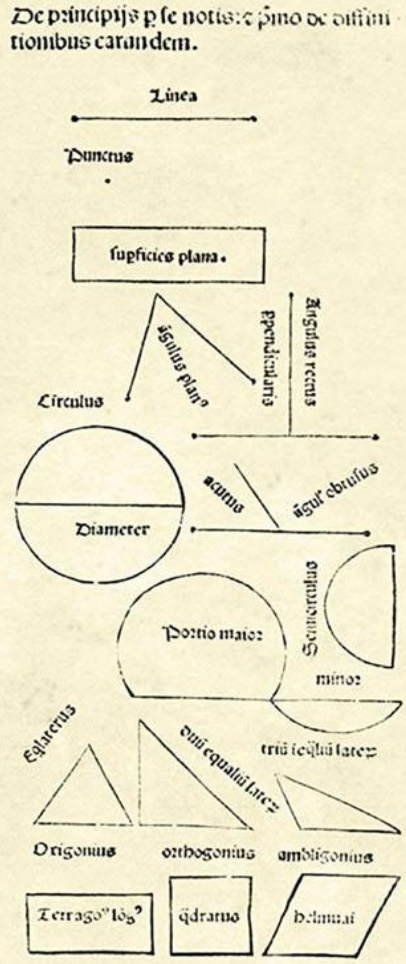
Benjamin Wardhaugh

Las infinitas vidas de Euclides

Historia del libro que forjó nuestro mundo



Sería difícil encontrar un libro más influyente en la historia de la cultura que los *Elementos* de Euclides. A lo largo de dos mil trescientos años, su poder ha traspasado las matemáticas y la ciencia para ejercer un influjo notable en ámbitos como el arte, la literatura o la filosofía. Incontables lectores se han sentido atrapados por su sabiduría acerca del espacio y sus propiedades, en un inacabable mundo de belleza abstracta e ideas puras.

Pocos artefactos sobreviven al hundimiento de la cultura que los ha generado; pocos textos superan la desaparición de la lengua en que están escritos. Los *Elementos* ha sobrevivido a ambas cosas; de hecho, podemos decir que no solo ha sobrevivido, sino que ha prosperado mientras iba pasando por una serie de situaciones increíblemente diversas.

Los escultores de la fachada occidental de la catedral de Chartres representaron a Euclides, los sabios del Bagdad abasí tradujeron su libro; un filósofo ateniense escribió acerca de él, y un artista estadounidense convirtió sus diagramas en obras de arte. Además de estos ejemplos escogidos de entre muchos a lo largo de la historia de la humanidad, los *Elementos* tuvieron un papel relevante en la revolución científica, cuyo fundamento fue la decisión de leer el libro de la naturaleza como si estuviera escrito en el lenguaje de las matemáticas.

Una generación tras otra ha descubierto los *Elementos* en nuevos lugares y se ha inspirado en ellos para crear. En definitiva, la obra de Euclides ha viajado por mundos que los griegos que escribieron y leyeron el texto por primera vez ni tan solo podían imaginar.

Benjamin Wardhaugh

Las infinitas vidas de Euclides: historia del libro que forjó nuestro mundo

ePub r1.0
Titivillus 06-08-2023

Título original: *The Book of Wonders. The Many Lives of Euclid's Elements*
Benjamin Wardhaugh, 2020
Traducción: Marc Figueras

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

Para mis padres

Prólogo

Lugar: Alejandría, *Alexándreia*. Época: durante el reinado de Ptolomeo, el primero de los alejandrinos; pongamos por caso el décimo año de su gobierno, poco después del 300 a. C.

Llegamos por mar, con el sol egipcio reflejándose sobre el agua. Atravesamos el puerto y entramos en la ciudad. Pasamos la Puerta de la Luna y, edificio tras edificio, seguimos por la vía Canopa, rodeados de mármol blanco, polvo y martillazos; obras por doquier. Estamos en la más magnífica de las ciudades; si quisiéramos podríamos ir en carro por todas esas calles, pavimentadas y enmarcadas por fachadas blancas. Aún podemos oír el murmullo del mar. En un cruce giramos a la izquierda, por la calle del Soma, larga y refrescada por la brisa. Nos adentramos en el barrio del palacio: los templos, el museo, la biblioteca.

Una de las personas que trabaja en el famoso barrio cultural es un hombre llamado Euclides; uno de sus libros, los *Elementos de geometría*. Cuando la magnífica Alejandría de Ptolomeo quede reducida a polvo, este libro seguirá con vida.

A lo largo de veintitrés siglos, los *Elementos de geometría* han ido cambiando el mundo. Se trata de un conjunto de afirmaciones sobre el espacio y sus propiedades (líneas y formas, números y proporciones) que ha atrapado a incontables lectores en su inacabable mundo de belleza abstracta e ideas puras. Y su viaje durante estos veintitrés siglos ha sido fascinante. Pocos objetos sobreviven al hundimiento de la cultura que los ha generado; pocos textos superan la desaparición de la lengua en que están escritos. Los *Elementos* han sobrevivido a ambas cosas; de hecho, podemos decir que no solo han sobrevivido, sino que han prosperado mientras iba pasando por una serie de situaciones increíblemente diversas. Los lectores parecen haber encontrado en su austeridad las cualidades que lo han hecho interesante y valioso en cada lugar y en cada momento.

Los escultores de la fachada occidental de la catedral de Chartres representaron a Euclides, los sabios del Bagdad abasí tradujeron su libro; un artista estadounidense convirtió sus diagramas en obras de arte, un filósofo ateniense escribió un comentario sobre el libro. Los *Elementos* tuvieron su papel relevante en la revolución científica, cuyo fundamento fue la decisión de leer el libro de la naturaleza como si estuviera escrito en el lenguaje de las matemáticas.

En Pequín, entre agosto de 1606 y abril del siguiente año, el académico Xu Guangqi y el jesuita italiano Matteo Ricci se esforzaron en traducir los *Elementos*, uno de los libros que Ricci había llevado consigo desde el Lejano Oeste, al idioma del sabio mandarín. Lucharon con la terminología, con la estructura del texto y con las muy diferentes presunciones que cada uno de ellos asumía sobre el contenido del libro. Revisaron el texto tres veces antes de quedar satisfechos y decidir publicarlo.

Entre mayo y noviembre de 1817, en la otra punta del mundo, Anne Lister se reservó sus mañanas para la aritmética y Euclides, a partes iguales. Llegado el otoño, se había peleado con los *Elementos* más que la mayoría de los licenciados universitarios.

Mil años antes, en la abadía de Gandersheim, en la Baja Sajonia, la canonesa Hroswitha incluyó en una de sus obras de teatro la definición de Euclides de número perfecto, como parte de la burla que lanzaba la Sabiduría contra el emperador Adriano, que intentaba torturarla junto a sus hijas.

Una y otra vez, cada generación se ha topado con los *Elementos* en nuevos lugares y ha construido nuevas cosas a partir de ellos. Los *Elementos* han viajado por mundos que los griegos que escribieron y leyeron el texto por primera vez ni tan siquiera podían imaginar.

¿Qué implica que un libro viva más de dos mil años? ¿Qué significa sobrevivir al hundimiento de la civilización que lo creó? ¿Qué significa hallar lectores una y otra vez, por todas partes y en todas las épocas? ¿Qué significados pueden encontrar en él esos lectores? ¿Cuáles son estos lectores que el libro tiene que encontrar?

Acompañadnos en este viaje y lo descubriréis.

I

EL AUTOR

Alejandría

El geómetra y el rey

Alejandría, hacia el 300 a. C.

Una cena, pongamos por caso un simposio en el barrio del palacio, tal vez en el Museo. Con la presencia del mismísimo Ptolomeo, general, héroe, rey y divinidad. La charla deriva hacia la geometría: ¿por qué es tan difícil?, ¿por qué no hay un camino más sencillo? El geómetra, un hombre desaliñado pero vivaz, responde: «No hay Camino Real hacia la geometría»[1].

Este desaire es una de las historias irresistibles que se cuentan sobre Euclides. Ptolomeo había sido amigo de infancia de Alejandro Magno y luego también uno de sus guardaespaldas; incluso puede que fuera su hermanastro ilegítimo. Era un general leal (se dice que su nombre significa ‘guerrero’), ponderado y capaz de grandes actos; un tipo que no se andaba con rodeos.

También fue uno de los grandes supervivientes. En los veinte años de caos que siguieron a la muerte de Alejandro, cuando muchos hombres más hábiles acabaron muertos, Ptolomeo jugó bien sus cartas y ganó. De todos los sucesores que se repartieron el breve y enorme imperio de Alejandro, creó la dinastía más duradera, el reino más estable. Decidió instalarse en Egipto y nunca arriesgó su reino buscando un imperio más extenso. Después de él, se sucedieron catorce gobernantes ptolemaicos hasta que Cleopatra lo perdió todo en la batalla de Accio doscientos cincuenta años después. Así pues, estamos ante el primer rey de la última dinastía egipcia, la dinastía lágida (por el nombre del padre de Ptolomeo, Lagos); *basileos* para los griegos, faraón para los egipcios, heredero de tres mil años de monarquía egipcia y, claro está, también un dios. En el año 306 a. C. repelió un ataque sobre Rodas con tanta contundencia que se erigieron altares en su honor y recibió el apelativo de Sóter, ‘salvador’. En el 278 a. C. ya se celebraban juegos ptolemaicos en su honor, cada cuatro años, como los olímpicos.

Ptolomeo I Sóter.

El geómetra, por el contrario (un hombre llamado Euclides, *Eukleídes*), es un personaje absolutamente oscuro, históricamente hablando. Por desgracia, la historia sobre el «Camino Real hacia la geometría» es poco más que una divertida ocurrencia; también se cuenta de otro geómetra (Menecmo) y otro rey (Alejandro), y tenemos escasas razones para suponer que ocurrió de verdad. Incluso las fechas sobre Euclides (alrededor del 300 a. C.) son simples conjeturas de autores que escribieron siglos después de su muerte. A diferencia del bien documentado Ptolomeo, Euclides no dejó ningún indicio biográfico; no fundó ninguna dinastía ni construyó ningún palacio. Su legado fue exclusivamente intelectual, pero ¡vaya legado! Su escuela de estudiantes en Alejandría sobrevivió a su muerte; su libro sobrevivió a su civilización.

¿Qué clase de ciudad era esta Alejandría, el mayor logro de Ptolomeo, que generó un hombre y un libro así? Sin duda era el escenario ideal para los *Elementos de geometría*. La ciudad fue fundada por el propio Alejandro Magno, en un lugar donde ya se alzaba un pequeño pueblo y, como tantas otras de sus fundaciones, llevaba su nombre. Alejandro nunca vio ni uno solo de sus nuevos edificios, pero Ptolomeo la escogió como capital, trasladando allí la sede real de Menfis. Era una polis griega en un mundo que tenía bien poco de griego, una nueva fundación en un país en que muchas ciudades tenían ya dos mil años. Ptolomeo hizo todo lo que pudo para que la ciudad fuera esplendorosa; disponía de una asamblea, un concejo, una ceca para acuñar moneda propia y se regía por sus propias leyes. Tenía anchas avenidas, columnatas, arboledas e iluminación pública. En el año 332 a. C. Ptolomeo se hizo con el cadáver de Alejandro y lo mostró en su nueva ciudad real.

Ciertamente, era un lugar espléndido para una ciudad, allí donde se unen dos continentes, justo al oeste de la desembocadura del Nilo. Alejandría sería un importantísimo puerto comercial durante siglos y una plaza militar estratégica hasta la segunda guerra mundial. Ptolomeo sentó los cimientos del famoso Faro de Alejandría, la fortaleza y punto de referencia que formó parte de las siete maravillas del mundo antiguo. Con ciento veinte metros de altura y coronado por una estatua de Zeus, se mantuvo en pie durante mil quinientos años. Atraídos por una urbe tan magnífica, llegaron inmigrantes de todo el mundo griego y Alejandría se convirtió en una ciudad no solo grande y espléndida, sino también populosa y cosmopolita, con griegos, macedonios, egipcios, judíos y sirios apelotonándose por sus calles como en un hormiguero. En pocas generaciones llegaría al millón de habitantes.

Además de la planificación urbanística y de la construcción desaforada de incontables edificios, Ptolomeo se preocupó por impulsar una política cultural, y lo hizo con su eficiencia característica. Para igualarse a un auténtico faraón egipcio, se entregó a un programa escultórico e ideó un nuevo culto a «Serapis», una divinidad descaradamente inventada con una iconografía híbrida. Como todos sus logros, persistió: el templo de este culto, el Serapeo de Alejandría, se mantuvo en pie durante seiscientos años.

Al mismo tiempo, para satisfacer al espíritu griego, organizó desfiles y festivales y construyó un palacio con tapices que serían la envidia de los dioses. Tal como expresó un contemporáneo, Alejandría tenía «riquezas, escuelas de lucha, poder, tranquilidad, fama, espectáculos, filósofos, oro, jóvenes, el santuario de los dioses hermanos […] el Museo, vino y todo aquello que uno podría desear». Todo esto era valiosísimo para proyectar el poder griego y un concepto de «grecidad» en un entorno profundamente ajeno, como diciendo «esto es lo que hacemos en el mundo griego; este es nuestro derecho a gobernar».

Y el Museo, el *museion*, el santuario de las musas, formaba parte de este plan. Contaba con el financiamiento real y con sabios de todas las disciplinas posibles. Su director era sacerdote de las musas y entre sus académicos había poetas, gramáticos, historiadores, filósofos, médicos, filósofos naturales, geógrafos, ingenieros, astrónomos y, claro está, geómetras. El Museo fue en parte obra de Ptolomeo y en parte obra de Demetrio de Faleros, un famoso discípulo de Aristóteles traído a Alejandría desde Atenas para supervisar la creación de esta nueva institución. El Museo tenía patios, galerías y jardines, un refectorio y un observatorio; el personal llegaba quizá a unos cuarenta sabios, que se dedicaban a investigar, escribir y, a veces, enseñar. Organizaban doctos simposios, a algunos de los cuales asistía el rey. Era un conjunto de personas en verdad notable, que a veces eran comparadas, con cierta mala intención, con la colección zoológica también creada por Ptolomeo: «Ratas de biblioteca bien alimentadas que discuten sin parar en la jaula de las musas». Pero si había ratas de biblioteca es porque había una biblioteca, la biblioteca de Alejandría, que se convertiría en la más famosa del mundo, si bien parece que fue creada un poco más tarde, bajo el reinado del hijo de Ptolomeo.

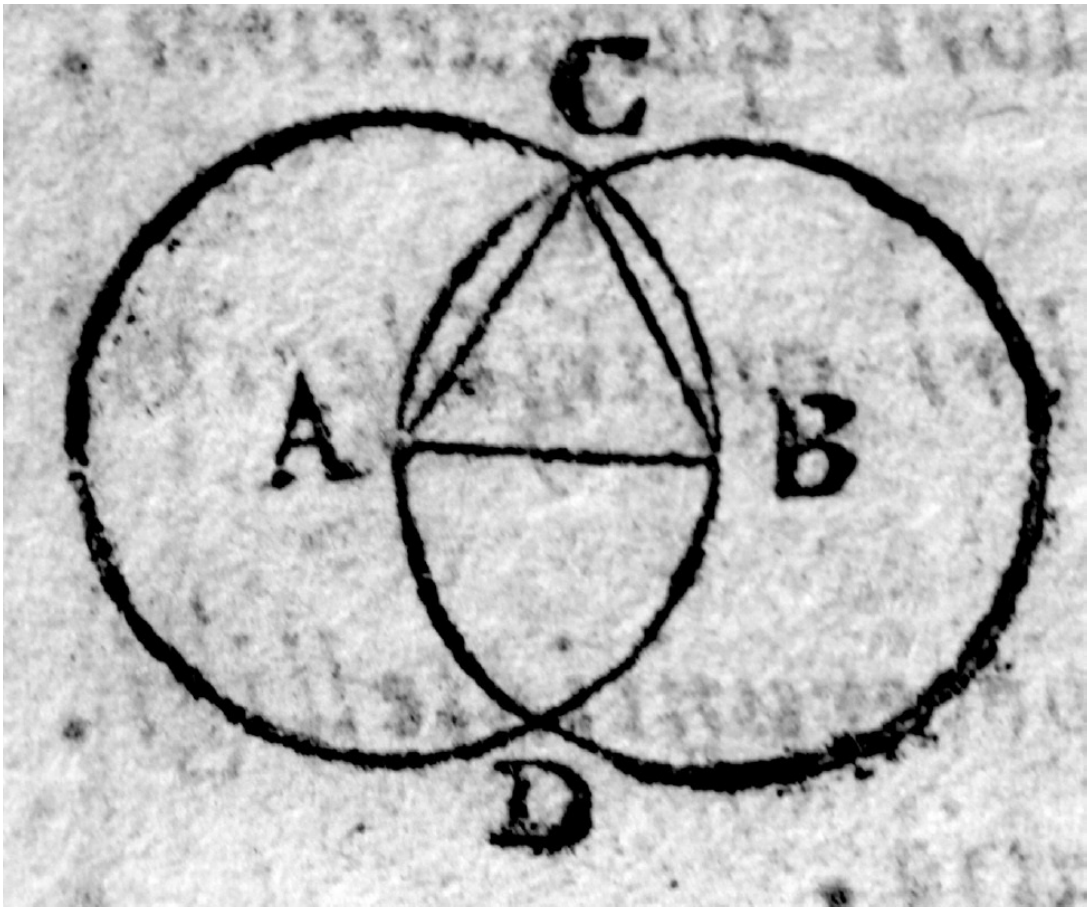
Y por todo ello el famoso matemático griego acabó trabajando en Egipto. ¿Era Euclides otro animal más de la colección de Ptolomeo, otro sabio más traído a la ciudad para engordar las filas del Museo? De hecho, no se sabe con seguridad si nació en Alejandría o era un inmigrante, aunque en una fecha tan temprana de la vida de la ciudad, la segunda posibilidad parece bastante más probable. Pero ¿un inmigrante procedente de dónde? Su prosa austera no aporta ninguna pista dialectal, a diferencia de los textos de Arquímedes una generación más tarde, con su claro dialecto dórico de Siracusa.

