar su piedra negra en posición O10. En internet, el comentarista que descifra y analiza las jugadas en directo abre los ojos como platos, coloca la piedra en su tablero de demostración y luego vuelve a cogerla vacilante. Vuelve a revisar en su pantalla y la coloca de nuevo. «¡Es una jugada muy sorprendente!», exclama con una sonrisa perpleja. «Debe de ser un error», comenta el segundo presentador. En las cuatro esquinas del mundo, los mayores especialistas del juego experimentan la misma estupefacción. ¿El ordenador acababa de cometer un error enorme o, por el contrario, acababa de tener una idea brillante? Tres horas y media y 174 jugadas más tarde, la respuesta cayó inapelable con el abandono del campeón coreano. La máquina había ganado.

Concluida la partida, no faltaron los adjetivos para calificar la famosa jugada 37. Creativa. Única. Fascinante. Ningún humano habría hecho esa jugada que las estrategias tradicionales consideraban mala, pero que acababa de conducir a la victoria. Se plantea entonces la siguiente pregunta: ¿cómo puede dar muestras de creatividad un ordenador que, sin embargo, se limita a seguir un algoritmo escrito por humanos?

La respuesta a esta pregunta radica en nuevos tipos de algoritmos de aprendizaje. Los programadores no enseñaron en realidad a jugar al ordenador. ¡Le enseñaron a aprender a jugar! Durante sus sesiones de entrenamiento, AlphaGo pasó miles de horas jugando contra él mismo y detectando por sí solo las jugadas que conducen a la victoria. Otra de sus características es la introducción del azar en su algoritmo. Las combinaciones posibles en el go son demasiado numerosas para poder ser calculadas en su totalidad, incluso por un ordenador. Para remediar esto, AlphaGo echa a suertes las vías que va a explorar y utiliza la teoría de las probabilidades. El ordenador se limita a comprobar una pequeña muestra de todas las combinaciones posibles y, del mismo modo que un sondeo estima las características de una población entera a partir de un pequeño grupo, él determina las jugadas que tienen más probabilidades de conducir a la victoria. He aquí en parte el secreto de la intuición y de la originalidad de AlphaGo: no reflexionar de forma sistemática, sino sopesar los futuros posibles en función de sus probabilidades.

Más allá de los juegos de estrategia, los ordenadores, provistos de algoritmos cada vez más complejos y eficaces, parecen hoy en condiciones de superar a los hombres en la mayor parte de sus competencias. Conducen coches, participan en operaciones quirúrgicas, pueden componer música o pintar cuadros originales. Resulta difícil imaginar una actividad humana que, desde un punto de vista técnico, no pueda ser realizada por una máquina pilotada por un algoritmo adaptado.

Ante estos fulgurantes progresos logrados en tan solo unas décadas, quién sabe de qué serán capaces los ordenadores del futuro. Y quién sabe si no estarán un día en condiciones de inventar por sí solos unas nuevas matemáticas. Por el momento, el juego matemático sigue siendo demasiado complejo para que los ordenadores puedan dar rienda suelta a su creatividad. Su utilización continúa siendo esencialmente técnica y calculatoria. Pero tal vez un día un descendiente de AlphaGo produzca un teorema inédito que, al igual que la jugada 37 de su ancestro, deje atónitos a todos los grandes sabios del planeta. Resulta difícil pronosticar las proezas de las máquinas del mañana, pero sería sorprendente que no nos sorprendieran.

Capítulo 17

Las próximas matemáticas

El cielo está oscuro y el ruido de la lluvia resuena sobre los tejados de Zúrich. ¡Qué tiempo tan triste en pleno corazón del verano! El tren ya no debería tardar.

Hoy es domingo, 8 de agosto de 1897 y, en el andén de la estación, un hombre aguarda pensativo la llegada de sus invitados. Adolf Hurwitz es matemático. Alemán de nacimiento, hace ahora cinco años que se instaló en Zúrich, donde ocupa la cátedra de matemáticas de la Escuela Politécnica Federal. Desde este puesto, ha desempeñado un papel importante en la organización del evento que se va a celebrar durante los tres próximos días. El tren que llega va a dejar en este andén una muestr a de los sabios más grandes del mundo, venidos de 16 países diferentes. Mañana se inaugura el primer Congreso Internacional de Matemáticas.

Los dos iniciadores de este congreso son los alemanes Georg Cantor y Felix Klein. El primero se hizo célebre al descubrir la existencia de unos infinitos más grandes que otros y al desarrollar la teoría de conjuntos para manipularlos sin caer en las paradojas. El segundo es un especialista en estructuras algebraicas. A pesar de que, por razones diplomáticas, se haya escogido Suiza como país de acogida de este primer congreso, no sorprende que la iniciativa provenga de Alemania. A lo largo del siglo XIX, el país ha sabido imponerse como el nuevo paraíso de las matemáticas. Gotinga y su prestigiosa universidad son su centro neurálgico, donde confluyen las mentes más brillantes de la disciplina.

Entre los doscientos participantes al congreso, figuran asimismo un buen número de italianos como Giuseppe Peano, conocido por haber definido los axiomas modernos de la aritmética, de rusos como Andréi Márkov, cuyos trabajos revolucionaron el estudio de las probabilidades, o de franceses como Henri Poincaré[18], quien descubrió entre otras cosas la teoría del caos y lo que más adelante se denominará el efecto mariposa. Durante los tres días del congreso, todos estos personajes distinguidos tendrán ocasión de discutir, intercambiar ideas y crear vínculos entre ellos y entre sus respectivos campos de investigación.

En este fin de siglo XIX, el mundo matemático se encuentra en plena metamorfosis. La expansión tanto geográfica como intelectual de la disciplina aleja a unos sabios de otros. Las matemáticas están en vías de volverse demasiado amplias como para que un solo individuo pueda abarcar toda su extensión. Henri Poincaré, que pronunció la conferencia inaugural del congreso, es considerado en ocasiones el último gran sabio universal, que dominaba todas las matemáticas de su época y que produjo avances significativos en un buen número de ellas. Con él se extingue la especie de los generalistas para ceder el paso a la de los especialistas.

No obstante, como reacción a esta deriva inexorable de los continentes matemáticos, los investigadores se esforzarán más que nunca en multiplicar las ocasiones de trabajar juntos y de hacer de su disciplina un bloque unido e indivisible. En plena tensión entre estos dos impulsos contradictorios entrarán las matemáticas en el siglo XX.

El segundo Congreso Internacional de los matemáticos se celebró en París en agosto de 1900. Posteriormente, el evento se estableció con un ritmo de un congreso cada cuatro años, exceptuando algunas ediciones canceladas por causa de las guerras mundiales. El último hasta la fecha tuvo lugar en Seúl del 13 al 21 de agosto de 2014. Con más de cinco mil participantes procedentes de ciento veinte países diferentes, este congreso fue la mayor concentración de matemáticos jamás organizada. La próxima edición se celebrará en Río de Janeiro en agosto de 2018.

Con el paso de los años, se han impuesto en el congreso ciertas tradiciones. Así, desde 1936, se concede la prestigiosa medalla Fields. Esta recompensa, denominada con frecuencia premio Nobel de matemáticas, es la distinción más alta de la disciplina. La medalla representa un retrato de Arquímedes acompañado por una cita cuando menos enfática del matemático griego: «*Transire suum pectus mundoque potiri*» («trascender su propia inteligencia y dominar el mundo»).