Lo que llegó a Alejandría con la persona de Euclides (y quizá con las personas de otros matemáticos, pues no está claro si fue el único) fue la sólida tradición de la geometría griega. A los griegos les gustaba tener cosas en las que pensar; les gustaba tener aficiones, y algunos se dedicaban a las carreras de carros, algunos a hablar de filosofía y otros se lanzaban a la política. A partir de finales del siglo V a. C., más o menos, algunos también se interesaron por la geometría.

¿En qué se traducía este interés por la geometría? Tal vez lo mejor sea considerar la geometría griega como un fruto de la pasión griega por el debate, por la discusión, pues en el fondo, la geometría no era nada si no iba acompañada de una buena presentación, un buen espectáculo: traza una recta, un cuadrado, un círculo y razona en voz alta a medida que dibujas y presumes ante la inevitable audiencia. A partir de estos inicios se fue conformando el persistente juego del razonamiento geométrico. La imagen de un geómetra trazando figuras en la arena continúa formando parte de la idea que tenemos de los antiguos matemáticos griegos, rastrillando en el «polvo erudito», tal como lo expresó el orador romano Cicerón, quien evocaba a Arquímedes aludiendo a «la arena donde trabajaba con su varilla» (aunque, ¿habéis probado a trazar un diagrama detallado en arena seca? Parece mucho más probable que se hiciera en tablillas de arcilla o de cera o, si era para mostrar a una audiencia más numerosa, en tableros de madera).

La cantidad de matemáticos griegos nunca fue muy grande y, en consecuencia, tenían que escribir sus ideas para que se conservara todo lo que habían descubierto acerca de sus rectas y círculos; al parecer, no había suficientes para que bastara una transmisión de conocimientos puramente oral. De este modo nació un nuevo género, un estilo particular de redacción matemática. Este estilo acabaría definiendo la matemática en Occidente durante más de dos milenios, con tanta rigidez como la métrica poética y la misma longevidad. Sus componentes eran el enunciado (de algo que debe demostrarse), el diagrama con sus elementos etiquetados con letras y una cadena de razonamiento desde las cosas ya sabidas hasta las cosas nuevas que se demuestran. Esta cadena finaliza con la solución al plantemiento, su resultado previsto; de ese modo, el enunciado —la proposición—, se cierra con la frase «lo que había que demostrar», *hóper édei deíxai* o *quod erat demostrandum*, QED. En algunos casos esto se transforma en «lo que había que trazar» o «lo que había que construir». He aquí un ejemplo:

> Cómo trazar un triángulo equilátero.
>
> Partimos de una línea recta cualquiera, cuyos extremos denominamos A y B.
>
> Ahora trazamos dos círculos, cada uno con un radio igual a la longitud de la recta AB: uno centrado en A y el otro centrado en B.
>
> Los dos círculos se cortan en dos puntos. Escogemos uno de ellos, que llamamos C. Ahora unimos A, B y C. Forman un triángulo equilátero.
>
> ¿Por qué?
>
> Gracias al modo que se ha usado la distancia de A a B para hallar C, C está a la misma distancia de A que de B. Es decir, los tres lados del triángulo, AB, BC y CA, son de la misma longitud. En consecuencia, es un triángulo equilátero. Que es lo que había que trazar.



Construcción de un triángulo equilátero.

Las mismas fuentes antiguas que nos informan de cuándo vivió Euclides también nos dicen que hacia el 400 a. C. en Grecia ya había recopilaciones escritas de conocimientos geométricos, un siglo antes del matemático. Aportan bastante información sobre los temas que trataban, e incluso algunos resultados y procedimientos concretos, pero los textos escritos a los que se refieren no han sobrevivido, lo que arroja ciertas dudas sobre su veracidad. Tenemos una fuerte tendencia a crear genealogías de las ideas matemáticas cuando carecemos de pruebas reales, de modo que sí, tal vez el estudio del círculo fue obra de los pitagóricos, como los trabajos sobre los números y sus propiedades. Del mismo modo, es muy probable que los estudios sobre proporciones fueran obra de un geómetra llamado Eudoxo a principios del siglo IV a. C. Algunos trabajos sobre los sólidos regulares se iniciaron con otro geómetra, Teeteto. En cambio, la afirmación de que antes de Euclides había libros completos titulados *Elementos de geometría* parece bastante más dudosa.

Así pues, ¿cuál fue el papel de Euclides? Recopiló todo el material más sencillo conocido por los geómetras griegos de su tiempo y lo reunió en un solo libro, además de organizarlo adecuadamente, tanto a una escala general como a una escala más detallada. Sin duda, añadió algunas cosas de su propia cosecha, aunque hoy nadie puede identificar con seguridad qué puede ser lo nuevo y qué lo anterior. Los historiadores siguen discutiendo (y continuarán haciéndolo siempre) sobre cuánto hay de compilación y cuánto de composición en el libro de Euclides. Su obra fue una gran compilación, como también la del propio Ptolomeo; Euclides, una pieza más del Museo, se convirtió, a su vez, en conservador, siendo los *Elementos* su propio Museo en miniatura.

Sin embargo, por mucho que fuera un museo en miniatura, albergaba todo un mundo. Era un escaparate de la prosa de la geometría en un recorrido ceremonial formado por una proposición tras otra; cuatrocientas en total, dispuestas en trece «libros» o capítulos. Cada verbo era indicativo, imperativo y pasivo: «Trácese un círculo…». Tenía algo de hipnótico, algo de calma infinita. El libro empezaba con una serie de definiciones: ¿qué se entiende por *línea recta*?, ¿por *punto*?, ¿por *círculo*? A ello siguen las manipulaciones más sencillas de rectas y formas en dos dimensiones: cómo trazar diferentes tipos de triángulos, cómo dividir en dos una recta o un ángulo o el hecho de que, en un triángulo, dos cualesquiera de sus lados suman más que el tercero. Los filósofos epicúreos consideraban que este último dato era «evidente incluso para un asno», pues si «colocamos un poco de paja en un extremo de un lado, el asno en busca de forraje avanzará por uno de los lados y no siguiendo los otros dos».

Pero a Euclides poco le importaba lo obvio que fuera algo. Decidió ordenar y ejemplificar una caja de herramientas con las técnicas y los resultados básicos que había heredado: maneras de argumentar, maneras de demostrar, hechos que los geómetras solían asumir o emplear pero que rara vez demostraban por completo. Al final del primer libro colocó el teorema de Pitágoras: dibuja un triángulo rectángulo (con uno de sus ángulos en ángulo recto); utilizando el lado más corto como base, dibuja un cuadrado cuyo lado sea igual a ese lado del triángulo; repite el procedimiento con los otros dos lados más largos del triángulo, de modo que acabes con tres cuadrados de diferentes tamaños, adyacentes a los tres lados del triángulo; pues bien, resulta que la suma de las áreas de los dos cuadrados más pequeños es igual al área del cuadrado más grande. Se trata de un hecho sorprendente, no evidente para ningún asno, que Euclides demostró con su característico estilo meticuloso.

A medida que avanza el libro, las ideas y los diagramas se vuelven cada vez más difíciles y complicados. Hay apartados puramente geométricos: una descripción de cómo trazar un pentágono o un hexágono regular dentro de un círculo dado, por ejemplo. Otras partes del libro no se ocupan de geometría, sino de números y proporciones, desde los hechos más básicos («si se multiplica un número impar por un número impar, el resultado es un número impar») hasta un procedimiento para hallar los misteriosos «números perfectos», iguales a la suma de sus divisores.

Para finalizar, Euclides se ocupa de formas tridimensionales. Los últimos tres libros de los *Elementos* (XI, XII y XIII) tratan de esferas, conos y cilindros, de cubos y ortoedros y de poliedros regulares. Estos últimos son los hermosos sólidos cuyas caras son todas polígonos regulares iguales: triángulos, cuadrados o pentágonos. Solo hay cinco poliedros regulares: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el cubo (seis cuadrados), el octaedro (ocho triángulos), el dodecaedro (doce pentágonos) y el icosaedro (veinte triángulos). Euclides demostró cómo construir estas formas, partiendo, por ejemplo, de un triángulo dado o de un círculo dado; demostró cómo calcular las áreas de su superficie y su volumen. Las investigaciones de Euclides en estos últimos libros son a menudo ingeniosas y a veces aplican una espectacular cantidad de pensamiento lateral. A pesar de su inicio amable y tranquilo y de la incorporación de una gran cantidad de conocimientos que cualquier persona podía entender, en su conjunto los *Elementos* son un espectáculo digno de un virtuoso, una ruta que solo las mentes geométricas más sagaces podían seguir hasta el final.

En conjunto, los trece libros suman más de veinte mil líneas de texto en griego. Euclides era muy cuidadoso, pero no era infalible, y de vez en cuando podemos toparnos con algún que otro desliz o incoherencia. Algunas definiciones (rectángulo, rombo, romboide) parecen proceder de fuentes más antiguas, pero no se usan nunca en el libro; por el contrario, se usan varios términos que no se definen previamente y algunos resultan ambiguos. De hecho, se dan por sentadas muchas cosas acerca de las propiedades de puntos y rectas, cosas que Euclides nunca establece de manera explícita en sus suposiciones. Algunas proposiciones no son más que casos especiales de otras; algunas son en realidad innecesarias porque son consecuencia lógica de otras. Pero a pesar de estas manchas, los *Elementos* son un hermoso e impresionante monumento a todo lo que se había hecho sobre geometría en Grecia hasta la fecha.

Sin duda, Euclides no fue autor de un solo libro; la cronología no está clara, pero estamos seguros de que escribió más. Tal vez hubo cuatro libros más sobre temas concretos de geometría elemental, así como algunos acerca de aplicaciones de la matemática (a la música, la astronomía, la óptica y más). En total, las fuentes antiguas mencionan una docena de libros; de estos, sobreviven ocho, aunque los historiadores discuten sobre la autoría de la mayoría de ellos.

Regresamos a Alejandría, donde las obras prosiguen sin parar y las calles están aún más abarrotadas. Hacia el final de la vida de Euclides, el gran faro de la isla de Faros ya está construido (¿consultaron los arquitectos a Euclides? Sería interesante saberlo); la biblioteca y el Museo están a punto de completarse y el complejo palaciego es más esplendoroso que nunca. Los *Elementos* están acabados: trece rollos de papiro repletos de pulcras columnas de texto y diagramas. Y Euclides sigue enseñando, sigue aceptando nuevos alumnos.

Un novato se muestra impaciente, tal como el rey se mostró una vez. Después de entender la primera proposición, suelta: «¿Qué beneficio puedo obtener ahora que he aprendido esto?». Con una mirada de desprecio, o tal vez de pena, Euclides llama a un sirviente: «Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende». Quizá solo sea otra leyenda romántica, que circulaba por Grecia siglos después, durante el período de dominio romano. Como la historia del «Camino Real», ayudó a proteger a Euclides del tufillo de servilismo y adulación que rodeaba a cualquier persona conectada con la Alejandría ptolemaica y sus instituciones. Mantuvo y exageró la idea de que la geometría era una empresa culta y ociosa, parte de la vida intelectual; no era un oficio productivo, sino una tarea pura, honrada y hermosa por sí misma.

No deja de ser curioso que un conjunto de trescientas cincuenta proposiciones geométricas en un estilo seco y austero se haya convertido en uno de los productos culturales más perdurables del mundo griego. La Alejandría ptolemaica es poco más que un montón de polvo, hoy en día; de vez en cuando se desentierran o se sacan del fondo del mar fragmentos de estatuas, pero el esplendor de antaño ha desaparecido. La dinastía de Ptolomeo llegó a su fin con Cleopatra. La biblioteca se desperdigó, pero los libros perduraron, y con ellos, los *Elementos*.

Elefantina

Cascotes de cerámica

Isla de Elefantina, Alto Egipto, durante el reinado de Ptolomeo III (nieto de Ptolomeo I, reinado: 246-221 a. C.). Una guarnición griega en el extremo del mundo. Vemos a un hombre fuera de servicio escribiendo.

Para escribir agarra lo que tiene más a mano: unos cuantos pedazos rotos de una vasija de cerámica. Rasga y garabatea. Un diagrama rápido, unas pocas líneas de texto. Sus manos se mueven con seguridad; su memoria matemática es algo menos segura. ¿Se hacía así? ¿O así? Ah, ya está, así sí, correcto.

Ahora, con su mente y su mano ya relajadas, lanza los fragmentos de vasija, el material de escritura más barato al que tenía acceso (quizá el más barato de todos), a la pila de basura de donde los había cogido.

Los manuscritos originales de Euclides no han sobrevivido, ni nada parecido. Los papiros en los que escribía son bastante duraderos en las condiciones adecuadas. En el mundo antiguo no era raro usar rollos de cientos de años de antigüedad, y podían permanecer lisos, flexibles y legibles durante mucho más tiempo. Se dice que el conservador de un museo solía demostrar la resistencia y flexibilidad de los papiros enrollando y desenrollando alegremente un papiro egipcio de unos tres mil años de antigüedad (esto era en la década de 1930, cuando la actitud respecto a las piezas de museo era algo menos reverencial que en la actualidad).

Pero todo esto es, repetimos, en las condiciones adecuadas; y la mayoría de las condiciones no son las adecuadas. Si hay demasiada humedad, el papiro se pudre; una excesiva sequedad lo desmenuza. A las larvas de los insectos les gusta el papiro y, sin duda, los gusanos destruyeron más de una reputación literaria en la Antigüedad, o las ratas. Además, los rollos muy largos se rompían con facilidad y, en este caso, se tiraban a la basura. El resultado es que conservamos poquísimos papiros completos o muy largos de la Antigüedad; lo que más se ha conservado son fragmentos: rollos descartados, trozos reutilizados para sarcófagos de momias y fragmentos recuperados de vertederos o de casas derrumbadas. Rugosos, oscuros y frágiles, casi todos proceden de lugares del Medio y Alto Egipto, donde las condiciones secas los han conservado. Ha habido hallazgos en necrópolis en todo el valle del Nilo y en el oasis del Fayum, así como en algunos pueblos; en cambio, de las grandes ciudades no nos ha llegado casi nada: en Alejandría, por ejemplo, que tiene un nivel freático bastante alto, no se ha conservado ningún papiro.

A pesar de todo, disponemos de una gran cantidad de fragmentos de papiros. Desde mediados del siglo XIX se ha estado excavando sistemáticamente y ahora tenemos cientos de miles. Y algunos de ellos contienen fragmentos de los *Elementos*, en efecto. Siete papiros, para ser más exactos, con unas sesenta líneas completas del texto y otras sesenta líneas fragmentarias.

¿Qué partes de los *Elementos* se han conservado en estos papiros? Tenemos, escritas hacia el 100 a. C., tres proposiciones del libro I, con el resumen de una demostración, y que aparecen como citas en un tratado filosófico conservado (carbonizado) en Herculano por la erupción del Vesubio en el año 79, toda una excepción a las generalizaciones habituales sobre la conservación de los papiros. Luego tenemos un enunciado del libro II, con una figura esquemática, escrito en la ciudad egipcia de Oxirrinco hacia el año 100 d. C. Otro resto son partes de dos proposiciones más del libro I escritas en Arsinoe (actual Fayum) en la segunda mitad del siglo II. También tenemos una copia del siglo II de tres figuras y enunciados del libro I, redactados cuidadosamente con renglones de guía. Y, para acabar, una copia de un maestro o un alumno de las diez definiciones iniciales, del siglo III.

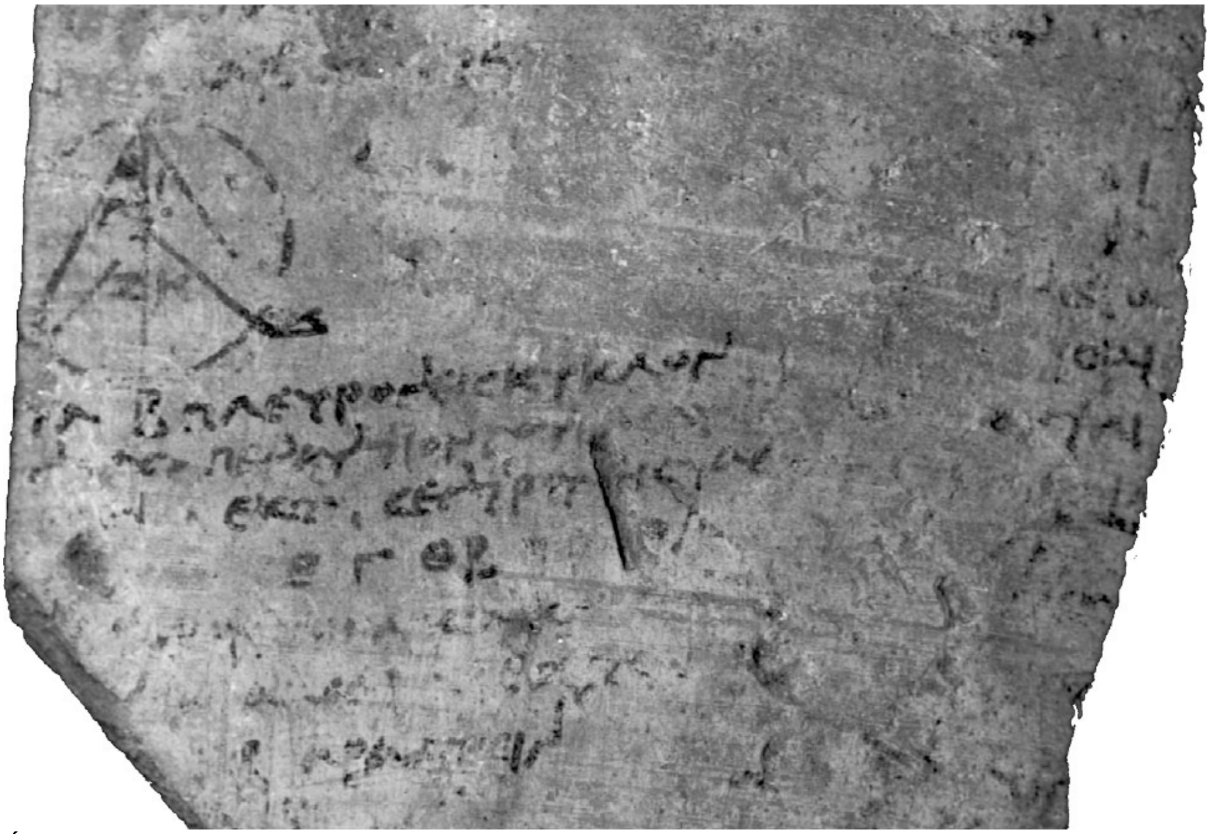
No es gran cosa; son pequeños fragmentos de las partes más sencillas del libro, en un caso de su mismo inicio. Sin embargo, nos muestran algo acerca de cómo se difundieron los *Elementos*, puesto que no permanecieron en Alejandría. Ya en los primeros siglos tras su redacción, el libro (o algunas partes de él) empezó a ser copiado por personas a centenares de kilómetros y por todo el mundo de cultura helénica; empezaba a propagarse desde el centro cultural hacia las provincias.

Los *Elementos* debieron de publicarse de la manera que se publicaban los textos en la Antigüedad: se enviaban a una casa de escribas y los copistas generaban varias copias del texto para su venta posterior. No obstante, la mayoría de los fragmentos en papiro conservados no proceden de estas copias; solo el fragmento del Fayum parece obra de un escriba profesional. Las demás porciones que nos han llegado son testimonio de la actividad de personas individuales que copiaban partes del texto para su uso particular, para enseñar o para aprender.

Así pues, los escritores de estos fragmentos de papiro representan el «público» potencial de la geometría griega; una diminuta minoría en un mundo en el que las personas alfabetizadas eran ya una minoría. Se trata de personas que comprendían la geometría, que aceptaban y compartían sus convenciones, que sabían lo suficiente acerca de los conceptos y métodos básicos para entender el libro de Euclides. Sin duda, sus necesidades moldearon lo que se escribía y cómo se escribía y, de hecho, la presentación de toda la matemática en una forma escrita y autocontenida ya presupone su misma existencia. Pero, excepto esto, no sabemos nada más acerca de tales personas.

Todos estos testimonios solo nos informan de los lugares lo bastante secos para que se hayan conservado fragmentos de papiros; para el resto del mundo griego (las islas y el continente en la orilla norte del Mediterráneo), la falta de pruebas no nos dice absolutamente nada, ni a favor ni en contra. Sin duda, los *Elementos* llegaron a Atenas, por ejemplo, pero las pruebas que tenemos de ello aún tardarían varios siglos en crearse.

Además de los papiros, nos queda un soporte de escritura bastante más barato: los óstracos, fragmentos y cascotes de cerámica, pedazos de vasijas rotas que, en consecuencia, se podían obtener sin coste alguno. Los óstracos ya se usaban en Egipto antes de la época ptolemaica y en Atenas desde el siglo VII a. C., y se continuaron empleando hasta el final de la Edad Antigua. Se dibujaba sobre ellos con tinta o simplemente raspando su superficie, para trazar imágenes o para escribir en egipcio antiguo (en escritura hierática o demótica), copto, griego o árabe, según el caso. Estudiantes, soldados, sacerdotes y recaudadores de impuestos los usaban habitualmente (y también se empleaban como pruebas de votación; de hecho, si la palabra os suena familiar es porque el *ostracismo* era un procedimiento para expulsar a alguien del país durante diez años por traición, en el que los votos se escribían en óstracos; fue habitual en Atenas durante casi todo el siglo V a. C., así como en otras ciudades griegas).


Óstraco euclidiano.

Los azares de la historia nos han legado un conjunto de óstracos escritos en Elefantina con textos sobre geometría. Fueron desenterrados por el arqueólogo alemán Otto Rubensohn durante los inviernos de 1906 y 1907, y en la actualidad se conservan en la colección de papiros de Berlín. En la década de 1930 se transcribió y se publicó su contenido y son la prueba física más antigua de los *Elementos* de Euclides.

Elefantina se halla a más de ochocientos kilómetros al sur de Alejandría; es una isla en medio del Nilo situada en el extremo norte de la primera catarata. En el tercer cuarto del siglo III a. C., cuando se escribieron esos óstracos, representaba la frontera meridional del reino ptolemaico. Tradicionalmente, la «isla de marfil» o la «isla de los elefantes», habitada desde tiempos prehistóricos, había sido la capital del primer distrito administrativo, o nomo, del Alto Egipto, que controlaba el comercio con las canteras de la región de las cataratas y la ruta comercial hacia Nubia. Contaba también con una guarnición militar, alejada de los centros culturales griegos y siempre amenazada por bandoleros.

En Elefantina había templos, sacerdotes, viviendas lujosas y un cierto bullicio; en época bizantina contaba con una flota de camellos pública. Los documentos que se han conservado del lugar (sobre todo papiros) están repletos de las típicas angustias de los soldados destinados lejos de sus diversas tierras natales. En el siglo III a. C. en la ciudad había hombres procedentes de ciudades e islas griegas tan lejanas como Creta y Rodas, Eubea y la Fócida, además de Alejandría, un verdadero catálogo homérico de soldados; estos hombres mantenían la distancia con los egipcios nativos y se referían a su ciudad como «la fortaleza». Los papiros nos los muestran haciendo testamento, casándose, nombrando a tutores, presentando informes a sus superiores o apelando a ellos. Sin duda, no parece el lugar más probable para el más temprano testimonio euclidiano.

Los óstracos en cuestión son seis (uno de ellos claramente roto por todos los lados) y contienen un texto relativo a la construcción de un poliedro regular. El texto está relacionado con las proposiciones 10 y 16 del libro XIII de los *Elementos*, es decir, casi al final de la obra. En estas proposiciones se emplea un pentágono, un hexágono y un decágono para construir un icosaedro, un sólido regular de veinte caras, todas las cuales son triángulos equiláteros. El imprescindible diagrama aparece con claridad en uno de los óstracos, con las letras para indicar vértices y caras, y en conjunto, los fragmentos dan la sensación de alguien haciendo lo que todo geómetra griego hacía: trazar un dibujo y explicar algo sobre él.

Las proposiciones de los *Elementos* dependen unas de otras a través de una compleja estructura arborescente, puesto que cada una hace referencia implícita a varias que han aparecido antes. Para trabajar con soltura con algo de una parte tan avanzada del libro se tenía que haber estudiado buena parte de lo que venía antes, aunque los óstracos no nos proporcionan ninguna prueba de ello. Además, la escritura, segura y fluida, nos habla de un redactor experimentado que no titubeaba con la ortografía ni la gramática.

¿Quién era este escritor? Para nuestra frustración, no lo sabemos. Serafina Cuomo, historiadora de la matemática de la Antigüedad, señala que «si bien el contenido [de los óstracos] denota un alto grado de formación, tanto el modesto material como su ubicación (un puesto remoto en el corazón del Egipto “egipcio”) parecen desentonar con esa conclusión». ¿Sacerdote, maestro, soldado o un seguidor del campamento militar? Nunca sabremos de quién eran las manos que garabatearon este primer ejemplar conservado de material euclidiano.

El hallazgo aún nos depara otro interesante giro argumental. El tema que se discute en los óstracos procede directamente del libro XIII de los *Elementos*, pero el texto no es el que nos ha llegado como parte del libro; se trata del mismo diagrama y de las mismas ideas, pero las palabras no son iguales. Este también es el caso, aunque en menor grado, de otros fragmentos antiguos de los *Elementos* conservados en papiro: las versiones del texto no coinciden del todo con lo que se ha transmitido en versiones posteriores y más completas de la obra.

Esto refuerza la idea de que la geometría griega era, sobre todo, una representación en la que se trazaba un diagrama y se hablaba sobre él, a uno mismo o ante una audiencia. Lo que se escribía era una simple transcripción de la presentación, un guion, un esquema o una serie de apuntes, junto con la versión acabada y estática del diagrama que, durante la presentación, era dinámico y en evolución. Estos apuntes escritos podían utilizarse para el estudio personal o como guion de un maestro, que tendría que presentar la misma demostración varias veces. También podían, como sucede con los *Elementos*, transmitir las ideas de la demostración o de la construcción geométrica a personas muy alejadas en el tiempo y en el espacio.

En consecuencia, leer una demostración geométrica no es como leer una novela o un poema. Solo puede seguirse recreando la representación original en directo o, dicho de otro modo, agarrando un lápiz y un trozo de papel, de papiro o un cascote de una vasija e ir construyendo el diagrama a medida que se lee, viendo cómo crece.

Así, la forma escrita de las proposiciones geométricas griegas no era tanto algo que uno aprendería y copiaría espléndidamente como una serie de apuntes que dicen: «He aquí una cosa interesante, pruébalo tú mismo». Los *Elementos* no eran un soso repositorio de hechos, sino una ayuda para el aprendizaje y la práctica, una invitación a que el lector repitiera la representación, del mismo modo que los libros de texto de retórica intentaban preparar a los estudiantes para las actuaciones retóricas. Teniendo esto en mente, tal vez resulte menos sorprendente que los fragmentos más antiguos que conservamos de los *Elementos*, en cascotes y en papiros, sean versiones bastante «libres» del texto. Este conjunto de óstracos, en concreto, es probable que deban considerarse un intento de recrear algo que el escritor había leído o había visto demostrar.

Resulta bastante apropiado que los primeros testimonios de los *Elementos* de Euclides sean tan enigmáticos, relacionados de una forma tan titubeante con los propios *Elementos* y tan fragmentados, incluso en su sentido más literal. El texto y sus ideas viajarían tanto como era posible para un objeto cultural, pero cambiarían considerablemente durante el viaje y, lo que es más relevante, no está en absoluto claro que permaneciesen siempre como un conjunto simple, único y estable, ya desde su mismo inicio. Euclides no era tanto un maestro como una musa, una inspiración, que no se limitó a revelar una serie de hechos, sino que ofreció un conjunto de tareas. Sus lectores sabían que siempre podían ir más al fondo, que podían profundizar más y crear todavía más, porque si bien los *Elementos* ya lo habían hecho todo, aún estaba todo por hacer.

Hipsicles

El decimocuarto libro

De nuevo en Alejandría, aún bajo el reinado de Ptolomeo III. Otra historia, esta vez relatada por Galeno, el médico romano.

El interés de Ptolomeo III en coleccionar libros antiguos se torna obsesión, una auténtica manía por la que ordena que en todos los barcos que arriben al puerto se busquen textos que pudieran ser de interés para la biblioteca de Alejandría. En una ocasión recibe en préstamo, de Atenas, valiosos rollos con las obras de Esquilo, Sófocles y Eurípides, y deposita la extraordinaria suma de quince talentos de plata como fianza, con el acuerdo de devolver los originales tras haber encargado copias de los textos.

Así pues, ordena hacer las copias, con los mejores papiros. Pero lo que devuelve a Atenas son las copias y él se queda con los originales para su biblioteca. Los atenienses poco pueden hacer; aceptaron el pago con la condición de que la plata sería suya si Ptolomeo no devolvía los rollos, de modo que se quedaron con las copias y con el dinero.

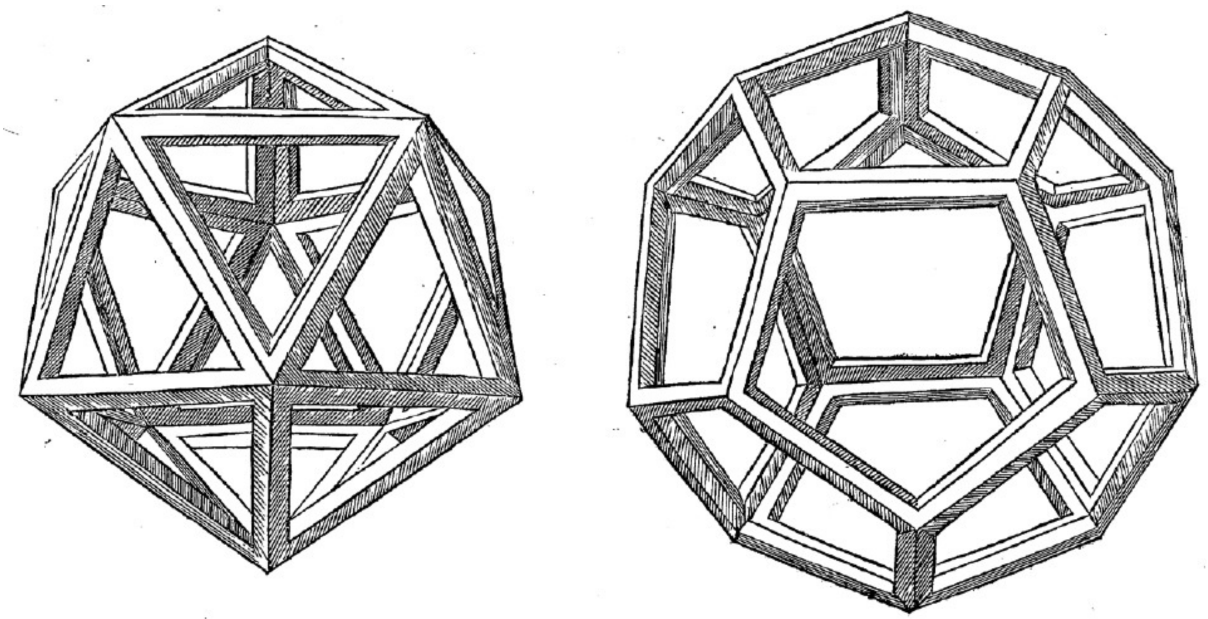
Ptolomeo I (que descubrió que no había ningún Camino Real hacia la geometría) había abdicado en el 284 a. C. a favor de su hijo, pero las instituciones culturales que había creado continuaron creciendo, a la par que la cada vez más esplendorosa ciudad de Alejandría. Su biblioteca se convirtió en la mayor colección de libros del mundo, un símbolo sin igual de cultura literaria, un enorme inventario de «grecidad» que sobrepasaba cualquier cosa que hubiera en la misma Grecia. La avidez de los lágidas por los libros se convirtió en leyenda, así como los esfuerzos que invertían en lograr buenas copias de obras relevantes. Como por ejemplo en la leyenda que acabamos de explicar, donde Ptolomeo III, ya de la siguiente generación, pagó un rescate digno de un rey por los textos originales atenienses de las grandes tragedias. Además de obras de teatro, novelas y poemas épicos, la biblioteca contenía libros sobre cocina, magia o pesca; no se excluía ningún tema.

Mientras tanto, en el campo de las matemáticas, los *Elementos* de Euclides seguían siendo la recopilación más reconocida de técnicas y resultados estándares, con la que los geómetras griegos posteriores podían descubrir gran cantidad de nuevos hechos. Si Euclides se había ocupado de puntos, rectas y círculos, estos geómetras se ocuparon de las formas resultantes de la intersección de conos y planos, y de los sólidos formados cuando estas intersecciones se hacían rotar alrededor de un eje; formas curiosas, sin duda no muy lejos del límite de lo que la mente humana puede concebir sin ayuda del álgebra o de herramientas digitales de visualización. No obstante, empleaban la terminología de Euclides y se basaban en sus proposiciones una y otra vez. Además, ampliaron el estilo geométrico griego emprendiendo nuevos caminos que reflejaban las inquietudes culturales de Alejandría, caminos que transitaron con altibajos, sorpresas y súbitos estallidos de brillo intelectual.

Quizá una generación o menos después de Euclides, Arquímedes (*c.* 287-212 a. C.) se forjó la reputación de ser el más brillante de los geómetras griegos, el más dotado para el suspense, la sorpresa y los resultados inesperados y llamativos. Una de sus sorpresas más conocidas es que si tomas una esfera y un cilindro de la misma altura y el mismo diámetro, sus volúmenes se hallan en una proporción de 2:3.

El gran geómetra de la siguiente generación fue Apolonio (*c.* 262-190 a. C.), con el mismo nombre que un poeta alejandrino que era director de la biblioteca. Las fuentes antiguas nos dicen que estudió en Alejandría con los discípulos de Euclides (de hecho, el fragmento que nos lo explica es el mismo, y el único, que confirma que Euclides estuvo en Alejandría). Apolonio sistematizó el estudio de las secciones cónicas (las curvas obtenidas al rebanar conos) y adoptó el estilo arquimediano en que al final de largas argumentaciones surgen hermosos resultados.

La tradición prosiguió. En el 235 a. C., Eratóstenes, un astrónomo y geómetra, fue nombrado director de la biblioteca (sucediendo a Apolonio el poeta) y se inició un período importante de integración de la geometría en la cultura del Museo. Eratóstenes se hizo famoso por deducir correctamente el tamaño de la Tierra a partir de observaciones astronómicas.



El icosaedro y el dodecaedro en una xilografía renacentista.

Uno de los rompecabezas y trucos geométricos en que trabajaban estos matemáticos era como sigue. Partimos de un dodecaedro y de un icosaedro del mismo tamaño, es decir, de modo que las dos esferas en las que encajan exactamente ambos sólidos tengan el mismo tamaño. Las caras del dodecaedro son pentágonos regulares; las del icosaedro, triángulos equiláteros. Resulta que esos pentágonos y esos triángulos son del mismo tamaño (es decir, que el círculo en el que encaja uno de los pentágonos es del mismo tamaño que aquel en que encaja uno de los triángulos). Es un resultado entretenido, no muy relevante, pero sí una buena demostración de la habilidad mental del geómetra. Y se consideró lo bastante importante para que pasara de una generación a la siguiente hasta que, finalmente, se añadió a los *Elementos*.

Quien hizo este descubrimiento por primera vez fue un geómetra llamado Aristeo, y lo publicó en un libro sobre los cinco sólidos regulares, sin duda inspirado por la exposición que cierra los *Elementos*. Apolonio se ocupó del problema en una obra que trataba únicamente del dodecaedro y el icosaedro. Más adelante, un tal Basílides de Tiro llegó a Alejandría, discutió el tema con un colega y consideró que la descripción de Apolonio era insuficiente. Este último publicó una nueva versión de su texto, en la que lograba completar la notable demostración de que los volúmenes de un dodecaedro y un icosaedro del mismo tamaño guardan la misma proporción que sus áreas superficiales. Finalmente, un hombre llamado Hipsicles se enfrascó en el tema y reunió todo lo que consideró correcto de todas las descripciones anteriores.