Perfil de Arquímedes en la medalla Fields.

Otro efecto de esta mundialización matemática es la imposición gradual del inglés como lengua internacional de la disciplina. Hay que decir que, ya en el congreso de París, ciertos participantes se habían quejado de que las conferencias y las actas exclusivamente en lengua francesa dificultaban la comprensión de los congresistas extranjeros. La Segunda Guerra Mundial y el éxodo de una gran parte de los cerebros europeos a Estados Unidos y a sus importantes universidades influyeron considerablemente en este movimiento. En la actualidad, la inmensa mayoría de los artículos de investigación matemática se escriben y se publican en inglés[19].

En un siglo, el número de matemáticos ha aumentado considerablemente. En 1900 no había más de unos centenares, principalmente en Europa. Hoy en día se cuentan decenas de miles repartidos por todo el mundo. Cada día se publican decenas de artículos. Según ciertas estimaciones, la comunidad matemática mundial produce actualmente alrededor de un millón de teoremas nuevos cada cuatro años.

La unificación de las matemáticas experimentará asimismo una reorganización profunda de la propia disciplina. Uno de los artífices más activos de este movimiento será el alemán David Hilbert. Profesor de la Universidad de Gotinga, Hilbert es, con Poincaré, unos de los matemáticos más brillantes e influyentes de comienzos del siglo XX.

En 1900, Hilbert participó en el congreso de París y, el miércoles 8 de agosto, dictó en la Sorbona una ponencia que se haría célebre. El matemático alemán presentó allí una lista de grandes problemas no resueltos que, a su juicio, debían guiar las matemáticas del siglo que empezaba. A los matemáticos les gustan los desafíos y la iniciativa dio en el blanco. Los 23 problemas de Hilbert provocaron y estimularon el interés de los investigadores y no tardaron en propagarse mucho más allá de los asistentes al congreso.

En 2016, cuatro de estos problemas continúan todavía sin resolver. Entre ellos, el octavo de la lista de Hilbert, denominado «hipótesis de Riemann», suele considerarse la mayor de las conjeturas matemáticas de nuestra época. Se trata de hallar las soluciones imaginarias de una ecuación formulada a mediados del siglo XIX por el alemán Bernhard Riemann. Si esta ecuación reviste un interés especial es porque encierra la clave de un misterio mucho más antiguo: el de la serie de los números primos estudiados desde la Antigüedad[20]. Eratóstenes había sido uno de los primeros en estudiar esta serie en el siglo III a. C. Si hallamos las soluciones de la ecuación de Riemann, con ella obtendremos numerosas informaciones sobre estos números que ocupan un puesto central en aritmética.

Mientras sus 23 problemas vivían su vida, Hilbert no se detuvo ahí. En los años siguientes, el matemático alemán comenzó a desarrollar un vasto programa que aspiraba a dotar a todas las matemáticas de un mismo fundamento sólido, fiable y definitivo. Su objetivo era crear una teoría única que permitiera englobar todas las ramas de las matemáticas. Recordemos que, desde Descartes y sus coordenadas, los problemas de geometría podían expresarse en el lenguaje algebraico. En cierto modo, la geometría se había convertido en una subdisciplina del álgebra. Pero ¿era posible reproducir esta fusión de las disciplinas a la escala de todas las matemáticas? Dicho de otro modo, ¿podía hallarse una superteoría de la que todas las ramas de las matemáticas, desde la geometría hasta la probabilidad pasando por el álgebra o el cálculo infinitesimal, no fueran sino casos particulares?

Esta superteoría surgirá efectivamente al retomar el marco de la teoría de conjuntos formulada a finales del siglo XIX por Georg Cantor. A principios del siglo XX se diseñaron varias propuestas de axiomatización de esta teoría. Entre 1910 y 1913, los británicos Alfred North Whitehead y Bertrand Russell publicaron una obra en tres volúmenes titulada *Principia mathematica*. En ella establecieron los axiomas y las reglas lógicas a partir de las cuales reconstruyeron desde cero el resto de las matemáticas. Uno de los pasajes más célebres del libro se encuentra en la página 362 del primer volumen, puesto que Whitehead y Russell, tras haber recreado la aritmética, llegaron por fin al teorema 1 + 1 = 2. A los comentaristas se les antojó muy divertido que hicieran falta tantas páginas y desarrollos incomprensibles para los neófitos para llegar a una igualdad tan elemental. A continuación presentamos, por mero deleite visual, el aspecto que tiene, en el lenguaje simbólico de Whitehead y Russell, la demostración de 1 + 1 = 2.

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

No te esfuerces por entender este aglutinamiento de símbolos, pues resulta imposible sin haber leído las 361 páginas precedentes[21].

Después de Whitehead y Russell, se formularon otras propuestas de perfeccionamiento de los axiomas y, en la actualidad, la inmensa mayoría de las matemáticas modernas hallan en efecto sus fundamentos en el reducido número de axiomas básicos de la teoría de conjuntos.

Esta unificación provocó asimismo un debate lingüístico, puesto que ciertos matemáticos empezaron a reivindicar por aquel entonces el uso del singular para su disciplina. ¡No digamos ya «las matemáticas» sino «la matemática»! Hoy todavía encontramos numerosos investigadores partidarios del singular, pero es difícil deshacerse de los viejos hábitos y, por el momento, el uso no parece dispuesto a abandonar el plural.

Pese al éxito pasmoso de la teoría de conjuntos, Hilbert no estaba todavía satisfecho, pues persistían aún ciertas dudas sobre la fiabilidad de los axiomas de los *Principia mathematica*. Para que pueda considerarse perfecta una teoría, es necesario que satisfaga dos criterios: ha de ser coherente y completa.

La coherencia significa que la teoría no admite paradojas. No es posible probar en ella una cosa y su contraria. Por ejemplo, si uno de los axiomas permite demostrar que 1 + 1 = 2 y otro concluye que 1 + 1 = 3, la teoría es incoherente, puesto que se contradice a sí misma. Por su parte, la completitud afirma que los axiomas de la teoría son suficientes para demostrar todo lo que es verdadero dentro de ella. Si, por ejemplo, una teoría aritmética no dispone de suficientes axiomas para demostrar que 2 + 2 = 4, entonces es incompleta.

¿Era posible mostrar que los *Principia mathematica* verificaban estos dos criterios? ¿Cabía tener la certeza de que jamás se encontrarían en ellos paradojas y de que sus axiomas eran suficientemente precisos y potentes para deducir de ellos todos los teoremas posibles e imaginables?

El programa de Hilbert sufriría un parón tan brutal como inesperado cuando, en 1931, un joven matemático austro-húngaro llamado Kurt Godel publicó un artículo titulado «Über formal unentscheidbare Satze der "Principia mathematica" und verwandter Systeme», o «Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los "Principia mathematica" y sistemas afines». Este artículo demostraba un teorema extraordinario, que afirmaba que no podía existir ninguna superteoría coherente y completa a la vez. Si los *Principia mathematica* son coherentes, entonces incluyen necesariamente afirmaciones llamadas indecidibles, que no pueden ni demostrarse ni refutarse dentro de ellos. Por consiguiente, resulta imposible determinar si son verdaderas o falsas.

LA EXQUISITA CATÁSTROFE DE GODEL

El teorema de incompletitud de Godel es un monumento del pensamiento matemático. Para intentar entender su principio general, hemos de examinar con más detalle nuestra manera de expresar las matemáticas. He aquí dos afirmaciones elementales de aritmética.

A. La adición de dos números pares da siempre un número par.
B. La adición de dos números impares da siempre un número impar.

Estos dos enunciados son bastante claros y podrían expresarse sin problema en el lenguaje algebraico de Viète. Reflexionando un poco sobre ellas, podemos constatar que la primera de estas afirmaciones, señalada con una A, es verdadera, en tanto que la segunda, señalada con una B, es falsa, puesto que la suma de dos números impares es siempre par. Esto nos conduce a los dos nuevos enunciados siguientes:

C. La afirmación A es verdadera.
D. La afirmación B es falsa.

Estas dos nuevas frases son un poco particulares. Hablando con propiedad, no son enunciados matemáticos, sino más bien enunciados que hablan de enunciados matemáticos. Las frases C y D, a diferencia de A y B, no pueden expresarse *a priori* en el lenguaje simbólico de Viète. Sus temas no son los números ni las figuras geométricas ni ningún otro objeto de la aritmética, de las probabilidades o del cálculo infinitesimal. Son lo que se denomina «enunciados metamatemáticos», es decir, enunciados que no hablan de los objetos matemáticos, sino de las matemáticas mismas. Un teorema es matemático. La afirmación de que el teorema es verdadero es metamatemática.

La distinción puede parecer sutil e irrisoria, pero es, sin embargo, mediante una formalización increíblemente ingeniosa de las metamatemáticas como Godel va a obtener su teorema. La proeza del sabio alemán fue hallar el medio de expresar los enunciados metamatemáticos en el propio lenguaje de las matemáticas. Gracias a un procedimiento genial que permite interpretar los enunciados como números, las matemáticas, además de hablar de números, de geometría o de probabilidades, llegaron a estar de repente en condiciones de hablar de sí mismas.

Una cosa que habla de sí misma, ¿no te recuerda algo? Volvamos a la famosa paradoja de Epiménides. El poeta griego había afirmado un día que todos los cretenses eran mentirosos. Dado que el propio Epiménides era cretense, resultaba imposible determinar si su declaración era verdadera o falsa sin caer en una contradicción. La pescadilla que se muerde la cola. Hasta ese día, los enunciados matemáticos habían estado a salvo de este género de afirmaciones autorreferentes. Pero, gracias a su procedimiento, Godel llegó a reproducir un fenómeno del mismo tipo en el interior mismo de las matemáticas. Observa el siguiente enunciado:

G. La afirmación G no es demostrable a partir de los axiomas de la teoría.

Este enunciado es manifiestamente metamatemático, pero, por la astucia de Godel, puede expresarse pese a todo en el lenguaje matemático. Por tanto, se vuelve posible el intento de demostrar G a partir de los axiomas de la teoría. Entonces se plantean dos posibilidades.

Puede ser posible demostrar G, pero, en este caso, como G afirma que no es demostrable, esto significa que se equivoca, luego es falsa. Ahora bien, si es posible demostrar algo falso, entonces la teoría entera no se sostiene en pie. No es coherente.

Puede que no sea posible demostrar G. En este caso, lo que dice G es cierto, y ello significa que nuestros axiomas son incapaces de probar una afirmación que, sin embargo, es verdadera. La teoría es, pues, incompleta, puesto que existen verdades que le son inaccesibles.

En resumidas cuentas, perdemos en todos los casos. O bien la teoría es incoherente, o bien es incompleta. El teorema de incompletitud de Godel tiró por tierra definitivamente los dos sueños de Hilbert. Y resulta inútil intentar esquivar el problema cambiando de teoría, pues su resultado no se aplica únicamente a los *Principia mathematica,* sino asimismo a cualquier otra teoría que pudiera aspirar a reemplazarla. No puede existir una teoría única y perfecta que permita demostrar todos sus teoremas.

Quedaba, no obstante, una esperanza. El enunciado G es ciertamente indecidible, pero hemos de confesar que no resulta demasiado interesante desde un punto de vista matemático. Se trata de una curiosidad forjada desde cero por Godel con el fin de explotar la brecha abierta por Epiménides. No obstante, siempre cabía esperar que los grandes problemas de las matemáticas, los que son interesantes, no cayeran en la trampa de la autorreferencia.

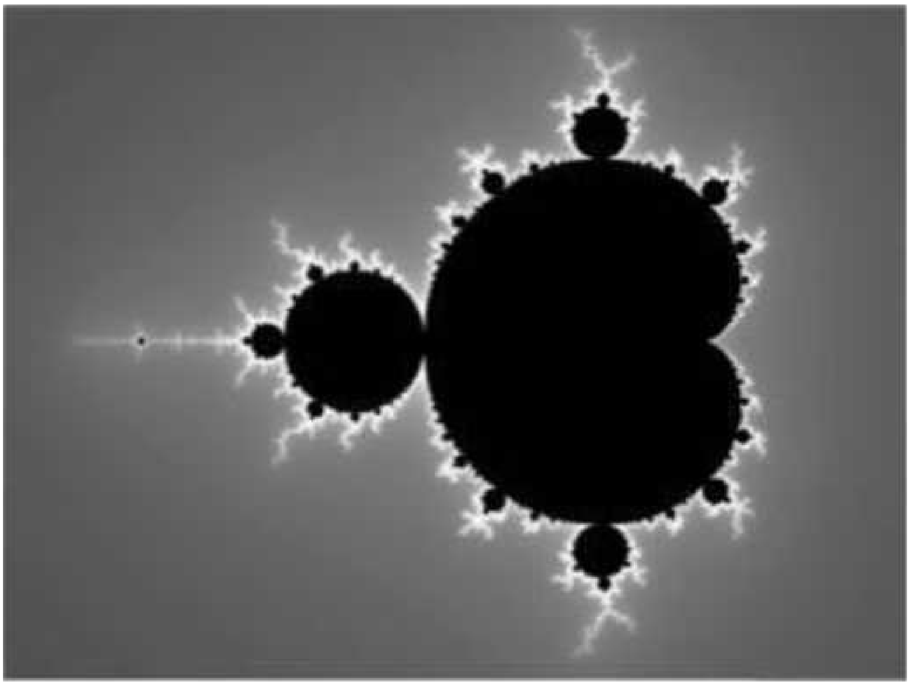
Desgraciadamente, hubo que resignarse una vez más. En 1963, el matemático estadounidense Paul Cohen demostró que el primero de los 23 problemas de Hilbert también pertenecía a esta extraña categoría de los enunciados indecidibles. Imposible demostrarlo o refutarlo a partir de los axiomas de los *Principia mathematica*. Si este primer problema ha de resolverse algún día, será necesariamente en el marco de otra teoría. Pero esta nueva teoría contendrá entonces otros fallos y otros enunciados indecidibles.