En este momento estamos en la segunda mitad del siglo II a. C., acaso unos ciento cincuenta años después de Euclides. Nos falta mucha información, pero parece que Hipsicles era astrónomo y geómetra; además de un libro, hoy perdido, sobre la armonía de las esferas, y tal vez uno sobre los números, escribió una obra acerca del orto y el ocaso de las estrellas. Este último seguía el estilo de Euclides y mostraba cómo hallar (aproximadamente) el momento del orto de un punto determinado del cielo (una estrella concreta, pongamos por caso) en un lugar preciso de la superficie terrestre. También es destacable por haber sido el primer griego en dividir el círculo en trescientas sesenta partes, una práctica que procedía, en última instancia, de Babilonia.

Hipsicles reaccionó al libro revisado de Apolonio con un texto propio acerca de la comparación de dodecaedros e icosaedros del mismo tamaño. Ofreció nuevas demostraciones de los resultados principales: que sus caras encajan en el mismo círculo y que sus volúmenes guardan la misma proporción que sus áreas (si construimos un cubo del mismo tamaño, sus caras y las caras del icosaedro también guardarán la misma proporción). Era un libro breve, con solo cinco proposiciones, tres resultados subsidiarios (lemas) y una demostración alternativa.

Sabemos muy poco de cómo circularon todos estos textos, pero está claro que el tratado de Hipsicles, a pesar de su oscura temática (o precisamente gracias a ello) obtuvo cierta popularidad y se leyó, citó y alabó. Sin embargo, su destino fue curioso: una mano anónima posterior lo añadió a los *Elementos* de Euclides y, como esta obra estaba formada por trece libros, el tratado de Hipsicles pasó a ser etiquetado como el libro XIV y empezó a transmitirse como parte de los *Elementos*. Al mismo tiempo, se hicieron algunas modificaciones editoriales, cambiando el inicio y el final del libro y añadiendo una proposición adicional al libro XIII de Euclides, para reforzar el vínculo entre ambas obras. Es sorprendente que este «decimocuarto libro» permaneciese como una parte más de los *Elementos* durante mil quinientos años.

Lo cierto es que el extraordinario conjunto de libros y de personas que había en Alejandría, así como la tradición matemática que se estaba convirtiendo en marca de la casa, interactuaba de modos curiosos y a veces generaba resultados inesperados. Las salas llenas de cajas con incontables rollos llevaban a yuxtaposiciones sorprendentes, atribuciones incorrectas y combinaciones improbables. Los *Elementos* no fueron ajenos a este proceso y se convirtieron en un receptor de investigaciones, debates y mejoras a medida que iban pasando de generación en generación.

Teón de Alejandría

La edición de los *Elementos*

Alejandría, 370 d. C., más o menos. La ciudad sigue en pie, griega, orgullosa y hermosa, pero el mundo está cambiando: se cierran templos, se erigen iglesias. La biblioteca ya no existe y en el Museo trabaja la última generación de académicos.

Teón es uno de estos académicos y su hija trabaja con él. Enseñan geometría, astronomía y filosofía en la ciudad. Pero para enseñar se necesitan libros, de modo que elaboran nuevas versiones de los textos clásicos: los de Claudio Ptolomeo sobre astronomía, los himnos órficos, obras de adivinación, el de Euclides sobre geometría.

Los libros son largos y el ruido de los cálamos raspando sobre los papiros dura todo el día, al final del cual el dolor se apodera de los dedos. Teón llega a la proposición 33 del libro VI de los *Elementos* y se da cuenta de que no está completa. Añade un apartado, amplía el resultado. Y así, los *Elementos* se hacen un poco más largos y, él espera, un poco mejores.

En su momento de máxima gloria, Alejandría había sido la ciudad más grande y más rica del mundo griego, con los lágidas como grandes mecenas de las artes y las ciencias. Pero, como pasa con todas las dinastías, los ptolomeos también tenían sus problemas y tras la batalla de Accio en el 31 a. C. Egipto quedó bajo soberanía de Roma, como una provincia más del modelo romano. Sin embargo, la riqueza y suntuosidad de Alejandría no decayó; arquitectónicamente tal vez siguió siendo la ciudad más magnífica del Mediterráneo.

La biblioteca sobrevivió a todo esto. La bibliomanía de los ptolomeos permitió que llegara a unas dimensiones que sus contemporáneos apenas podían concebir. Alguien sugirió que debía de haber medio millón de rollos, más o menos; sin duda es una cifra imposible, pero sea cual sea el valor en kilómetros de líneas de texto o en metros cuadrados de papiro, era un arsenal de todo lo griego y de todo lo que podía acumularse y traducirse al griego. Un símbolo muy celebrado de su cosmopolitismo, por ejemplo, fue la traducción al griego de las escrituras del judaísmo durante los siglos III y II a. C.

Ahora bien, los libros son frágiles y las bibliotecas, delicadas. Las instituciones culturales no son siempre una prioridad en tiempos de inestabilidad política. Julio César prendió fuego accidentalmente a la ciudad en el 47 a. C. y un relato persistente y probablemente cierto afirma que se destruyeron algunos libros, quizá en almacenes cercanos a la costa. Sea como fuere, está claro que un siglo más tarde seguía habiendo una biblioteca en activo. Por su parte, el Museo prosiguió sus actividades e incluso prosperó durante los primeros años de dominio romano, bajo el mecenazgo de los emperadores de Roma.

De todos modos, el período romano fue testigo de guerras civiles y disturbios con la frecuencia habitual para una ciudad de ese tamaño; de hecho, los alejandrinos se labraron una cierta reputación de violencia callejera durante los primeros siglos de dominio romano. A finales del siglo III, la guerra civil redujo todo el viejo barrio palaciego a «un desierto», según las palabras de un testigo, y es muy probable que después de eso poco quedara de la biblioteca y del Museo. En las pruebas que conservamos, el último empleado del Museo fue Teón, que enseñó matemáticas desde el año 360, más o menos, hasta el final de ese siglo.

Fueran cuales fuesen los detalles de su largo declive, la tradición académica de la biblioteca había tenido una importancia crucial en la conformación y la supervivencia misma de la literatura griega. Casi cualquier texto griego de cierta longitud que ha llegado hasta nosotros pasó por la biblioteca de Alejandría. Esta institución se especializó en la crítica textual de la literatura previa, planteándose cuestiones como ¿qué escribió realmente tal o cual autor?, ¿qué libros son auténticos?, ¿qué fragmentos o líneas se han embrollado a lo largo de su transmisión? Fue aquí donde surgió la persistente metáfora del *texto corrompido*, un texto que necesita purificarse del polvo y la suciedad y curarse de las enfermedades que ha contraído por su contacto con los seres humanos.

Los académicos de la biblioteca idearon signos y símbolos para indicar las líneas dudosas de un texto y cómo las habían corregido. Inventaron marcas para las divisiones entre apartados, e incluso la separación de líneas; pero no había signos de puntuación como tales, los textos se seguían transmitiendo como una «escritura continua»:

> TODOENMAYUSCULASSINESPACIOSACENTOSNISIGNOSDEPUNTUACION
> DENINGUNTIPOYPORLOTANTOBASTANTEDIFICILESDELEER

Estas técnicas e innovaciones se crearon para el estudio y la transmisión de los clásicos literarios. En primer lugar, Homero, siguiendo una tradición de interpretación que se remontaba a los rapsodas homéricos de la Atenas clásica, y luego, los dramaturgos atenienses y otros autores. Los académicos de la biblioteca no tenían tantas cosas que decir de los textos en prosa y menos aún de los textos científicos; por ejemplo, no hay ninguna prueba de que los textos de Aristóteles fueran sometidos a este tipo de análisis en Alejandría. Quizá trabajar con obras matemáticas requería un enfoque algo diferente, aunque la idea de la purificación textual era la misma.

El texto de los *Elementos* de Euclides ya era algo vacilante en algunos aspectos durante sus primeros siglos, y los testimonios que conservamos apuntan a más. Es bastante posible que el propio Euclides elaborara más de una edición de los *Elementos*, lo que permitiría explicar parte de las variaciones que presenta el libro tal como ha llegado hasta nosotros. También es igual de probable que los editores más celosos que trabajaron en el texto durante los siglos II y I a. C. produjeran versiones que diferían del texto original y tal vez también entre ellas.

Lo que sí está claro es que hacia el siglo I d. C., como mínimo, y hasta el siglo V, hubo una tradición en griego (y a menudo en Alejandría) de escribir comentarios sobre los *Elementos*. ¿Faltaba alguna definición? ¿Se definía un término pero luego no se usaba? ¿Era tal proposición un callejón sin salida, no utilizada nunca más para demostrar algo? ¿Aparecía tal proposición en un lugar equivocado, después de algo que se suponía que tenía que ayudar a demostrar? Todos estos detalles se pueden señalar en comentarios para ayudar a los maestros y los estudiantes en el uso del texto, para socorrerlos si tropiezan con estas pequeñas trabas. Era difícil que comentarios de este tipo no sugiriesen la incorporación de cambios en el propio texto euclidiano y, de este modo, proporcionaban la materia prima para la tarea paralela pero diferente de la edición del texto: preparar una nueva versión para el uso de los estudiantes de un determinado maestro, por ejemplo.

Volvamos a Teón y a los últimos días del Museo. Hacía de maestro y dedicaba libros a sus estudiantes. Escribió unos comentarios (probablemente basados en sus clases) sobre las obras astronómicas de Claudio Ptolomeo, del siglo II (por lo que sabemos, este Ptolomeo no tiene relación alguna con la antigua dinastía reinante en Egipto); en concreto, acerca de las llamadas *Tablas manuales* llegó a redactar dos conjuntos de comentarios diferentes, unos para astrónomos competentes y otros para aquellos que aún no eran capaces de entender los razonamientos y las matemáticas que el libro contenía. Al parecer también escribió sobre la interpretación de los augurios y sobre los himnos órficos. Se conserva un puñado de sus poemas, en los que expresa su devoción por el mundo perfecto de los cielos, los dioses y las estrellas.

También hizo de editor preparando versiones mejoradas y coherentes de los textos clásicos que usaba en sus clases. Sin duda trabajó de este modo con los *Elementos* y con otras obras de Euclides, así como con las obras de Ptolomeo, como el *Almagesto*, haciendo lo mismo que hacían otros editores de la época con los textos matemáticos. Saneaba el texto y suavizaba dificultades; escogía entre versiones diferentes de un mismo fragmento o combinaba las variantes para obtener un texto con, en ocasiones, dos demostraciones alternativas de una misma proposición y rellenaba huecos, reales o imaginados. Mientras que los editores homéricos se veían a sí mismos como actores externos a la tradición épica, los matemáticos de la Alejandría tardía solían actuar como si Euclides fuera un colega suyo y ellos, miembros de una boyante tradición. En lugar de la pureza y fidelidad textuales (¿qué escribió Euclides realmente?) valoraban la corrección, la completitud y la utilidad.

En un giro curioso, resulta que Teón nos dejó un testimonio de uno de los cambios que realizó en los *Elementos*. Lo menciona en otra obra, sus comentarios sobre Ptolomeo, y se trata de un detalle menor que «hemos demostrado en nuestra edición de los *Elementos*, al final del sexto libro». Así pues, dejó escrito para la posteridad que un fragmento concreto del texto era suyo. Este era el tipo de cosas en las que intervenía sobre el texto original.

La proposición en cuestión afirma que si consideramos un sector circular (como una porción de un pastel redondo, con dos rectas que se encuentran en el centro del círculo), la longitud del arco (el lado curvado) se halla siempre en proporción con el ángulo que forman las dos rectas en el centro. El añadido de Teón afirma que el área del sector circular también se halla siempre en proporción con el ángulo del centro. No es difícil convencerse de que la proposición es verdadera, y resulta bastante fácil demostrarlo.

El comentario de pasada de Teón ha recibido una enorme atención por parte de los estudiosos de los *Elementos* a lo largo de los siglos, pues parece plantear la seductora posibilidad de poder atisbar por debajo de los añadidos editoriales de la Antigüedad y observar el Euclides verdadero. Si el tipo de intervención de Teón se pudiera describir con precisión, tal vez académicos posteriores podrían identificar sus modificaciones en otras partes del texto y recuperar el original.

Por desgracia, atribuir cambios concretos a Teón, aparte de este, es una tarea bastante incierta, aunque muchos lo han intentado. Lo que para una persona puede ser una laguna lógica, para otra tal vez sea un razonamiento breve y elegante; lo que para uno es una interpolación de Teón, para otro es todo un gazapo euclidiano. Las pruebas (muchas de ellas muy posteriores a Teón y sometidas a una inacabable contaminación entre la versión de Teón y la versión o versiones que le precedieron) no nos permiten asegurar nada con certeza.

Por su parte, la historia no ha sido muy amable con Teón. Épocas posteriores tendrían posturas diferentes respecto al texto y a su autenticidad y no quedarían muy impresionados por el tipo de modificaciones realizadas por Teón y otros como él. Historiadores actuales han calificado sus ediciones de «refundiciones triviales», «matemáticamente banales» y su sabiduría de «carente por completo de originalidad». Su biógrafo en el *Dictionary of Scientific Biography* es bastante crudo: «Siendo un hombre de tal mediocridad, Teón tuvo una influencia fuera de lo común».

Quizá no sea necesario ser tan duro con él, sobre todo si hacía su trabajo con un ojo puesto en la docencia. Sin duda, en los *Elementos* de Euclides hay cosas que son «elementales» en el sentido de sencillas, desde construcciones simples con rectas, círculos y triángulos hasta las propiedades de los números (par multiplicado por par es par, por ejemplo) y de las proporciones. Pero el libro también contiene muchos resultados que son dificilísimos lo midamos como lo midamos y que requieren un grandísimo talento para las matemáticas y muchas horas de estudio. Un ejemplo es la exhaustiva clasificación que hace Euclides (en el libro X de los *Elementos*) de las diferentes maneras en que dos longitudes pueden formar una proporción imposible de expresar empleando números enteros; hay ciento quince proposiciones sobre el tema. Otro es la construcción del tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro y la determinación de sus tamaños relativos cuando se hacen encajar en una esfera de modo que se toquen solo por los vértices de cada uno. Sin duda, podemos imaginar a estudiantes para los cuales las simplificaciones, explicaciones y reorganizaciones de Teón serían de mucha ayuda.

En cualquier caso, la influencia de Teón fue considerable, qué duda cabe. Si bien siguieron circulando textos más antiguos de los *Elementos*, la nueva edición de Teón recibió una entusiasta acogida, hasta tal punto que casi todos los manuscritos completos que han sobrevivido hasta el día de hoy contienen lo que parece ser la versión de Teón. Mediocre o no, tuvo más impacto en el texto euclidiano que cualquier otra persona desde el propio Euclides.

El lector atento se habrá dado cuenta de una breve referencia que hemos hecho a la hija de Teón. Su nombre era Hipatia, nació hacia el año 355 y las fuentes más antiguas apuntan a que sus capacidades matemáticas superaban a las de su padre, aunque solo conservamos los títulos de las obras que escribió. Al parecer, redactó comentarios y posiblemente también obras de propia creación sobre matemáticas y astronomía.

Teón vivió en un mundo en pleno cambio. El emperador Constantino se había convertido al cristianismo en el año 312 (al menos formalmente) y eliminó los obstáculos legales al culto cristiano al año siguiente. Se abrían iglesias y los templos se iban cerrando poco a poco en todo el mundo griego. Durante la vida de Teón se destruyó el templo de Serapis en Alejandría; sede del novedoso culto de Ptolomeo I, estaba cerrado desde 325, pero es posible que contuviera una de las últimas bibliotecas importantes de la ciudad.

La fama alejandrina de violencia callejera no amainó, y la propia Hipatia fue una de sus víctimas. A principios de la década de 390 la vemos ejerciendo de maestra de filosofía, con un círculo de estudiantes bien consolidado. Su docencia incluía la geometría y, por lo tanto, es una de las últimas personas de las que tenemos constancia que prosiguiera con la tradición de la enseñanza geométrica en la ciudad que vio nacer a los *Elementos*. Sin duda, era un personaje bien conocido en la ciudad, una celebridad incluso; la mayoría de sus estudiantes identificables eran (o luego fueron) cristianos, y no parece que su paganismo representara problema alguno. Sin embargo, hacia la década de 410, su protector, el prefecto romano (Orestes, otro cristiano) se enzarzó en un violento conflicto con el patriarca de Alejandría y en marzo de 415 Hipatia fue asesinada en una especie de represalia; en palabras de un historiador de la Antigüedad, fue una víctima de rivalidades políticas. Desde el siglo XIX, su trágica historia ha sido llevada a la ficción, a veces de un modo algo sensacionalista.

Uno de los comentarios astronómicos de Teón lleva un encabezado ambiguo que hace referencia a su hija, y se ha interpretado tanto como si implicara que Hipatia revisó o comprobó esa parte del comentario (o más) como que editó o revisó el texto que estaba comentando Teón (o parte de él). Parece bastante seguro que hubo un período en que Hipatia y Teón trabajaron juntos sobre material matemático y astronómico. No obstante, los testimonios conservados no la vinculan con la edición de Teón de los *Elementos* de Euclides. Es posible que trabajara con él en este texto, y resulta tentador especular que la futura maestra de geometría pudiera haber dejado su marca en alguna parte de los *Elementos*, pero la carrera de Teón empezó bastante antes de la colaboración con su hija y seguramente continuó después, de modo que pudo haber editado los *Elementos* sin su colaboración. Como sucede con tantos aspectos de la transmisión de los *Elementos*, es imposible dar una respuesta con certeza absoluta.

Esteban el escriba

Euclides en Bizancio

Constantinopla, año 6397 del mundo (888 d. C.). El *scriptorium* de uno de los monasterios de la ciudad.

El escriba pasa la última página de la vitela y estira sus agotados dedos, arquea la espalda adolorida y añade una nota final:

> Escrito por la mano del monje Esteban en el mes de septiembre, séptima indicción, en el año del mundo de 6397. Comprado por Aretas de Patras por un precio de 14 monedas.