Si los estudios sobre los fundamentos de las matemáticas ocuparon un lugar relevante en el siglo XX, ello no impidió que las demás ramas de la disciplina prosiguieran su camino. Es difícil describir la considerable diversidad de las matemáticas que se han desarrollado en los últimos decenios. No obstante, detengámonos por unos instantes en una de las joyas más deslumbrantes del siglo pasado: el conjunto de Mandelbrot.

Esta criatura extraordinaria surgió del análisis de las propiedades de ciertas sucesiones numéricas. Elige un número, el que tú quieras, y construye una sucesión cuyo primer término sea 0 y cada término posterior sea igual al cuadrado del término precedente al que se añade el número elegido. Por ejemplo, si eliges el número 2, entonces tu sucesión comenzará así: 0, 2, 6, 38, 1446… Puedes observar que $2 = 0^2 + 2$, luego $6 = 2^2 + 2$, luego $38 = 6^2 + 2$, luego $1446 = 38^2 + 2$, y así sucesivamente. Si en lugar de 2 eliges el número - 1, entonces obtienes la sucesión 0, -1, 0, -1, 0. Esta sucesión alterna simplemente entre 0 y -1, ya que $-1= 0^2 -1$ y $0 = (-1)^2 -1$.

Estos dos ejemplos muestran que, según el número elegido, la sucesión obtenida puede adoptar dos comportamientos muy diferentes. Es posible que la sucesión tienda al infinito dando valores cada vez mayores, como sucede si tomamos el número 2. Es igualmente posible que la sucesión esté acotada, esto es, que sus valores no se alejen y permanezcan en una zona limitada, como sucede con el número -1. Todos los números, ya sean enteros, decimales o imaginarios, pueden incluirse entonces en una de estas dos categorías.

Esta clasificación de los números puede antojarse bastante abstracta. Por consiguiente, a fin de visualizar mejor las cosas, es posible representar esto geométricamente gracias a las coordenadas cartesianas. En el plano, situamos todos los números reales en un eje horizontal como ya hicimos con anterioridad[22], y a continuación los números imaginarios en un eje vertical. Ahora podemos colorear los puntos pertenecientes a las dos categorías con colores diferentes. Entonces aparece una figura maravillosa.



En esta figura, los números coloreados en negro son los que generan sucesiones acotadas, en tanto que los grises son los que dan lugar a sucesiones que tienden al infinito. Se ha colocado una «sombra» blanca detrás de la figura negra a fin de detectar mejor ciertos detalles extremadamente finos y a veces inapreciables a simple vista.

Como cada punto de la imagen corresponde al cálculo y al estudio de una sucesión, el trazado de esta figura necesita numerosos cálculos. Por eso ha sido preciso esperar al comienzo de la década de 1980 para que los ordenadores permitan obtener representaciones precisas de ella. El matemático francés Benoit Mandelbrot fue uno de los primeros en estudiar con detalle la geometría de esta figura, a la que sus colegas acabaron dando su nombre.

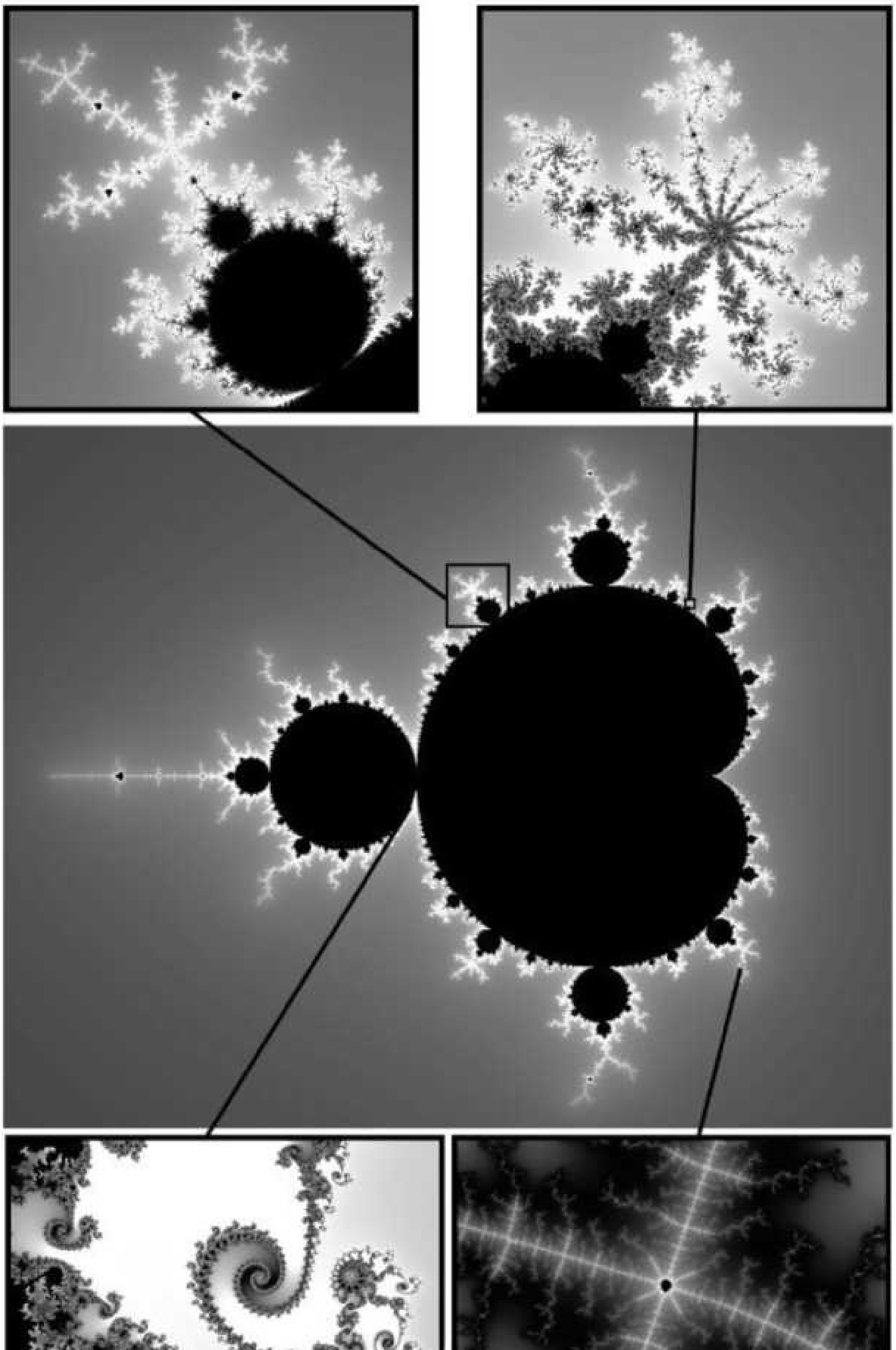
El conjunto de Mandelbrot es fascinante. Su contorno es un encaje geométrico inverosímil de armonía y de precisión. Si hacemos *zoom* sobre su borde iremos viendo aparecer motivos infinitamente finos e increíblemente cincelados. A decir verdad, es prácticamente imposible captar en una sola imagen toda la riqueza de las formas que oculta el conjunto de Mandelbrot cuando se analiza en detalle. Una pequeña muestra de estos detalles puede apreciarse en la figura de la página siguiente.

Pero lo que lo vuelve todavía más extraordinario es la conmovedora simplicidad de su definición. Si, para trazar esta figura, hubiera sido preciso recurrir a ecuaciones monstruosas, a cálculos ingeniosos y confusos o a construcciones abracadabrantes, habríamos podido decir: «En efecto, la figura es bella, pero es completamente artificial y reviste escaso interés». Pero no, esta figura es simplemente la representación geométrica de las propiedades elementales de sucesiones numéricas que se definen en unas palabras. De una regla muy simple ha nacido esta maravilla geométrica.

Este género de descubrimiento reaviva inevitablemente el debate sobre la naturaleza de las matemáticas: ¿se trata de invenciones humanas o poseen una existencia independiente? ¿Los matemáticos son descubridores o creadores? A primera vista, el conjunto de Mandelbrot parece abogar en favor del descubrimiento. Si esta figura adopta esta forma extraordinaria no es porque Mandelbrot decidiera construirla así. El matemático francés no quiso inventar semejante figura, sino que esta se le impuso. No habría podido ser distinta de lo que es.

No obstante, resulta bastante extraño considerar la existencia de un objeto que no solo es puramente abstracto, sino que, además, no reviste interés más allá del ámbito inmaterial de las matemáticas. Si los números, los triángulos o las ecuaciones son abstractos, pueden ser útiles para aprehender el mundo real. Hasta el presente, la abstracción siempre parecía haber tenido un reflejo, aunque remoto, en el universo material. El conjunto de Mandelbrot no parece conservar ningún vínculo directo con él. Ningún fenómeno físico conocido adopta una estructura que se le asemeje de cerca ni de lejos. ¿Dónde radica entonces su interés? ¿Puede situarse su descubrimiento en el mismo plano que el descubrimiento de un nuevo planeta en astronomía o de una nueva especie animal en biología? ¿Merece la pena estudiar este objeto por sí mismo? En otros términos, ¿juegan las matemáticas en igualdad de condiciones con las demás ciencias?

Muchos matemáticos responderán sin duda afirmativamente esta pregunta. Ahora bien, la disciplina ocupa un lugar profundamente singular en el campo de los saberes humanos. Una de las razones de esta singularidad reside en la ambigua relación que mantienen las matemáticas con la belleza de sus objetos.



Es cierto que descubrimos cosas especialmente bellas en casi todas las ciencias. Las imágenes de los cuerpos celestes que nos ofrecen los astrónomos constituyen un ejemplo al respecto. Nos maravillamos de la forma de las galaxias, de las colas centelleantes de los cometas o de los colores tornasolados de las nebulosas. El universo es ciertamente hermoso. Es una suerte. Pero hay que decir que, si no lo hubiera sido, no podríamos haber hecho gran cosa al respecto. Los astrónomos no tienen elección. Los astros son lo que son y habrían tenido que estudiarlos aunque hubieran sido feos. Cierto es que la definición de la belleza y de la fealdad son muy subjetivas, pero eso resulta ahora irrelevante.

El matemático, en cambio, parece un poco más libre. Ya hemos visto que existen infinidad de formas de definir las estructuras algebraicas. Y, en cada una de ellas, una infinidad de formas de definir sucesiones cuyas propiedades pueden estudiarse. La mayoría de estas pistas no conducirán a conjuntos tan bellos como el de Mandelbrot. En matemáticas, la libertad de elegir lo que estudiar se halla mucho más presente. De entre la infinidad de teorías que cabría explorar, con harta frecuencia escogemos aquellas que se nos antojan más elegantes.

Este enfoque parece emparentarse más estrechamente con un proceso artístico. Si las sinfonías de Mozart son tan hermosas no es por casualidad, sino porque el compositor austriaco ha procurado que lo fueran. De la infinidad de piezas musicales que es posible componer, la inmensa mayoría son horriblemente feas. Golpea al azar las teclas de un piano y te convencerás de ello. El talento del artista consiste en hallar, en esta infinidad carente de interés, las escasas joyas que nos maravillarán.

Análogamente, propio del talento del matemático es saber hallar en la infinitud del mundo matemático los objetos más dignos de interés. Si la figura de Mandelbrot no hubiera sido tan hermosa, es evidente que habría despertado mucho menos interés entre los matemáticos. Habría permanecido en el anonimato de las figuras ignoradas, como todas esas malas sinfonías que nadie tocará jamás.

¿Diremos entonces que los matemáticos tienen más de artistas que de científicos? Semejante afirmación resultaría un poco exagerada. ¿Tiene sentido siquiera la pregunta? El científico busca la verdad y, algunas veces, encuentra en ella por casualidad la belleza. El artista busca la belleza y, en ocasiones, encuentra en ella por casualidad la verdad. El matemático, por su parte, parece olvidar por momentos que existe una diferencia entre ambas. Busca simultáneamente la una y la otra. Encuentra indistintamente la otra y la una. Mezcla lo verdadero y lo bello, lo útil y lo superfluo, lo ordinario y lo inverosímil, como otros tantos colores que se mezclan en su lienzo infinito.

Ni siquiera él mismo comprende siempre demasiado bien lo que hace. Con suma frecuencia, las matemáticas no revelan sus secretos y su auténtica naturaleza hasta mucho tiempo después de la desaparición de sus creadores.

Pitágoras, Brahmagupta, Al-Juarismi, Tartaglia, Viète y todos los demás inventaron las matemáticas sin sospechar todo lo que permiten hacer hoy en día. Y quizás no nos figuramos todo lo que permitirán hacer en los siglos venideros. Solo el tiempo sabe ofrecer la perspectiva necesaria para apreciar en su justo valor la obra matemática.

Epílogo

Nuestro relato está llegando a su fin.

Al menos, al final de la parte que me es posible relatar al escribir este libro a comienzos del siglo XXI. ¿Y después? Es evidente que la historia no ha terminado.

Una cosa que tenemos que aceptar desde el momento que hacemos ciencia es que, cuanto más sabemos sobre un tema, más medimos la extensión de nuestra ignorancia. Cada respuesta aportada plantea diez nuevas preguntas. Este juego sin fin es abrumador a la par que excitante. Hay que decir que, si fuéramos capaces de saberlo todo, la alegría resultante se vería oscurecida de inmediato por la desesperanza mucho mayor de no tener nada que descubrir. Pero no juguemos a asustarnos. Por fortuna, las matemáticas que quedan por hacer son, sin lugar a dudas, mucho más vastas que las que conocemos.

¿A qué se parecerán las matemáticas del futuro? Esta pregunta produce vértigo. Es impresionante aproximarse a la frontera de nuestros conocimientos y contemplar la magnitud de todo lo que no sabemos. Para quien ha probado una vez el sabor embriagador de los nuevos descubrimientos, la llamada de las tierras ignotas es sin duda más fuerte que la comodidad de los territorios conquistados. Las matemáticas resultan fascinantes cuando aún no están domesticadas. ¡Y qué embriaguez observar a lo lejos la imagen borrosa de las ideas salvajes que brincan libremente en la sabana infinita de nuestra ignorancia! Las ideas que se adivinan sublimes y cuyo misterio atormenta deliciosamente nuestra imaginación. Algunas parecen cercanas. Podríamos creer que basta con tender la mano para tocarlas. Otras son tan lejanas que harán falta generaciones para aproximarse a ellas. Nadie sabe lo que descubrirán los matemáticos y las matemáticas de los siglos venideros, pero es muy probable que les aguarden muchas sorpresas.