Durante el siglo V, el sistema imperial romano se derrumbó en toda su parte occidental, desde Britania hasta Lusitania y los Balcanes; en 480 ya no había emperador. En la parte oriental, de habla griega y que había tenido su propio emperador desde 395, el Imperio medró durante mil años más; su capital era Constantinopla. La ciudad era otro enorme y orgulloso proyecto, fundada en 324 sobre la antigua Bizancio como nueva capital oriental *de facto* y capital oficial a partir de 330. En 425 se inauguró lo que podríamos calificar más o menos como una universidad.

Este imperio era menos próspero y menos alfabetizado que su predecesor. Había escuelas (universidades de la época) en Alejandría, Antioquía, Atenas, Beirut, Constantinopla y Gaza, pero fueron decayendo poco a poco y a mediados del siglo VI solo persistían las de Constantinopla y Alejandría. Esta última fue conquistada por los persas en 619 y luego cayó bajo el dominio de los califas a partir de 641. El mundo de habla griega se hundió y la cultura griega quedó reducida en buena parte a la de una sola ciudad: Constantinopla.

Si los bárbaros habían ofrecido una especie de solución a los problemas del inmanejable Imperio romano, la gran contracción cultural proporcionó una suerte de solución parecida a la aparatosa masa de literatura griega. La producción de libros griegos decayó de manera espectacular y lo que no se logró salvar en Constantinopla ya no se pudo salvar nunca más, o casi. Los gusanos hicieron el resto y la biblioteca griega del mundo se redujo a un tamaño manejable.

Con propósitos docentes, los académicos bizantinos organizaron los temas en un ciclo literario y un ciclo científico, formando así las «siete artes liberales» que también se estudiaban en Occidente. La lista de los siete temas se remonta a la Atenas clásica, pero no está claro cuándo ni dónde se formalizó en forma de currículo académico, acaso hacia el 100 a. C. Por el lado literario había gramática, retórica y dialéctica (lógica), que eran las tres maneras diferentes de leer preferidas por los autores antiguos; por el lado científico estaba la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. Las autoridades sobre estos temas iban de autores de la Antigüedad clásica, como Aristóxeno para la música, hasta autores griegos del período romano, como Claudio Ptolomeo para la astronomía. En el caso de la geometría, el texto de estudio era, claro está, el de Euclides. Así pues, por primera vez sabemos que el conocimiento de los *Elementos* formaba parte de una buena educación, y su dominio un requisito para aquellos que aspiraban a incorporarse a la élite cultural del momento; o, por lo menos, el dominio de sus partes más sencillas.

Salvaguardar la cultura con recursos limitados, especialmente cuando la prioridad era formar a los oradores del mañana, provocaba peculiares cambios en los textos, y los *Elementos* no fueron ninguna excepción. Los escribas cometían errores, pues, al copiar matemáticas que no siempre comprendían, caían en fallos particulares, como confundir entre sí números, abreviaciones de términos y marcas de puntos geométricos, todos los cuales empleaban el mismo conjunto de letras mayúsculas griegas, a veces en una misma frase.

Como el objetivo principal era la legibilidad más que la literalidad, los escribas también introducían mejoras deliberadas, estandarizando la notación, puliendo diagramas e incluso uniformizando la estructura lógica de las demostraciones. Alguien comparó las dos versiones de los *Elementos* que había en circulación (la de Teón y la precedente) y en cada punto escogió el texto que le parecía mejor. Tal vez se logró la coherencia y la perfección matemática, pero a expensas de desdibujar la voz característica de Euclides.

Todo esto se producía no en los rollos de papiro que usaba Euclides, sino en los códices (libros con páginas) que los habían ido sustituyendo. Un solo códice podía ser lo bastante grande como para contener todo el texto de los *Elementos*, con comentarios al margen, incluso. Esto último daba lugar a más posibilidades de confusión, si cabe, pues los escribas podían copiar por error fragmentos de un comentario en el texto principal o asumir como interpretación correcta lo que se proponía en un comentario a modo de alternativa o mejora. Incluso en los casos en que esto no sucedía, se añadían al texto fragmentos de comentarios como escolios, que se transmitían durante generaciones, en muchos casos desconectados del contexto original en que se había hecho el comentario.

Es probable que fuera en el siglo V o VI cuando alguien añadió a los *Elementos* el tratado de Hipsicles sobre los sólidos, a modo de libro XIV. Y ahí se quedó, pues muchos escribas aceptaron la añadidura y de este modo le dieron una cierta pátina de autenticidad por derecho propio, en cuanto compleción de lo que Euclides, supuestamente, había dejado sin completar. Al parecer, también por esa época se añadió un decimoquinto libro, con cuestiones adicionales de geometría de los sólidos. Aunque en ocasiones se asoció al nombre de Hipsicles, en realidad era una combinación de material de, por lo menos, tres autores, el último de los cuales Isidoro de Mileto, el arquitecto de Santa Sofía de Constantinopla, del siglo VI. De hecho, es posible que fuera uno de sus alumnos quien recopilara este decimoquinto libro y lo añadiera a los *Elementos*.

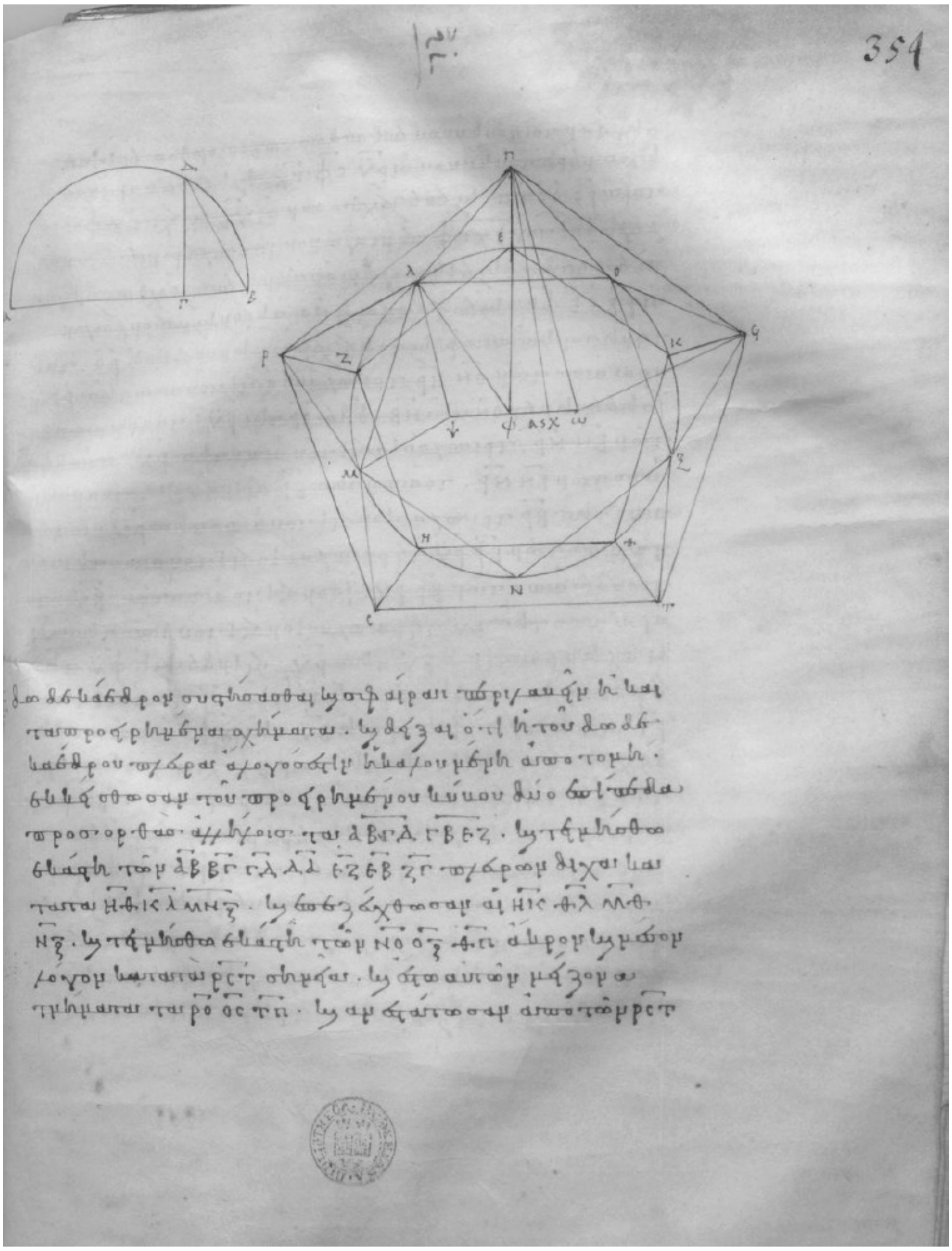
El mundo literario bizantino sufrió un grave descalabro entre 550 y 850, aproximadamente, con muchas instituciones culturales inactivas o cerradas. El imperio estaba en guerra con el califato (casi siempre) y con el janato búlgaro (con bastante frecuencia) y en conflicto con el papa de Roma y el Imperio carolingio (de vez en cuando). Además, las refriegas internas no cesaban, a causa de inacabables controversias teológicas y del embrollo irresoluble de la sucesión imperial. El siglo IX fue un período de recuperación y redescubrimiento; la universidad imperial se abrió de nuevo y conservamos los nombres de algunos de sus maestros: León el matemático, Teodoro el gramático, Teodegio el astrónomo o Cometas el literato.

Todos estos académicos, sin duda, atesoraron libros. León, por ejemplo, seguro que tenía copias de las obras de Euclides; también tenía copias del libro de Apolonio sobre las secciones cónicas y de obras de Teón y de Proclo, así como de las de Arquímedes y posiblemente de Claudio Ptolomeo. En esta época, los libros se copiaban en una nueva escritura «minúscula», más pequeña y fácil de leer que el viejo estilo en mayúsculas, y con bastantes más marcas de acentuación y de pausa. Y los escribas seguro que seguían equivocándose y también mejorando y filtrando las versiones existentes de los textos según lo que les parecía mejor. En este momento, la mitad de las definiciones y un tercio de las proposiciones de los *Elementos* habían sufrido cambios a causa de mil años de comentarios y ediciones.

Aretas de Patras (también conocido como Aretas de Cesarea) era otro de los académicos de esta época y, sin duda, un hombre que apreciaba los libros hermosos. Nacido poco después de 850 en el occidente de Grecia, se trasladó a Constantinopla y recibió una exhaustiva educación clásica, con amplias lecturas de la literatura antigua. Su carrera fue eclesiástica: en 895 fue nombrado diácono y en 902 o 903, arzobispo de Cesarea (Cesarea Mazaca, en Capadocia), la sede arzobispal de más alto rango después de Constantinopla. Fue autor y editor y escribió unos comentarios al *Apocalipsis* de Juan, y conservamos también algunas de sus cartas y unos cuantos epigramas. Además, fue coleccionista de libros.

En el momento de su muerte, poseía veinticuatro de los diálogos de Platón y las principales obras de Aristóteles. Tenía copias de autores antiguos como Luciano, Arístides, Dion Crisóstomo, Marco Aurelio y de autores cristianos como Justino, Atenágoras, Clemente de Alejandría y el historiador de la Iglesia Eusebio. Los mejores libros en posesión de Aretas eran obras maestras de la caligrafía en pergamino de altísima calidad. Pagó 21 monedas de oro por su copia de las obras de Platón, teniendo en cuenta que los salarios de los funcionarios rondaban las 72 monedas de oro anuales. Encargaba sus libros a escribas profesionales, monjes en su mayoría; algunos eran los calígrafos más reputados del momento (una medida del estresante perfeccionismo que dominaba en los *scriptoria* bizantinos es que uno de ellos tenía un castigo específico por romper la pluma en un ataque de rabia).

Como no podía ser de otra manera, Aretas encargó una copia de los *Elementos*. De hecho, parece que fue el primer libro que encargó, tal vez como parte de su formación en las siete artes liberales. Esteban, su escriba, era uno de los calígrafos bizantinos más consumados, que trabajaba para varios clientes. Conservamos copias suyas de los *Hechos de los Apóstoles* y de las epístolas del *Nuevo Testamento*, así como obras de Ptolomeo, Porfirio y Proclo, en una caligrafía que también podría ser la suya. Tenía un estilo decorativo característico azul y dorado, con cipreses, columnas, linternas, cruces y figuras geométricas como rombos, círculos, cuadrados y rectángulos; también componía la página de manera espaciosa, con márgenes anchos en los que podían añadirse comentarios y notas sin enmarañar el texto principal.



Los *Elementos* en 888.

Y todo esto es lo que aportó Esteban a la copia de Aretas de los *Elementos* en 888: 388 hojas de pergamino en cuarenta y ocho pliegos, ligados para formar un grueso volumen de dieciocho por veintitrés centímetros. Con hasta veintiséis líneas por página, había un total de casi veinte mil líneas de texto escritas en una agradable tinta parduzca. Al final del libro XIII, Esteban declara que lo que ha copiado es la «edición de Teón»; luego copia los libros XIV y XV y los indica como «adición de Hipsicles». Los diagramas están trazados con esmero (difícil saber si los hizo el mismo Esteban), con regla y compás, y sus etiquetas están en mayúsculas; estas etiquetas se añadían a los espacios del texto principal que se habían dejado en blanco a propósito a tal efecto. Siempre correctos y siempre en un tamaño adecuado y legible.

A Aretas no le gustaban los libros solo para hacer bonito en un estante; no eran simples objetos de prestigio para exhibir. Los leía y añadía notas al margen de su propia mano. En su copia de Aristóteles añadió una gran cantidad de notas; en la de Platón, pocas. A veces copiaba las observaciones de otros, pero sin duda también incluía contribuciones de cosecha propia, aunque ninguna de gran relevancia (y, en general, sus intentos de corregir los textos han provocado quejas de los académicos posteriores). Explicaba, elogiaba, criticaba, se enojaba… en definitiva, mantenía un diálogo con los autores.

En los *Elementos* también sigue este patrón. Está claro que en él escribió comentarios procedentes de otras copias del libro, incluyendo fragmentos de geómetras antiguos y otras adiciones, algunas ilustradas con sus propios diagramas. Sin embargo, cincuenta de estos añadidos no aparecen en ninguna otra copia conservada de los *Elementos*, y podrían ser perfectamente obra del propio Aretas. Corrigió al escriba, incluyó comentarios o hizo breves anotaciones como «hermoso», «extraordinario» o simplemente añadió un pequeño ornamento. En una página incorporó un comentario sobre la suma y la resta de fracciones, procedentes de una clase de León el geómetra, mientras que cerca del principio y el final del volumen escribió un par de epigramas sobre Euclides.

Aretas murió durante la década de 930. Su biblioteca era impresionante, pero no enorme; no era el único coleccionista de libros y es posible que en su día esta colección no fuera nada del otro mundo; tampoco conseguía siempre los mejores textos de las obras en que estaba interesado. Su reputación como académico nunca fue muy alta, pero su biblioteca es importante porque una parte ha sobrevivido hasta el presente y, de este modo, nos ha legado algunas de las copias más antiguas que conocemos de varias obras famosas.

Han sobrevivido hasta nuestros días ocho libros de Aretas, repartidos por varios lugares, desde Florencia hasta Moscú. Sus copias de las obras de Platón y Aristóteles son un testimonio importante de los textos que contienen y debemos a Aretas la única copia conservada de las *Meditaciones* del emperador Marco Aurelio, la obra preferida del pensamiento estoico tardío; Aretas halló un viejo manuscrito «no destruido del todo» de este texto e hizo copiarlo. Sus *Elementos* son una de las dos copias completas más antiguas que han sobrevivido; la otra es un volumen del siglo IX no fechado y también procedente de Constantinopla.

La suerte que ha corrido esta copia de los *Elementos* no ha sido peor que la de muchos otros objetos de la época. Está claro que entre los siglos X y XIV fue muy usado y anotado. Sus propietarios y lectores fueron completando las notas marginales de Aretas, a veces con una caligrafía horrenda y en ocasiones con grandes y descuidados diagramas, desmereciendo en parte el atractivo del libro. Alguien también añadió números para ayudar a entender uno de los diagramas. Y lo que es peor, en algún momento se separaron las primeras páginas y se perdieron, de modo que las primeras catorce proposiciones del libro I tuvieron que ser sustituidas por una copia realizada por una mano diferente.

El paradero exacto del manuscrito durante todo este tiempo es incierto. Desde la época de las cruzadas, llegaban libros griegos a Europa occidental a través de diversas rutas, pero no tenemos noticias de este volumen concreto hasta que reaparece (aparentemente) en 1748, adquirido para la colección de Jacques Philippe d'Orville, un holandés de familia francesa que había viajado por Francia, Italia y Alemania antes de establecerse como profesor en su Ámsterdam natal.

D'Orville había ido adquiriendo una gran colección de manuscritos, y entre ellos los *Elementos* de Aretas destacaba como uno de los más antiguos. A su muerte, los libros pasaron a su hijo Jean y luego a su nieto; posteriormente fueron vendidos a un tal J. Cleaver Banks, al parecer un librero, y en 1804 casi todos los manuscritos fueron vendidos de nuevo a la Biblioteca Bodleiana de Oxford, por un precio de 1025 libras esterlinas. Una vez recatalogados, los *Elementos* pasaron a ser el manuscrito D'Orville 301.

Hoy, los *Elementos* de Aretas continúan en la Bodleiana y son el manuscrito fechado más antiguo que se conserva de un autor griego antiguo. Es también el primer manuscrito fechado con escritura minúscula, dejando de lado los textos religiosos. A pesar de su edad y de sus largos viajes (de hecho gracias a ello), sigue siendo un hermoso volumen. Es difícil contemplarlo sin emocionarse.

Al-Hayyay

Euclides en Bagdad

Bagdad, 14 de safar del año 204 de la Hégira (10 de agosto de 819). Amanece en la Ciudad Redonda. En medio de la multitud, un jovenzuelo:

> Vi al califa al-Mamún a su retorno de Jorasán. Acababa de pasar la Puerta de Hierro y se hallaba camino de Rusafa. La gente se organizó en dos líneas [para ver pasar al califa y a su séquito] y mi padre me alzó en brazos y me dijo: «Este es Mamún y estamos en el año [doscientos] cuatro». Siempre he recordado sus palabras; en ese momento tenía cuatro años.