Estamos en mayo de 2016 y me paseo por los pasillos del Salón de la Cultura y de los Juegos Matemáticos, que se celebra todos los años en la plaza de San Sulpicio en el distrito VI de París. Es un lugar que me gusta especialmente. Aquí se dan cita magos que te explican un truco de cartas basado en una propiedad aritmética. Hay escultores que labran en la piedra estructuras geométricas inspiradas en los sólidos platónicos. También acuden inventores cuyos mecanismos de madera forman extrañas máquinas de calcular. Un poco más lejos, me topo con algunas personas dedicadas a calcular el radio de la Tierra reproduciendo la experiencia de Eratóstenes. Descubro luego el puesto de los aficionados a la papiroflexia, el de los apasionados de los rompecabezas y el de los calígrafos. Bajo la carpa se representa una obra de teatro en la que se mezclan las matemáticas y la astronomía. Se oyen grandes carcajadas.

Todas estas personas hacen matemáticas. Todas estas personas inventan matemáticas, cada una a su manera. Este malabarista va a utilizar para su número figuras geométricas que ningún gran científico habría juzgado dignas de interés. Pero para él son bellas, y sus bolas que giran en el aire hacen brillar los ojos de los transeúntes.

Creo que todo esto causa aún más regocijo que todos los grandes descubrimientos de los grandes sabios. Por simples que sean, las matemáticas encierran una fuente inagotable de asombro y fascinación. Entre los visitantes del Salón, se encuentran muchos padres que vienen sobre todo por sus hijos y que, poco a poco, se dejan atrapar también por el juego. Nunca es demasiado tarde. Las matemáticas poseen un potencial formidable para convertirse en una disciplina festiva y popular. No es preciso ser un matemático genial para apasionarse por las matemáticas y sentir la embriaguez de la exploración y de los descubrimientos.

No se necesita gran cosa para hacer matemáticas. Y, si tienes ganas de continuar cuando pases esta página, descubrirás mucho más aún de cuanto yo he podido contarte. Podrás trazar tu propio camino, forjar tus propios gustos y seguir tus propios deseos.

Basta para ello con una pizca de osadía, una buena dosis de curiosidad y un poco de imaginación.

Para llegar más lejos

Para prolongar tu exploración de las matemáticas, he aquí algunas pistas que podrían resultarte útiles.

Museos y eventos

El departamento de matemáticas del Palacio del Descubrimiento de París (<http://www.palais-decouverte.fr>) propone animaciones, presentaciones y talleres para el gran público. Si pasas por allí, no olvides visitar la sala π. También en París, la Ciudad de las Ciencias y de la Industria (<http://www.cite-sciences.fr>) posee asimismo un espacio dedicado a las matemáticas.

De talla más modesta, encontramos igualmente entidades como la Casa de las Matemáticas y de la Informática en Lyon (<http://www.mmi-lyon.fr>), la asociación Fermat Science (<http://www.fermatscience.com>) que propone animaciones en Beaumont-de-Lomagne, el pueblo natal de Pierre de Fermat cercano a Toulouse, el Exploradome (<http//www.exploradome.fr>) de Vitry-sur-Seine o la Casa de las Matemáticas (<http://maisondesmaths.be>) de Quaregnon en Bélgica.

Y, si viajas, el Mathematikum (<http://www.mathematikum.de>) de Giefien, en Alemania, o el MoMaths (<http://momath.org>) de Nueva York, en Estados Unidos, son dos museos consagrados exclusivamente a las matemáticas.

Todas estas instituciones son muy interactivas y conceden un lugar prominente a toda clase de manipulaciones y experiencias.

A estos espacios permanentes, hay que añadir eventos puntuales como el Salón de Cultura y Juegos Matemáticos (<www.cijm.org>) organizado anualmente a finales de mayo en París. La Fiesta de la Ciencia (<http://www.fetedelascience.fr>) que se celebra en octubre y la Semana de las Matemáticas en marzo ven florecer todos los años diversos acontecimientos por toda Francia. La Semana de las Matemáticas suele incluir además el 14 de marzo, día de π y gran fiesta mundial de las matemáticas.

Libros

Existen numerosas obras que tratan de matemáticas con diversos niveles de divulgación y de especialización. Por supuesto, las siguientes recomendaciones no son exhaustivas.

Martin Gardner, que dirigió de 1956 a 1981 la sección de matemáticas del *Scientific American*, es un personaje imprescindible de las matemáticas recreativas. Sus colecciones de crónicas, así como sus numerosos libros de magia matemática o de enigmas, son referencias en su ámbito. Entre los clásicos, cabe citar asimismo a Yakov Perelman y su famoso *Matemática recreativa*, o a Raymond Smullyan, con sus libros de lógica como *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos* o *¿Cómo se llama este libro?*

Entre los autores más recientes, recomiendo los libros de Ian Stewart como *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*, de Marcus Du Sautoy como *La symétrie ou les maths au clair de lune*, o de Simon Singh como *Los códigos secretos* o *Los Simpson y las matemáticas*. Por su parte, *The Math Book*, de Clifford A. Pickover, ofrece un panorama cronológico e ilustrado de las más fabulosas joyas de la historia de las matemáticas.

Entre los autores franceses, destacaré a Denis Guedj, autor de numerosas obras como la célebre novela policíaca histórico-matemática *El teorema del loro*. Jean-Paul Delahaye es asimismo un autor inspirador, con libros como *Le Fascinant Nombre* π *o Merveilleux nombres premiers*.

En otro género, *Théoreme vivant*, de Cédric Villani, ofrece una inmersión en el corazón de la investigación matemática actual a través del relato del nacimiento de un teorema.

En internet

El sitio «Image des mathématiques» (<http://images.math.cnrs.fr>) propone regularmente artículos de divulgación de la investigación actual, escritos por matemáticos.

No dejes de consultar el blog «Choux romanesco. Vache qui rit et Intégrale curviligne» (<http://eljjdx.canal-blog.com>), de El Jj, cuyas entradas son especialmente sabrosas.

Las películas *Dimensions* (<http://www.dimensions-math.org>) y *Chaos* (<http://www.chaos-math.org>), producidas por Jos Leys, Aurélien Alvarez y Étienne Ghys, nos introducen con magníficas animaciones en el mundo de la cuarta dimensión y de la teoría del caos.

Desde hace algunos años, se multiplican los canales de divulgación científica, sobre todo en YouTube. En matemáticas, cabe citar los vídeos de El Jj que complementan su blog citado más arriba, así como los canales «Science4All», «La statistique expliquée a mon chat» o «PasseScience».

Para descubrir otros, plataforma Vidéosciences (<http://videosciences.cafe-sciences.org>) incluye más de un centenar de canales de todos los campos científicos.

En el mundo anglófono, citaré entre otros el canal «Numberphile» o los vídeos de *Vi Hart*.

También puedes buscar vídeos de conferencias para el gran público pronunciadas por investigadores de las matemáticas. Los matemáticos Étienne Ghys, Tadashi Tokieda o Cédric Villani son especialmente brillantes en esta labor.