Después de seis años de asedio, Abu al-Abbás Abdalláh ibn Harún al-Rashid, más conocido como al-Mamún, regresaba a la ciudad de sus padres. Heredero del califato, también heredaba las conquistas espectaculares de los anteriores ejércitos árabes. Sus tierras se extendían por Egipto, el Creciente Fértil, Persia y la India, una extensión casi comparable a la del imperio de Alejandro mil años antes y, aparentemente, bastante más perdurable.

De los tres grandes sucesores del Imperio romano (los griegos, los árabes y los cristianos occidentales), los árabes fueron los más dinámicos y transformaron sus dominios hasta hacerlos irreconocibles. El vasto imperio de los califas se extendía más de seis mil kilómetros desde el Atlántico hasta el Oxus (el actual Amu Daria) y por él circulaban mercancías, personas e ideas que convergían en la zona de Irak y Siria. Su riqueza era incalculable.

La dinastía de al-Mamún, los abasíes, llegó al poder en el año 750 y proporcionó una línea ininterrumpida de califas durante medio milenio, si bien su apogeo llegó muy pronto, durante su primer y segundo siglos. Sus valores eran universales y cosmopolitas y crearon un estado árabe centralizado alrededor del califa en cuanto líder, comandante militar y legislador que incluía a turcos e iraníes, cristianos y zoroastrianos asimilados y empleados y a veces también poderosos por derecho propio. Su historia se mezcla casi con la leyenda: Harún al-Rashid luchando contra los bizantinos, el auge y la caída de la familia barmáquida o la ejecución de Jafar, quien había sido la mano derecha del califa. Tras un período de dudas y experimentación, los abasíes trasladaron su capital a Bagdad en 762. Era la zona donde se concentraba su apoyo político y las fuentes de su riqueza: la rica llanura aluvial del sur de Irak, regada por el Tigris y el Éufrates, con abundantes cultivos de trigo, cebada, dátiles y otros frutos.

Los palacios de Bagdad.

Bagdad se situaba cerca de la confluencia de los dos ríos; era un gran puerto interior y centro de las rutas comerciales terrestres. Pronto se conoció como la Ciudad Redonda, ya que el complejo gubernamental central era un círculo rodeado de una muralla y un foso y centrado en el palacio y la mezquita, con amplios soportales y abundantes patios. A su alrededor crecieron suburbios y mercados y también se construyó otro palacio al lado del Tigris, el Juld, el palacio de la eternidad. Toda la ciudad era un monumento al califa que la fundó, Abu Ya'far al-Mansur:

> No ha habido ninguna ciudad en todo el mundo que pueda compararse con Bagdad en tamaño y esplendor, o en la cantidad de sabios y grandes personajes. La excelencia de los notables y del pueblo en general permite diferenciar a Bagdad de otras ciudades, como también la amplitud de sus distritos, la extensión de sus límites y la gran cantidad de residencias y palacios. Podemos ver los numerosos caminos, vías y

> barrios, los mercados y las calles, las rutas, mezquitas y baños y las avenidas y las tiendas; todo ello hace destacar a esta ciudad por encima de todas las demás, así como el aire puro, el agradable agua y las frescas sombras. No hay ningún otro lugar que sea tan templado en verano y en invierno ni tan saludable en primavera y en otoño.

La mezcla cultural en Irak era asombrosa. En el campo había judíos y cristianos de lengua aramea, en las ciudades se podían encontrar hablantes de persa, y también árabes, tanto cristianos como musulmanes. Además, en Siria, Palestina y Egipto, el griego continuaba hablándose, junto con el árabe, el siríaco y el hebreo, lenguas a las cuales se habían traducido una gran cantidad de textos griegos. A lo largo de la extensa frontera con el Imperio bizantino, no solo se producían escaramuzas militares, sino también contactos culturales, que mostraban al califato la considerable sabiduría griega que se había conservado.

Algunos libros persas y griegos ya se habían traducido al árabe, y ahora que los abasíes se habían afianzado en el poder y su capital se hallaba en construcción, empezaron a interesarse por el conocimiento.

> Les habían llegado noticias [de los libros] a través de los obispos y sacerdotes de [sus] súbditos cristianos, y, en cualquier caso, la capacidad de pensar del hombre le lleva hacia las ciencias del intelecto. Así pues, Abu Ya'far al-Mansur despachó emisarios al emperador bizantino y le pidió que le enviara traducciones de obras matemáticas. El emperador le envió el libro de Euclides y varias obras de física. Los musulmanes las leyeron y estudiaron su contenido; y creció su apetencia por obtener el resto.

En esta primera oleada de traducciones también se mencionan obras de Aristóteles, Ptolomeo y otros autores griegos, así como libros persas y siríacos e incluso algunos de autores indios sobre astronomía.

El traductor árabe de Euclides fue al-Hayyay ibn Yusuf ibn Matar, hijo de una culta familia cristiana presente en la fundación de Bagdad. No sabemos nada más de su vida personal ni de sus actividades, solo que tradujo los *Elementos* de Euclides y el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo durante las décadas alrededor del año 800. Una fuente sitúa la llegada inicial de una copia griega de los *Elementos* ya en 775, y las fuentes árabes nos dicen que la versión de Euclides de al-Hayyay fue encargada por el sucesor de al-Mansur, Harún al-Rashid, aunque otras afirman que fue su visir.

¿Cómo eran estos *Elementos* árabes? Algunos eruditos de la época parecen haber traducido el sentido de los textos, en lugar de trabajar de manera más literal, palabra a palabra, pero otros se mantuvieron lo más cerca posible de los originales. Esta última aproximación tal vez sea la más probable en el caso de esta obra de matemáticas, pero sea como fuere, parece poco probable que al-Hayyay reorganizara de forma apreciable el texto euclidiano. En cualquier caso, se trata de una versión bastante sucinta de los *Elementos*; parece haber trabajado a partir de una versión griega algo más corta que el texto que Esteban había copiado en Constantinopla, pues faltan algunas proposiciones y en muchos casos carece de las repetitivas exposiciones, especificaciones y conclusiones que encontramos en las versiones más largas. Muy probablemente tampoco contenía los libros XIV y XV. Los estragos del tiempo nos han dejado más de veinte manuscritos de los *Elementos* en árabe, pero ninguno parece contener la versión de al-Hayyay en una forma más o menos pura, de modo que tan solo podemos hacer conjeturas acerca de su verdadero carácter.

La pujante corriente de traducciones y la acogida de los *Elementos* de Euclides en árabe quedó gravemente perturbada medio siglo después de la fundación de Bagdad. En el año 196 de la Hégira (811 d. C.), estalló una guerra sucesoria entre los hermanos al-Amin y al-Mamún, hijos de Harún al-Rashid y durante más de un año al-Amin permaneció asediado en Bagdad por las fuerzas enemigas. La ciudad quedó devastada; se arrasaron suburbios y se excavaron fosos; se desmantelaron palacios y su material se puso a la venta. Al-Amin fue asesinado en 198 (813), pero la lucha continuó durante seis años más, a lo que se añadió el bandidaje y el saqueo por parte de soldados y justicieros. La vida cultural e intelectual quedó paralizada.

El retorno de al-Mamún a Bagdad marcó un nuevo comienzo. Mientras se dedicaba a pacificar y reconstruir, él y su círculo más cercano crearon una cultura cortesana refinada y sofisticada, con un intenso interés en las traducciones y en los textos científicos que tales traducciones iban acumulando. Bagdad se convirtió, más que antes si cabe, en un imán de textos e ideas; junto con Chang'an en el lejano imperio Tang era la ciudad más culta del mundo. Al-Mamún fundó (o quizá refundó) una biblioteca, la «Casa de la Sabiduría», para almacenar el conocimiento científico y filosófico que se iba recopilando.

El entusiasmo personal de al-Mamún era fundamental para esta empresa, y la corte siguió sus designios; los cortesanos hacían de mecenas de traductores como una manera de aumentar su prestigio y competían lanzándose a la caza de manuscritos. Los ciudadanos acaudalados externos a la corte, así como la élite militar, también se convirtieron en mecenas de intelectuales. Se enviaron nuevos emisarios a Constantinopla, que regresaron con más colecciones de manuscritos para traducir. Se formaron grandes bibliotecas personales y llegó a haber más de cien libreros en Bagdad. En su momento culminante, la corriente de traducción estaba apoyada por toda la élite de la sociedad abasí, desde príncipes y cortesanos hasta funcionarios y generales; era un fenómeno interétnico e interreligioso, con hablantes de árabe, siríaco y persa, musulmanes, cristianos, zoroastrianos y paganos.

Probablemente los mecenas más famosos de los proyectos de traducción fueran los tres hijos de Musa ibn Shakir, conocidos colectivamente como los Banu Musa. Cercanos a al-Mamún, gastaban dinero generosamente en beneficio de un círculo de traductores profesionales y buscadores de libros, todos con un salario mensual. Tenían un interés particular en la matemática, pero al igual que el resto de la sociedad abasí, no tenían inconveniente en explorar todas las ramas de la ciencia y la filosofía: astrología, alquimia, metafísica, ética, física, zoología, botánica, lógica, medicina, farmacología, ciencia militar, cetrería, etc.

A medida que la traducción se convertía en una verdadera profesión, el conocimiento colectivo del griego por parte de los traductores mejoraba considerablemente y aumentaba la exactitud y el alcance de la terminología empleada, lo que implicaba que las traducciones anteriores quedaban obsoletas o necesitaban una actualización. Ciertamente, los primeros traductores árabes de textos científicos se enfrentaron a una tarea extraordinaria; el árabe es un idioma muy alejado del griego, con una estructura sintáctica y léxica muy diferente. Para muchos términos técnicos, tenían que acuñarse nuevas palabras árabes, tomando prestadas palabras griegas o siríacas o bien modificándolas, o también creando nuevos términos. Los traductores acabaron creando un vocabulario científico que se emplearía durante siglos, desde el norte de África hasta China.

En esta atmósfera embriagadora, al-Hayyay se dio cuenta de que podría serle de utilidad elaborar una nueva versión de sus *Elementos*; en aquel momento la terminología técnica aún era vacilante y por esta razón sería de interés actualizar su traducción; también es posible que hubiera leído nuevos textos griegos que quisiera tener en cuenta. Lo que relatan los historiadores árabes posteriores es que decidió buscar el favor de al-Mamún (o quizá fue un encargo de su visir) para corregir, depurar y abreviar sus *Elementos*, elaborando una versión para especialistas en la que no hubiera nada superfluo y en la que se añadiera cualquier carencia detectada.

Al-Hayyay, o tal vez alguna otra persona en este primer período de los *Elementos* árabes, inició la costumbre de dar nombres propios a algunas proposiciones. Una fue bautizada como «la mamunia» (*al-ma'muni*) por el nombre del califa que fue el segundo mecenas de al-Hayyay; otra (el teorema de Pitágoras) fue llamada «la de los dos cuernos», aplicando a su diagrama, de un modo algo incongruente, un sobrenombre árabe tradicional de Alejandro Magno. También podemos encontrar las proposiciones «pata de ganso», «cola del pavo real» e incluso «diablo». Se supone que los nombres servían para recordar con más facilidad qué proposición era cada una o ayudaban a identificar la forma general de algunos diagramas: patas, colas o cuernos.

El hecho de que hubiera un público de especialistas, personas formadas e interesadas, dispuesto a leer esta nueva y depurada versión de los *Elementos* árabes es una muestra de lo que el movimiento de traducción estaba logrando. A lo largo de dos siglos, se traduciría un mínimo de ochenta autores griegos, entre los cuales se cuentan los grandes nombres de Aristóteles y Platón. Casi toda la ciencia y filosofía griegas que sobrevivió al derrumbe del Imperio romano fue traducida al árabe durante esta época. Fue un renacimiento del saber a la mayor escala posible, con profundas consecuencias para la formación de la cultura intelectual islámica, que asimiló y desarrolló no solo los conocimientos griegos, sino también los indios y los persas.

El flujo continuo de manuscritos hacia Bagdad implicó que la historia de Euclides en árabe no finalizara con al-Hayyay. Más adelante, en el siglo IX, otro traductor elaboró una nueva versión, que luego fue revisada una tercera vez por Thábit ibn Qurra, uno de los protegidos de los Banu Musa. Los *Elementos* eran ya parte del saber matemático básico árabe, siempre a punto para ser trabajados y reconsiderados. De hecho, se habían convertido en el texto matemático más importante del mundo islámico, fundamental en la enseñanza de la geometría y todo un estímulo para una gran variedad de tareas matemáticas. Fue corregido, resumido, ampliado, citado y comentado incontables veces. Hoy en día sobreviven unos cincuenta comentarios árabes sobre los *Elementos*, así como traducciones al árabe de antiguos comentarios griegos. Omar Jayam, más conocido en Occidente como poeta, escribió un tratado en el que explica las dificultades de los postulados de Euclides; Ibn Sina, conocido como Avicena en el mundo latino medieval, redactó un resumen de los *Elementos* para la parte geométrica de una obra enciclopédica. En el siglo X, un autor que escribió sobre fracciones utilizó el apodo *al-Uqlidisi*, con lo que seguramente quiso indicar que se ganaba la vida haciendo copias de manuscritos de Euclides (*Uqlidis*); en esa época, la Ciudad Redonda de al-Mansur era poco más que un montón de ruinas, pero los *Elementos* árabes que había creado continuaban con vida.

Adelardo

Euclides en latín

Bath, suroeste de Inglaterra, principios del siglo XII. Dos hombres y dos libros. Un libro está en árabe y uno de los hombres lo va leyendo y traduciendo en voz alta sobre la marcha, tal vez al castellano. El otro hombre escucha las palabras en castellano y las escribe en latín en su libro. Palabra tras palabra, página tras página. Tropiezan con el vocabulario, discuten sobre los términos. Poco a poco, nace Euclides en latín.

En la historia medieval de Euclides, las versiones árabes tienen una importancia sin parangón. A partir de ellas se tradujo el texto al sánscrito, al persa, probablemente al siríaco y a otros idiomas, de algunos de los cuales solo sobreviven fragmentos. Y también se tradujo al latín.

Durante medio milenio, los ciudadanos cultos del Imperio romano de Occidente leían geometría griega en griego, si es que llegaban a leer sobre tales temas. Luego, durante más de medio milenio tras el colapso del Imperio en Occidente, lo máximo a lo que se podía acceder de Euclides eran resúmenes en latín de algunos resultados de los *Elementos*, en general sin las demostraciones (véase el capítulo sobre Higino en la tercera parte de este libro). No parece que el texto completo de los *Elementos*, ni nada parecido, se tradujera al latín antes del año 1000.

Sin embargo, desde el siglo XI, los cristianos habían reconquistado buena parte de la península Ibérica y los normandos ocuparon Sicilia, lo que creó nuevas posibilidades para que libros en árabe o en griego llegaran al mundo de habla latina. La nueva situación también facilitó que personas que sabían leer y escribir latín entraran en contacto con otras que sabían leer griego o árabe. Por la misma época, parece que las cruzadas en el levante mediterráneo poco hicieron en términos de intercambios culturales, pero la venta o el saqueo de bibliotecas islámicas sin duda fue un factor que tener en cuenta en la circulación de libros durante este período. Saladino subastó la famosa biblioteca fatimí a partir de 1171, por ejemplo, y en 1204, Constantinopla, la cima de la cultura de los manuscritos bizantinos, cayó en manos de los cruzados de Occidente.

Lo que siguió fue una corriente de traducción comparable en su alcance a la de Bagdad dos siglos antes, pero en este caso se trató de un movimiento descentralizado, impulsado no por mecenas cortesanos sino por un grupo de maestros profanos itinerantes, ávidos de textos. Había traductores trabajando en Barcelona, Tarazona, Segovia, León, Pamplona y, al norte de los Pirineos, en Tolosa, Besièrs, Narbona y Marsella; Toledo sería un centro especialmente importante para la traducción y la enseñanza. Un entusiasmo por las traducciones al latín que duró un siglo, por lo menos. Buena parte de la ciencia y el saber árabes fue traducida al latín durante el siglo XII; sus consecuencias fueron incalculables.

Adelardo de Bath.

Como era de esperar, los *Elementos* formaron parte de todo este proceso. El libro fue traducido al latín varias veces durante el siglo XII por eruditos cuyos orígenes iban de Chester, en el norte de Inglaterra, a Cremona, en la Lombardía. La primera traducción fue obra de un hombre cuya vida podríamos calificar tranquilamente de aventurada en cualquier época: Adelardo de Bath.

Fastred era uno de los arrendatarios del obispo de Wells; tenía tierras en Wells, Yatton y Banwell, todas en Somerset. Su hijo Adelardo (Athelardus) nació hacia el año 1080, menos de una generación después de la conquista normanda de Inglaterra. Era inteligente, quizá mucho, y la combinación de los medios económicos de su familia y tal vez algún mecenazgo y la nueva situación en la Inglaterra bajo dominio normando dio lugar a posibilidades muy interesantes para su educación. Se trasladó a Francia, a Tours, donde estudió artes liberales y mostró un interés especial por la astronomía; aprendió música y tocó ante la reina, previa invitación, y escribió un diálogo dramatizado a la manera de Boecio, en el que alentaba a los jóvenes a estudiar filosofía. Podría haber seguido la carrera eclesiástica o quizá trabajar como administrador en la corte, pero en cambio decidió continuar sus viajes. Dejando atrás a un sobrino dedicado a los aburridos estudios en la Galia (a partir de los detalles autobiográficos del mismo Adelardo, puede que este sobrino no fuera más que un personaje de ficción), se lanzó a buscar lo más novedoso de la época: el saber árabe.

En un ejemplo de lo que tal vez se podría calificar de turismo de las cruzadas, llegó al principado normando de Antioquía, en Siria, pasando por Salerno y tal vez Sicilia y Cilicia. En Siria presenció un terremoto, en Italia asistió a un experimento neumático, se encontró con un filósofo griego y aprendió que la luz viaja más rápidamente que el sonido. En definitiva, Adelardo viajó desde Inglaterra hasta la frontera con las tierras islámicas, sin ningún tipo de protección o apoyo oficial, en busca de los conocimientos de esa otra civilización. El éxito de la primera cruzada en 1098 había puesto de moda el Próximo Oriente, pero era muy poco habitual que los eruditos viajaran hasta allí con el propósito específico de tener un encuentro con la ciencia árabe.

Sin duda, Adelardo tuvo éxito en su búsqueda de textos científicos árabes, como libros de astrología, tablas astronómicas y los *Elementos* de Euclides. Por desgracia, los detalles que tenemos son de lo más oscuros en este momento. Sus tablas astronómicas estaban calculadas para utilizarse en Córdoba, y el lugar más natural para hallar una copia árabe de los *Elementos* también hubiera sido en la España reconquistada. Sin embargo, Adelardo, tan dado a explicarlo todo acerca de sus viajes, nunca dijo haber estado en la península Ibérica. Aquí nos quedamos con un elemento de misterio.

Durante la década de 1120, Adelardo regresó a Inglaterra. Aparece en registros legales y judiciales de la zona de Bath, si bien su nombre no era lo bastante inusual como para que podamos estar cien por cien seguros de que esos registros se refieran siempre al mismo hombre. Eran unos años turbulentos en Inglaterra, y parece que Adelardo apoyó primero al rey Esteban y luego a su rival Matilda; de hecho, dedicó un libro al hijo de esta, el futuro Enrique II. Es probable que se relacionara con el círculo de eruditos eclesiásticos del obispo de Hereford y Walcher y prior de Malvern. Escribió sobre astrología, tradujo las tablas astronómicas de al-Juarismi (director de la biblioteca de la Casa de la Sabiduría en Bagdad) y redactó un libro sobre filosofía natural, basándose de un modo general en su conocimiento de las ideas árabes. También enseñó y escribió un pequeño libro de cetrería. Y, claro está, tradujo los *Elementos* del árabe, quizá poco antes de 1130.

Tal como señala un historiador, «nada de su vida hasta ese momento nos prepara para esto». Efectivamente, no está nada claro qué es lo que preparó a Adelardo para esta tarea, porque nunca afirma que pudiera leer árabe. Los escritos de sus años anteriores no revelan ningún conocimiento especial de geometría ni tampoco un interés particular por el tema, aunque sin duda conocía algunos textos prácticos sobre agrimensura y tal vez había visto algún resumen en latín de los *Elementos*.

Sea como fuere, no deja de ser notable el mismo hecho de pensar en traducir un libro de la longitud y complejidad de los *Elementos* en las condiciones de la época; y aún más teniendo en cuenta que Adelardo se puso a trabajar en ello tras regresar a Bath, a dos mil kilómetros del lugar más cercano en que se hablaba árabe. Por todo ello, es razonable pensar que dispuso de algún tipo de ayuda lingüística. Testimonios posteriores ponen de manifiesto que los eruditos latinos que trabajaban en centros como Toledo recurrían a la ayuda de expertos locales. Una situación habitual podría ser así: un texto en árabe, una persona local que hablaba árabe y castellano y un erudito invitado o inmigrante que entendía el castellano y podía escribir en latín. La traducción era un proceso en dos etapas, de modo que el texto pasaba por una versión hablada intermedia en castellano, y buena parte del trabajo intelectual de comprender el texto corría a cargo del ayudante arabófono más que del erudito latino.

Es perfectamente posible que Adelardo tuviera un ayudante parecido, hoy ya perdido en las brumas de la historia, o quizá alguien que le ayudaba a pasar directamente del árabe al latín. De hecho, se antoja poco plausible que se enfrentara a la gran complejidad conceptual y terminológica de los *Elementos* árabes sin alguna ayuda de este tipo. En cierto momento, en el círculo erudito de Hereford y Malvern se hallaba Pedro Alfonso, de Huesca, un judío converso que llegó a ser médico del rey Enrique I de Inglaterra. Trabajaba en temas de astronomía y podría ser el responsable de la traducción inicial a partir de la cual Adelardo elaboró su versión de las tablas astronómicas de al-Juarismi. Pedro se trasladó a Francia demasiado pronto como para haber trabajado en los *Elementos* de Adelardo, pero este ejemplo muestra el tipo de colaboración que podría haber implicado y el tipo de persona que podía estar detrás del trabajo de Adelardo, sin ningún reconocimiento.

En cualquier caso, los *Elementos* en latín fueron un logro considerable. Muestra con claridad las etapas lingüísticas por las que pasó, y los esfuerzos de este primer traductor medieval por hallar los términos latinos adecuados para lo que necesitaba expresar. En un punto, Adelardo probó con tres frases diferentes, una detrás de otra, para expresar la idea de «una proporción repetida tres veces»; en otro lugar dudó entre las palabras que significan 'diferencia' o 'resto' al referirse al resultado de restar una cantidad de otra.

Es muy fácil ver que no estaba trabajando a partir del texto griego, puesto que no empleó ninguno de los préstamos griegos que más adelante serían habituales en latín, como *hypotenusa*, *parellelogrammum* o *ysosceles*; en cambio, su latín contenía gran cantidad de términos tomados directamente del árabe, como *alkamud* (perpendicular), *alkaida* (base), *mutekefia* (proporcional), *elmugecem* (sólido) o *elmugmez* (pentágono). Incluso cuando conocía los equivalentes latinos, Adelardo en ocasiones adoptaba deliberadamente la terminología árabe, como *elkora* para esfera o *elmukaab* para cubo.

Del texto con el que trabajaba Adelardo proceden también los nombres de algunas proposiciones, que convirtió en curiosas jerigonzas: *elefuga*, *dulcarnon*, *thenep atoz* o *seqqlebiz*, algunas de las cuales tuvieron éxito, sobre todo *dulcarnon*, que aparece años después en un poema de Chaucer. También aprovechó de los *Elementos* árabes el hábito de introducir las diferentes partes de cada proposición con frases formales e invariables: «ahora debe demostrarse…», «así, afirmo que…», «esto es lo que pretendíamos demostrar…», «por esta razón…». Se trata de giros que no aparecen en ninguna versión griega conservada, y casi con toda seguridad no fueron creados por Adelardo; en consecuencia, nos permiten entrever rasgos de su fuente árabe que, de otro modo, se hubieran perdido.

De las dos principales versiones árabes de los *Elementos*, el consenso actual es que la de Adelardo parece derivarse de la primera, la de al-Hayyay. La prueba más clara es que el número de proposiciones del Euclides de Adelardo coincide con el de al-Hayyay en diez de los quince libros, mientras que en cuatro de estos, la versión árabe posterior de Thábit ibn Qurra tiene una cantidad diferente. Diversas semblanzas en la redacción también apoyan esta conclusión, si bien hay varios aspectos que la complican. La versión de al-Hayyay se ha perdido en su mayor parte y la de Adelardo solo sobrevive parcialmente (se han perdido el libro IX y parte del X). No hay ningún manuscrito árabe que sea lo bastante similar a la versión de Adelardo para poder considerarlo su fuente, y es posible que no trabajara a partir del texto «puro» de al-Hayyay, sino de uno modificado. Para añadir misterio a la trama, hay un manuscrito del siglo XV o XVI que contiene casi todo el libro I en siríaco y coincide casi palabra por palabra con el texto de Adelardo (incluso las etiquetas de los diagramas); ¿significa esto que el traductor siríaco y Adelardo emplearon la misma fuente árabe hoy perdida? Parece claro que sobre este tema todavía no se ha dicho la última palabra.

El logro de Adelardo fue notable, y los escribas posteriores asociaron su nombre a todo el material euclidiano, fuera en realidad obra suya o no. Un estudiante anotó cuidadosamente las opiniones de Adelardo acerca de unos detalles de la aritmética de Boecio, y un tal Ocreato le dedicó una obra de aritmética. Su versión de los *Elementos* fue un hecho crucial para que una tradición matemática de la costa mediterránea tuviera presencia en el norte de Europa; desde ahí pasaría, unas pocas generaciones después, al conjunto de nuevas universidades que se iban creando desde Italia hasta Inglaterra.

Hacia 1150, Adelardo ya estaba muerto, pero la tarea de traducción de los eruditos del siglo XII continuaba, y el interés por la versión latina de los *Elementos* aumentaba. Los traductores de la época se lanzaban con entusiasmo sobre una gran cantidad de material al cual podían acceder de un modo algo aleatorio, y además trabajaban sin contacto unos con otros. Los textos se traducían más de una vez y empezaron a surgir embrollos de diferentes versiones a medida que se obtenían nuevos textos árabes o se intentaban maneras nuevas de conjuntarlos. En el caso de los *Elementos*, el reparto es bastante extenso, y los nombres de traductores y editores dan una cierta idea de las personas interesadas en el libro: Hermann de Carintia, Roberto de Chester, Gerardo de Cremona o Juan de Tynemouth. Gerardo, a mediados del siglo XII se desplazó a Toledo y se convirtió en el traductor más prolífico de árabe de ese siglo; tradujo comentarios y los *Datos* de Euclides, además de los *Elementos*. En Sicilia, donde había una tradición de bilingüismo y trilingüismo, alguien tradujo los *Elementos* directamente del griego al latín a finales del siglo XII. Hay algunas otras versiones más que todavía no han sido estudiadas en su totalidad; algunas solo existen en un único manuscrito y son combinaciones complejas de diferentes ediciones.

Poco a poco, todas las versiones más tempranas, incluyendo la de Adelardo, quedaron eclipsadas. Primero, por la versión de Roberto de Chester, popular durante todo el siglo XII e, irónicamente, atribuida a menudo al propio Adelardo (es posible que Roberto fuera alumno de Adelardo, lo que explicaría la confusión). Luego, por la versión de Campano de Novara. Este, que escribió en la década de 1250, elaboró lo que sería el Euclides definitivo de la Baja Edad Media. Empleó la versión de Roberto para las afirmaciones de cada proposición, un material que se remontaba a Adelardo, pero elaboró nuevas versiones de las demostraciones, aprovechando material de otras ediciones y comentarios; también añadió nuevas proposiciones y definiciones de diversas fuentes. El deseo de modificar y mejorar los *Elementos* demostraba ser tan duradero como el propio libro.

Hoy en día sobreviven unos cien manuscritos de los *Elementos* de Campano, y en su día fue todo un éxito. De la versión de Adelardo solo quedan cuatro, ninguno de ellos completo, pero gracias a Campano sobrevivió gran parte del esfuerzo de Adelardo por traducir las palabras de Euclides al latín, esfuerzo que prosperó durante tres siglos más hasta llegar a la época de la imprenta.

Erhard Ratdolt

La impresión de los *Elementos*

Mayo de 1482, en la Serenísima República de Venecia. Imprenta de Erhard Ratdolt.

En una habitación, los cajistas sentados en altos taburetes encajan pequeños tipos de plomo en unos marcos alargados llamados *componedores*. En un componedor caben unas pocas líneas de texto (boca abajo y en sentido inverso) y cuando está lleno, las letras se desplazan en bloque a la galera en la que se va componiendo la página completa. Un buen cajista podía componer unos cuantos miles de caracteres (unos cientos de palabras) en una hora.

Una vez completada la página, las letras (y eventuales imágenes) quedan fijas y se llevan a la habitación contigua, donde está la prensa. Sobre la llamada *base de piedra*, bajo la prensa, se pone la composición, llamada *forma*, y se entinta. Dos bastidores se abren para sostener el papel, luego se cierran y todo el conjunto (papel, tinta, letras) se desliza bajo la prensa. Un par de prensadores tiran de una larga palanca o hacen girar un torniquete para presionar el papel contra los tipos entintados y que la tinta pase al papel. Luego sueltan la palanca, retiran y abren los bastidores y sacan el papel; el mozo lo lleva a otro lugar. A continuación, otra página, y otra, hora tras hora.

El taller es un lugar ajetreado, ruidoso y peligroso. Los tipos están hechos de plomo; la tinta probablemente contiene vitriolo, y su fabricación implica alquitrán ardiente y aceite hirviente. La prensa es pesada y tan potente como una prensa de vino, su antecesor inmediato.

En los primeros meses de 1482, de uno de estos talleres salen más copias de los *Elementos* de Euclides que las que se han hecho en toda Europa durante mil años.

El propietario y supervisor de este taller, Erhard Ratdolt, formaba parte de la diáspora alemana que llevó la invención de Gutenberg por toda Europa en la segunda mitad del siglo XV. En 1450, solo una imprenta del mundo usaba tipos móviles; en 1470, había máquinas de este tipo en catorce ciudades y en 1480, en más de un centenar. Nacido hacia 1447, Ratdolt creció en Augsburgo, en el sur de Alemania, y tras un período en que hizo de aprendiz, cruzó los Alpes por el paso del Brennero y se instaló como impresor en la primera y más esplendorosa ciudad que encontró: Venecia.

Venecia en la década de 1470.

En esos momentos, a finales del siglo XV, la ciudad, un auténtico centro comercial y empresarial con un magnífico puerto natural, se hallaba en la cúspide de su poder, influencia y esplendor. Durante los cincuenta años anteriores se habían construido buena parte de sus monumentos más famosos, como la fachada del palacio ducal, el Ca' d'Oro, San Juan y San Pablo, la Porta della Carta y Ca' Foscari. El dux era Giovanni Mocenigo. Un embajador francés describió así la ciudad:

> Me guiaron por la calle más larga, que llaman el Gran Canal, tan ancha que las galeras se cruzan a menudo unas al lado de otras; de hecho, he visto buques de cuatrocientas toneladas o más echar el ancla justo al lado de las casas. Diría que es la calle más hermosa y mejor construida del mundo, y atraviesa buena parte de la ciudad. Las casas son amplias y altas, hechas de piedra; las más antiguas están todas pintadas; las de unos cien años están recubiertas de mármol blanco de Istria, a unos doscientos kilómetros, y tienen incrustaciones de pórfido y serpentinita. La mayoría tienen dos habitaciones como mínimo, con techos dorados, suntuosas chimeneas y camas doradas, así como sus portales, y todas están ricamente amuebladas. En resumen, es la ciudad más espléndida que haya visto nunca, la más respetuosa con embajadores y forasteros,

gobernada con la mayor sabiduría y servidora de Dios con la mayor solemnidad.

En 1476, Ratdolt se dedicaba a la impresión como socio de una empresa de tres hombres, una muestra más de la enorme expansión del negocio de la impresión en la ciudad; de no haber ninguna imprenta en 1469, se pasó a ciento cincuenta impresores a final de siglo. La combinación de adecuadas fuentes de papel en el norte de Italia con unas generosas disposiciones para la protección de los textos y las mejoras técnicas convirtieron a la ciudad en uno de los centros de la nueva tecnología. Ratdolt y sus socios imprimieron calendarios, historias y geografías, con un total de once libros en tres años. Sus libros se cuentan entre los más exquisitos nunca impresos, con portadas ornamentadas, esmeradas ilustraciones xilográficas y letras capitulares, así como textos a dos colores impresos en negro y rojo. Las ilustraciones de los eclipses en los calendarios se coloreaban a mano en color amarillo después de la impresión. Los tipos, como los de los demás impresores venecianos, se basaban en la escritura de los eruditos contemporáneos y siguen siendo elogiados por su armonía y elegancia.

En 1478, una plaga amenazó con dar al traste con toda esta actividad. Castigó a Venecia durante cuatro años y en su momento culminante morían mil quinientas personas cada día. Mucha gente huyó; la mitad de las imprentas cerraron y la sociedad de Ratdolt ya no volvió a imprimir nada más, aunque los tres socios sobrevivieron al desastre. La hija de Ratdolt, Anna, nació en junio de 1479, cuando la catástrofe estaba en su apogeo.

Al año siguiente, Ratdolt empezó a reconstruir su negocio de impresión, esta vez como único propietario y con una plantilla de cajistas, prensadores, grabadores, revisores, aprendices y ayudantes. Se puso manos a la obra con inusitada energía, algo comprensible dadas las circunstancias; así, en su primer año por cuenta propia publicó ocho libros y se esforzó por llegar a un mercado más amplio, encargándose de obras eclesiásticas, históricas y textos matemáticos, lo que se convertiría cada vez más en la especialidad de la casa.

Ya hacía tiempo que había proyectos para imprimir los *Elementos*. El astrónomo e impresor Regiomontano, con el cual Ratdolt había trabajado como aprendiz, propuso una edición en la década de 1470, pero nunca llegó a buen puerto. El proyecto, pues, le tocó a Ratdolt; en sus manos, diez años antes de que Colón atravesara el Atlántico, Euclides dio el paso trascendental a la imprenta.

Era una empresa enorme. Ratdolt escogió el formato grande *infolio*, que dio un libro de unos veinte centímetros de altura y dieciocho de ancho; aun así, tenía nada menos que 276 páginas, de manera que casi setenta hojas de papel tenían que pasar bajo la prensa, dos veces cada una, para producir cada ejemplar (luego se doblaba cada página de manera que al encuadernarse en el libro formaba cuatro páginas). Los cajistas tuvieron que colocar más de medio millón de tipos en total.