Bibliografía

He aquí una bibliografía de los principales documentos que me han acompañado durante la escritura de este libro. Advierto que algunos pueden resultar muy técnicos. La lista se presenta por orden alfabético de autores.

Leyenda:

Época

A: Antigüedad

M: Edad Media

R: Renacimiento

E: Edades Moderna y Contemporánea

Tema

G: Geometría

N: Números/Álgebra

P: Análisis/Probabilidades

L: Lógica

C: Otras ciencias

[EP] Agnesi, M. G., *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, Claude-Antoine Jombert Libraire, 1775.

Albers, D. J., G. L. Alexanderson y C. Reid, *International Mathematical Congresses, an illustrated history*, Springer-Verlag, 1987.

[AG] Arquímedes, *Turres d'Archimede avec un commentaire par F. Peyrard*. Frangois Buisson Libraire-Éditeur, 1854 (trad. cast.: *Tratados*, Madrid, Gredos, 2 vols., 2005-2009).

[AL] Aristóteles, *Physique*, GF-Flammarion, 1999 (trad. cast.: *Física*, Madrid, Gredos, 2002).

[EP] Banach, S., y A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae, 1924).

[E] Belhoste, B., *Paris savant*, Armand Colin, 2011.

[EP] Bernoulli, J., *L'Art de conjecturer*, Imprenta G. Le Roy, 1801.

[G] Brahem, J.-L., *Histoires de géometres et de géométrie*, Éditions le Pommier, 2011.

[MN] Bravo-Alfaro, H., *Les Mayas, un lien fort entre Maths et Astronomie*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[N] Cajori, F., *A History of Mathematical Notations*, The Open Court Company, 1928.

[RN] Cardano, G., *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications, 1968.

[RN] Charbonneau, L., *Il y a 400 ans mourait sieur Frangois Viète, seigneur de la Bigotiere*, Boletín AMQ, 2003.

[AG] Chemla, K., G. Shuchun, *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, 2005 (trad. cast.: *Liu Hui: nueve capítulos de la matemática china*, Tres Cantos, Nivola, 2009).

[AG] Chemla, K., «Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes connues», en *La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[AG] Clagett, M., *Ancient Egyptian Science: A Source Book*, American Philosophical Society, 1999.

[EG] Cluzel, R., y J.-P. Robert, *Géométrie: Enseignement technique*, Librairie Delagrave, 1964.

VV. AA., Departamento de Matemáticas, Universidad Estatal de Dakota del Norte, *Mathematics Genealogy Project*, <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>, 2016.

[N] Conway, J. H., y R. K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer, 1996.

[E] Curbera, G. P., *Mathematicians of the world, unite!: The International Congress of Mathematicians. A Human Endeavor*, CRC Press, 2009.

Delahaye, J.-P., *Le Fascinant Nombre* π, Pour la science / Belin, 2001.

Deledicq, A., *et al.*, *La Longue Histoire des nombres*, ACL, Les éditions du Kangourou, 2009.

[AG] Deledicq, A., y F. Casiro, *Pythagore & Thales*, ACL, Les éditions du Kangourou, 2009.

Deledicq, A., J.-C. Deledicq y F. Casiro, *Les Maths et la Plume*, ACL. Les éditions du Kangourou, 1996.

[M] Djebbar, A., *Bagdad, un foyer au carrefour des cultures*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[M] Djebbar, A., «Les Mathématiques árabes», en VV. AA., *L'age d'or des sciences arabes*, Actes Sud / Institut du Monde Arabe, 2005.

[M] Djebbar, A., «Panorama des mathématiques arabes», en *La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[A] Engels, D. W., *Alexander the Great and the Logistics of the Macedonian Army*, University of California Press, 1992.

[AG] Euclides, *Les Quinze Livres des Éléments géométriques d'Euclide*, traducción francesa de D. Henrion, Imprenta Isaac Dedin, 1632 (trad. cast.: *Elementos*, Madrid, Gredos, 2000).

[MN] Fibonacci, L., *Liber Abaci*, fragmentos traducidos al francés por A. Scharlig, <https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/texte_fibonacci.pdf>.

[EC] Galileo, *The Assayer*, traducción al inglés de S. Drake, <http://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm>.

[N] Guedj, D., *Zéro*, Pocket, 2008.

Hauchecorne, B., y D. Surreau, *Des mathématiciens de A a Z*, Ellipses, 1996.

Hauchecorne, B., *Les Mots & les Maths*, Ellipses, 2003.

[E] Hilbert, D., *Sur les problemes futurs des mathématiques: Les 23 problemes*, Éditions Jacques Gabay, 1990.

[EL] Hofstadter, D., *Godel, Escher, Bach*, Dunod, 2000 (trad. cast.: *Godel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*, Barcelona, Tusquets, 2007).

[AN] Heyrup, J., *L'Algebre au temps de Babylone*, Vuibert, Adapt Snes, 2010.

[AN] Heyrup, J., «Les Origines» en *La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[A] Jámblico, *Vie de Pythagore*, La roue a libres, 2011 (trad. cast.: *Vida pitagórica, Protréptico*, Madrid, Gredos, 2008).

[N] Keith, M., basado en E. Poe, «Near a Raven», <http://cadaeic.net/naraven.htm>, 1995.

[MN] Keller, A., *Des devinettes mathématiques en Inde du Sud*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[MN] Al-Juarismi, M., *Algebra*, traducción al inglés de Frederic Rosen, Oriental Translation Fund, 1831.

[A] Laercio, D., *Vie, doctrines et sentences des philosophes illustres*, GF-Flammarion, 1965 (trad. cast.: *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*, Valladolid, Maxtor, 2008).

[EP] Launay, M., *Urnes Interagissantes*, tesis doctoral, Universidad de Aix-Marseille, 2012.

[EG] Mandelbrot, B., *Les Objets fractals*, Champs Science, 2010 (trad. cast.: *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets, 2006).

Mehl, S., *ChronoMath, chronologie et dictionnaire des mathématiques*, <http://serge.mehl.free.fr/>.

[M] Moyon, M., *Traduire les mathématiques en Andalus au XIIe siecle*, Maths

Express au carrefour des cultures, 2014.

[EL] Nagel, E., J. R. Newman, K. Godel y J.-Y. Girard, *Le Théoreme de Godel*, Points, 1997 (trad. cast.: *El teorema de Godel*, Madrid, Tecnos, 2008).

[RN] Napolitani, P. D., «La Renaissance italienne», en *La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[EC] Newton, I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Dunod, 2011 (trad. cast.: *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Madrid, Alianza, 2013).

Sautoy, M. du, *La Symétrie ou les Maths au clair de lune*, Éditions Héloise d'Ormesson, 2012.

[EP] Pascal, B., *Traité du triangle arithmétique*, Guillaume Desprez, 1665.

[MG] Pérez Gómez, R. *et al.*, *La Alhambra*, Granada, Revista Epsilon, 1987.

Peters, A., *Histoire mondiale synchronoptique*, Éditions académiques de Suisse, Basilea.

[AG] Platón, *Timée*, GF-Flammarion, 1999 (trad. cast.: *Timeo*, Madrid, Gredos, 2011).

[MN] Plofker, K., «L'Inde ancienne et médiévale», en *La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[E] Poincaré, H., *Science et Méthode*, Flammarion, 1908 (trad. cast.: *Ciencia y método*, Madrid, Espasa-Calpe, 1963).

[EP] G. Pólya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1930.

[AN] Proust, C., «Breve chronologie de l'histoire des mathématiques en Mésopotamie», CultureMATH, <http://culturemath.ens.fr/content/breve-chronologie-de-lhistoire-des-mathématiques-en-mésopotamie>, 2006.

[AN], Proust, C., «Le Calcul sexagésimal en Mésopotamie», CultureMATH, <http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexagésimal-enmésopotamie>, 2005.

[AN] Proust, C., «Mathématiques en Mésopotamie, Images des mathématiques», <http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html>, 2014.

[A] Pitágoras, *Les Vers d'or*, Éditions Adyar, 2009 (trad. cast.: *Versos áureos*, Madrid, Magalia, 1994).

[EL] Russell, B., y A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Merchant Books, 2009 (trad. cast.: *Principia mathematica*, Madrid, Paraninfo, 1981).

[AN] Schmandt-Besserat, D., «From Accounting to Writing», en B. A. Rafoth y D. L. Rubin, *The Social Construction of Written Communication*, Ablex Publishing Co., Norwood, 1988.

[AN] Schmandt-Besserat, D., *The Evolution of Writing*, sitio personal de la autora, <https://sites.utexas.edu/dsb/>, 2014.

[RN] Serfati, M., «Le Secret et la Regle», en VV. AA., *La recherche de la vérité*, ACL, Les éditions du Kangourou, 1999.

[EL] Smullyan, R., *Les Théoremes d'incomplétude de Godel*, Dunod, 2000.

[EL] Smullyan, R., *Quel est le titre de ce livre?*, Dunod, 1993 (trad. cast.: *¿Cómo se llama este libro?*, Barcelona, RBA, 2007).

[N] Stendhal, *Vie de Henry Brulard*, Folio classique, 1973 (trad. cast.: *La vida de Henry Brulard*, Barcelona, Alfaguara, 2004).

[EL] Turing, A., *On computable numbers with an application to the «Entscheidungsproblem»*, Actas de la Sociedad Matemática de Londres, 1936.

[RN] Viète, F., *Introduction en l'art analytique*, traducido al francés por A. Vasset, 1630.

Notas

[1] Traducción francesa de Jens Hoyrup, *L’algebre au temps de Babylone,* Éditions Vuibert / Adapt-SNES, 2010. <<

[2] El enunciado de la tablilla parece decir que la longitud y la profundidad son iguales, pero, en el sistema babilónico, las profundidades se miden con una unidad doce veces mayor que las longitudes. <<

[3] Es preciso observar asimismo que, con el sistema en base sesenta, la notación 1,10 designa el número igual a «uno más diez sesentavos», que expresamos en nuestro sistema actual mediante la fracción 7/6. Por su parte, la expresión ,50 designa la fracción 5/6 (o cincuenta sesentavos). <<

[4] La pendiente de una cara de la pirámide, también llamada *seked* en egipcio, corresponde a la distancia horizontal entre dos puntos cuya altura difiere en un codo. <<

[5] Traducción francesa de Karine Chemla y Shuchun Guo, *Les neuf chapitres*, Éditions Dunod, 2005 (trad. cast.: *Liu Hui: nueve capítulos de la matemática china*, Tres Cantos, Nivola, 2009). <<

[6] Este axioma, considerablemente más complejo que los otros cuatro, provocará numerosos debates entre los matemáticos. En la figura de abajo, la suma de los dos ángulos indicados es inferior a dos ángulos rectos y, en consecuencia, las rectas 1 y 2 son secantes por el lado de estos dos ángulos. <<

[7] En castellano, contando las letras de cada palabra de este poema, obtenemos las veinte primeras cifras de π: «Soy y seré a todos definible, / mi nombre tengo que daros, / cociente diametral siempre inmedible / soy de los redondos aros». (*N. del T.*) **<<**

[8] El poema «The Raven», escrito por Edgar Allan Poe en 1845, fue adaptado en 1995 por Michael Keith con el título «Near a Raven» para adecuarse a la constante matemática. Comienza así: «*Poe E. / Near a Raven. / Midnights so dreary, tired and weary. / Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore*». <<

[9] El matemático holandés Ludolph Van Ceulen calculará 35 decimales ciento setenta años más tarde. <<

[10] La notación √5 en esta fórmula designa la raíz cuadrada del número 5, es decir, el número positivo cuyo cuadrado es igual a 5. Este número vale aproximadamente 2,236. <<

[11] El cálculo de la suma de infinitos números se hace utilizando la noción de límite. El método consiste en truncar la suma para considerar solo un número finito de términos, y luego ir añadiendo cada vez más para ver a qué número límite se acercan estas sumas truncadas. En el caso de Aquiles y de la tortuga, si consideramos únicamente los siete primeros términos, hallamos: 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + 1,5625 = 198,4375. Si prolongamos la suma hasta el vigésimo término, obtenemos aproximadamente 199,9998. Es posible demostrar que, añadiendo cada vez más términos, nos vamos acercando a 200. Por consiguiente, la suma infinita vale 200. <<

[12] Pero hemos de tener en cuenta que, para que la fórmula funcione, el ángulo no debe medirse en grados sino en radianes. Con esta nueva unidad, un giro completo ya no equivale a 360° sino a 2π radianes. Esto puede parecer extraño y, sin embargo, esta es la unidad con la que las fórmulas trigonométricas y las sucesiones a ellas asociadas funcionan correctamente. <<

[13] La palabra *álgebra* designa a la vez la disciplina entera y un tipo particular de estructura algebraica. <<

[14] El octaedro es uno de los cinco sólidos platónicos que ya conocemos. El octaedro truncado se obtiene cortando los vértices del octaedro, del mismo modo que el icosaedro truncado (o balón de fútbol) se obtiene cortando los de un icosaedro. <<

[15] La unidad astronómica corresponde a la distancia Tierra-Sol y mide aproximadamente 150 millones de kilómetros. <<

[16] La única que tengo, en realidad. <<

[17] Recordemos que los dos primeros términos de la sucesión de Fibonacci son 1 y 1, y luego cada término es la suma de los dos precedentes. La sucesión comienza así: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… <<

[18] Ya conocemos a Poincaré. A él le debemos la frase: «Hacer matemáticas es dar el mismo nombre a cosas diferentes». <<

[19] Desde 1991, estos artículos procedentes del mundo entero se difunden libremente en internet a través de la plataforma arXiv.org creada por la universidad estadounidense de Cornell. Si deseas ver qué aspecto tiene un artículo de matemáticas, puedes navegar por ella. <<

[20] Los números primos son los números que no pueden expresarse como la multiplicación de dos números menores que ellos. Por ejemplo, 5 es un número primo, pero no 6, ya que 2 x 3 = 6. La serie de los números primos comienza con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… <<

[21] E incluso habiéndolas leído, francamente no es nada sencillo. <<

[22] El cero en el medio, los números negativos a la izquierda y los positivos a la derecha. <<