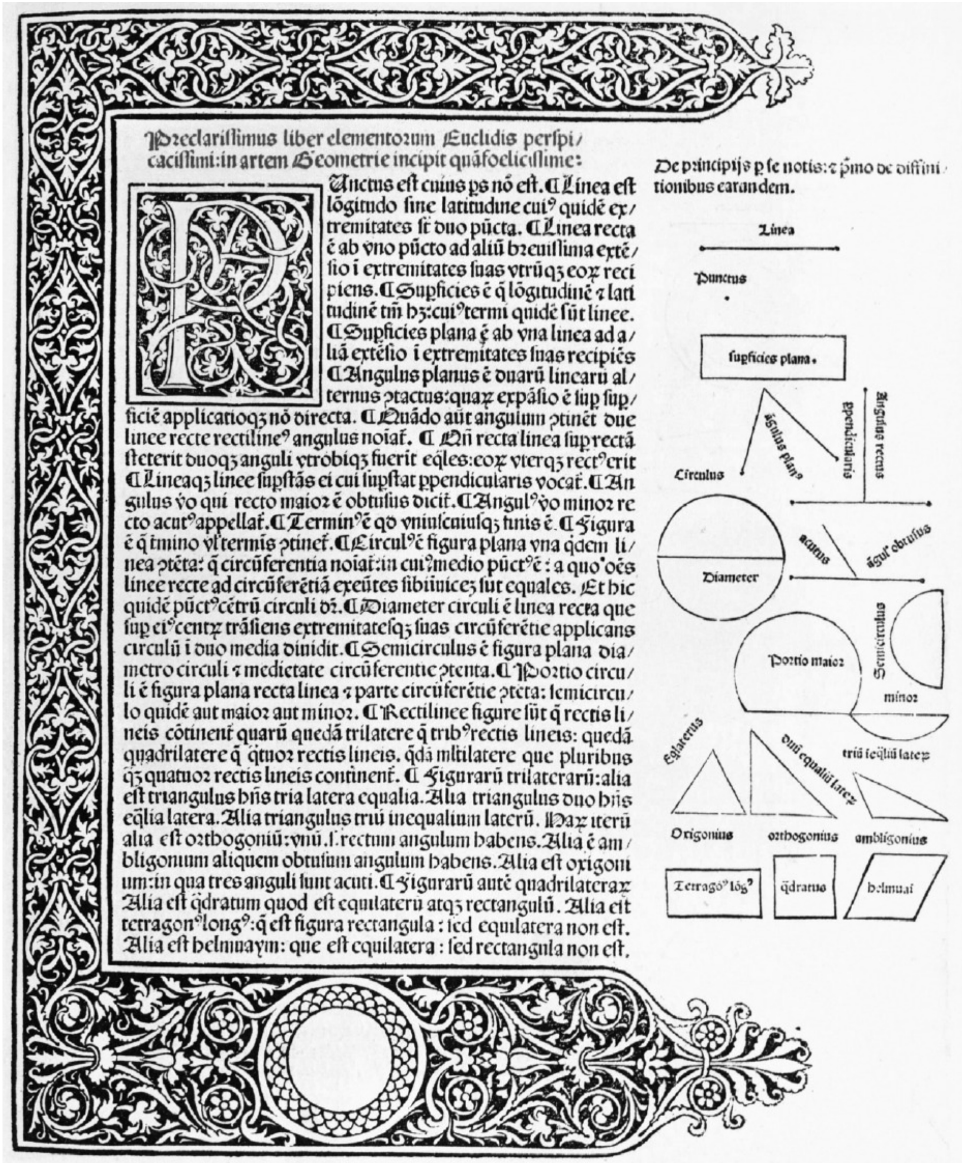
En la edición aparecieron problemas que nadie esperaba. Había tantas proposiciones de Euclides que comenzaban con «Si…» o «Sea…» (*si* y *sit*, en latín) que algunas páginas necesitaron hasta trece eses ornamentadas; Ratdolt se quedó sin más iniciales decoradas de su conjunto inicial y tuvo que complementarlas con otro conjunto que no coincidía. De modo parecido, la incesante referencia a los puntos en los diagramas etiquetados A, B, C, D, etc. incluso llevó al límite las existencias de mayúsculas de tamaño normal y se tuvieron que usar cuatro conjuntos completos de tipos para poder imprimir el libro.

Dejando los problemas técnicos de lado, lo cierto es que Ratdolt hizo todos los esfuerzos posibles para obtener un libro de máxima calidad. Parece que disponía de un buen manuscrito de los *Elementos*, en la versión latina de Campano, probablemente parte de una famosa biblioteca eclesiástica procedente de la corte papal de mediados de siglo, donde había una tradición de libros matemáticos bien ilustrados. La primera página, decorada, pasó por la prensa tres veces: una para el texto, otra para el borde y otra para el título, que se imprimió en tinta roja; se emplearon unos orificios en el papel para alinear adecuadamente las diferentes capas de impresión. Los tipos usados eran pulcros y de gran precisión y el borde decorado (reutilizado de uno de los anteriores libros de Ratdolt) era un hermoso diseño. La composición de la página era bastante parecida a la de las biblias de Gutenberg, con amplios márgenes que en última instancia se inspiraban en los mejores manuscritos medievales.

¿Y los diagramas? Se trataba del primer libro realmente geométrico en imprimirse, el primero para el que se necesitaba una gran cantidad de diagramas precisos. No era ningún secreto que imprimir diagramas era una tarea difícil; otros impresores estaban publicando ediciones de Ptolomeo y Vitrubio sin los diagramas, porque era demasiado complejo imprimirlos; incluso en la tradición manuscrita era cada vez más habitual que los diagramas se copiaran con un pésimo trazado o incluso que se omitieran, a causa del tiempo y la habilidad necesaria para copiarlos. Los *Elementos* necesitaban quinientos o más y, tal como señaló el propio Ratdolt, no se puede entender nada de geometría sin unos buenos diagramas.

Ratdolt estaba dispuesto a hacerlo bien y, de hecho, parece que en su decisión de imprimir los *Elementos* influyó un avance que logró en la técnica de imprimir diagramas geométricos. La forma habitual de insertar ilustraciones en los libros impresos era tallarlas en madera y luego, uniendo el bloque de madera al bastidor con los tipos, entintarlo e imprimirlo del mismo modo que el texto. Se podían lograr buenos dibujos, pero con ciertas limitaciones, sobre todo al crear líneas finas de grosor uniforme y de manera que apareciesen rectas cuando tenían que ser rectas y circulares cuando tenían que ser circulares. En el caso de diagramas geométricos la cosa era especialmente problemática.

En un prefacio a sus *Elementos*, Ratdolt alardeó de haber creado una técnica especial para imprimir los diagramas, pero los estudiosos no se ponen de acuerdo en cuál debía de ser. Una sugerencia es que usó tiras de metal (zinc o cobre, probablemente) y las dobló para obtener las formas necesarias, luego las fijó en su sitio con yeso y las juntó con los tipos que imprimirían las etiquetas A, B, C, etc. del diagrama. Otra posibilidad es que usara piezas de metal colado unidas del mismo modo que los tipos que formaban el texto de la página. O también puede ser que dispusiera de utensilios y técnicas especiales para hacer xilografías de calidad excepcional.



Los *Elementos* en 1482.

En cualquier caso, el diagrama de madera o de metal podía fijarse en la página con los tipos (Randolt siempre los colocaba en el margen, lo que simplificaba esta parte del proceso) y entintarse e imprimirse como el resto de la página. Lo hiciera como lo hiciese, Ratdolt logró resultados de altísima calidad, con líneas finas y uniformes con la curvatura o rectitud necesarias. Se le ha calificado, con razón, como el impresor más innovador después de Gutenberg. El resultado fue un libro del que Ratdolt podía estar orgulloso, y que mejoró aún más su reputación entre los impresores venecianos. Ningún manuscrito medieval conservado de los *Elementos*, en cualquier idioma, tiene diagramas en una cantidad y calidad comparables.

Después de haber imprimido una gran cantidad de ejemplares, Ratdolt paró la prensa y recompuso las primeras nueve hojas del libro. Quería reordenar algunos diagramas, insertar otros nuevos y, en general, mejorar la claridad y exhaustividad de las páginas. Casi cuesta de creer tal grado de atención, casi obsesiva, tal nivel de compromiso con la perfección, incluso en el especializado y orgulloso mundo de los primeros impresores.

El resultado fue una obra digna de un rey, y Ratdolt añadió al libro una hoja, impresa por separado, en la que lo dedicaba al dux de Venecia. No hay ninguna prueba de que el dux encargara la obra ni de que pagara la impresión, ni tan solo de que quisiera el libro, pero la dedicatoria de Ratdolt lo situaba bajo la protección de su soberano, otorgando a Giovanni Mocenigo el papel de mecenas y al propio Ratdolt el de un creador que le ofrece su obra. Era una manera de promover su estatus, por encima del de un artesano y casi a la par con un autor, así como una oportunidad de mostrar al mundo lo que podía hacer. En unos pocos ejemplares de obsequio, imprimió sobre vitela en lugar de papel y añadió polvo de oro a la tinta, en lugar de usar el negro de carbón habitual, para poder imprimir la dedicatoria en ostentosas letras doradas. En el caso del ejemplar para el dux, la primera página fue iluminada a mano para dar aún más empaque al obsequio.

El texto de la dedicatoria no escatima esfuerzos para remarcar la creatividad de Ratdolt:

> Solía preguntarme cómo es que en su poderosa y famosa ciudad se publican tantas obras de autores antiguos y modernos, pero ninguna de ellas, o muy escasas y de poca importancia, es de matemáticas […] Hasta ahora nadie ha hallado una forma de hacer diagramas matemáticos […] Estudié el tema y, con grandes esfuerzos, hice las figuras, de modo que los dibujos geométricos se imprimen con la misma facilidad que las partes textuales de los *Elementos*.

Es probable que Ratdolt imprimiera más de mil copias de su extraordinaria edición de los *Elementos*. Estableció la norma para la tipografía matemática y para la impresión de diagramas geométricos; elaboró un lenguaje visual para la geometría en el nuevo mundo del libro impreso, parecido al lenguaje visual de los manuscritos pero con sutiles diferencias.

Por desgracia, hay poca información sobre el destino de todos esos ejemplares. Al fin y al cabo, un libro lujoso no tiene por qué ser un libro leído, aunque en el ambiente intelectual de la Italia del siglo XV, es razonable pensar que esta primera versión impresa de un texto antiguo tan conocido recibiera bastante atención. De hecho, las copias que han sobrevivido hasta la actualidad muestran que varios lectores interactuaron con los diagramas copiándolos de nuevo con su pluma o su lápiz, tal como había hecho ese anónimo lector de Elefantina, y aprovechando los espacios en blanco de los generosos márgenes de la edición de Ratdolt. Así continuaba la vieja tradición de entender y aprender las ideas que contienen las palabras y los diagramas.

Antes de finalizar el siglo, hubo unas cuantas ediciones más de los *Elementos* en un compendio en latín, así como una reimpresión pirata de la edición de Ratdolt, que apareció en Vicenza en 1491. Pero los *Elementos* despegaron de verdad durante el siglo siguiente, a medida que imprimir se hacía más barato y se generalizaba y los libros impresos sustituían a los manuscritos en muchas situaciones (aunque no todas). Entre 1500 y 1600 se publicaron unas cuarenta versiones claramente diferentes de los *Elementos*; algunas se imprimieron varias veces y así, de promedio, aparecía una nueva impresión cada año. La mayoría eran en latín, pero Simon Grynäus editó el texto griego y lo publicó en Basilea en 1533, a partir de manuscritos de Venecia, París y Oxford. La primera versión completa en un idioma vernáculo fue la traducción del matemático italiano Niccolò Tartaglia, impresa en 1543. A finales de ese siglo, los *Elementos*, o fragmentos de ellos, se habían publicado ya en alemán, francés, español, inglés y árabe. No parece que ningún otro texto, excepto la Biblia, pasara por las imprentas con más frecuencia que este, una tendencia que se mantendría durante dos siglos más.

Ratdolt regresó a su Augsburgo natal tras diez brillantes años en Venecia, y siguió imprimiendo durante cuarenta años más. Se centró en libros litúrgicos, aunque continuó trabajando asimismo en textos científicos e históricos. No volvió a emplear su novedoso sistema para imprimir diagramas geométricos y, aunque reimprimió algunos de sus libros venecianos, los *Elementos* no estaban entre ellos.

Erhard Ratdolt murió en marzo de 1528, rico y respetado, a la edad de ochenta y un años. Un homenaje escrito por un colega impresor veneciano en 1482, el año de los *Elementos*, podría servir como epitafio:

> Las siete artes, capacidades concedidas por el poder divino, han sido conferidas con generosidad a este alemán de Augsburgo, Erhard Ratdolt, quien no tiene parangón como maestro en el arte de componer tipos e imprimir libros. Que disfrute pues de su fama, siempre con el favor de las parcas. Muchos lectores satisfechos podrán unirse a este deseo.

Marget Seymer de su puño y letra

La posesión de los *Elementos*

> Una inscripción manuscrita en una edición impresa de los *Elementos* de Euclides, de 1543, actualmente en la Biblioteca Nacional de Gales: «Marget Seymer de su puño y letra» (*Marget Seymer her hand*).

Al llevar a imprenta los *Elementos*, estos se dieron a conocer de forma masiva y se convirtieron en un objeto que la gente podía poseer como nunca antes había sucedido. Las ediciones impresas presentaban muchas variaciones, reflejo no solo de las diversas versiones medievales del texto, sino también de los nuevos intereses del mundo renacentista y los imperativos comerciales de impresores y editores.

Por un lado, estaba el gran autor Euclides, que tenía que editarse y traducirse con reverencia y respeto. Involucrarse en esta tradición como editor o comentarista implicaba mostrar las credenciales propias como erudito, y el resultado tendía a ser un libro grande y caro destinado a bibliotecas privadas o institucionales, bien provistas de espacio y dinero.

Pero, por otro lado, había asimismo versiones de los *Elementos* para bolsillos más humildes. En muchas universidades se exigía a los alumnos leer los primeros seis libros del texto y a veces también los libros XI y XII, es decir, la geometría del plano, la teoría de las proporciones y la geometría del espacio más básica. La aritmética o teoría de números que constituía los libros VII a IX se dejaba de lado, así como también la delicada teoría de proporciones del libro X y la compleja discusión de los sólidos regulares de los libros XIII a XV. Así pues, se publicaron versiones impresas destinadas a cubrir estas necesidades específicas, con solo los ocho libros de lectura obligatoria y, en general, en un formato más pequeño, fácil de transportar y más barato, tanto a la hora de imprimirlo como en el momento de comprarlo.

Había Euclides aún más reducidos. El erudito y maestro Pedro Ramo (Pierre de la Ramée), en París, contribuyó bastante a propagar la convicción, también difundida por otros impresores y editores de los primeros años, de que las demostraciones de los *Elementos* no eran obra de Euclides. Como parecía evidente que las demostraciones de muchas versiones latinas impresas no se remontaban más allá de Campano en el siglo XIII, y como no había pruebas directas, a favor o en contra, de la autoría euclidiana de las demostraciones en los manuscritos griegos de los *Elementos*, la hipótesis cuajó con facilidad y Ramo y otros pudieron hallar cómodamente un buen mercado para ediciones de los *Elementos* que solo contenían los enunciados de cada proposición geométrica y dejaban las demostraciones y construcciones al libre albedrío de cada profesor o a la iniciativa del lector individual; en definitiva, un manual para el geómetra autodidacta.

Otro mundo eran las ediciones de los *Elementos* en las diversas lenguas vernáculas de Europa, que empezaron a aparecer a mediados del siglo XVI. Algunas de estas, como mínimo, parecen haber estado destinadas al mercader viajado y con ansias de ascenso social, que anhelaba mostrar sofisticación cultural pero no tanto como para jactarse de una buena competencia en griego o latín (competencia tal vez inexistente). Todo esto llevaba a grandes formatos, precios elevados, abundantes notas y la inclusión de instruidos prefacios y anexos[2].

La traducción inglesa de Henry Billingsley, de 1570, seguía esta línea. Estaba basada en el texto griego impreso pero incluía comentarios y observaciones seleccionados de varias ediciones latinas: «diversas adiciones, escolios, anotaciones y variaciones […] recopiladas de los más famosos y distinguidos matemáticos, tanto antiguos como de nuestra era». Incluía un largo prefacio de la mano del célebre matemático isabelino John Dee, así como también sus observaciones en varios puntos del texto y una tabla plegada en la que enumeraba las diferentes ramas de la matemática y mostraba sus relaciones. El volumen llegaba a las mil páginas, en comparación con las cuarenta y cinco de los *Elementos* condensados de Ramo.

De este modo, en el mundo del libro impreso, los *Elementos* de Euclides estaban pasando de ser un único texto a ser una amplia tradición de textos diferentes, destinados a emplearse de maneras diversas por gente muy diversa. Es realmente tentador preguntarse cómo debían de emplearse, quién compraba estos libros y qué hacían con los textos de Euclides una vez ya estaban en sus manos.

En una primera aproximación, la respuesta es sencilla: garabateaban sobre ellos. Parece que había una longeva convención de que los lectores de libros matemáticos tenían que escribir en ellos; en la Baja Edad Media, incluso los propietarios del invaluable manuscrito de Esteban escribían en él. Las ediciones impresas también ofrecían generosos márgenes y, además, una menor sensación de estar mutilando algo único; asimismo, en el mundo impreso ya no existía la posibilidad de que las notas al margen pasaran por accidente a las copias subsiguientes del texto. Las escuelas y universidades parecen haber incentivado la lectura de las matemáticas lápiz en mano; el resultado es que unos tres cuartos de los libros impresos de matemáticas que se han conservado de los siglos XVI y XVII llevan anotaciones de sus lectores.

En consecuencia, disponemos de bastante información sobre la manera en que la gente leía a Euclides. Y lo leían selectivamente, escogiendo unas cuantas proposiciones aquí y allá, a veces marcando la página para indicar las partes en las que se habían esforzado o señalando lo mismo en el índice. Sin duda, los maestros dirigían parte de este proceso, pero también debía de haber una parte más personal, además de que hay pocos testimonios de que las anotaciones y selecciones pasaran de una persona a otra. Por ejemplo, dos copias conservadas de la misma edición de los *Elementos* de finales del siglo XVII estaban señaladas para su uso en universidades inglesas con una selección de los primeros seis libros cada una, pero los dos conjuntos de selecciones apenas coinciden más de lo que uno podría esperar del mero azar.

En las partes que decidían estudiar, los lectores se peleaban con el texto impreso, a veces con agresividad, acerca de lo que debería decir. Enmendaban y añadían; identificaban y arreglaban etiquetas erróneas en los diagramas o líneas ausentes en una demostración. Lo cierto es que algunos autores y editores invitaban a tal cosa, añadiendo en el último momento una lista de errores que habían detectado en el libro mientras se estaba imprimiendo; sin embargo, la mayoría de los lectores iban mucho más allá de estas listas «oficiales» en sus correcciones. Algunos añadían proposiciones enteras, referencias a otros libros o partes de comentarios antiguos y modernos; algunos cotejaban más de una edición de los *Elementos*, copiando apartados o detalles de una en la otra.

Por último, algunos lectores usaban los márgenes de los libros de matemáticas para practicar sus habilidades: hacían cálculos, copiaban diagramas o repetían demostraciones hasta quedar satisfechos con el resultado. Todo ello nos da una imagen muy vívida, una impresión del aprendizaje de las matemáticas como una especie de ensayo y de las matemáticas en sí mismas como un tipo especial de práctica en el mundo renacentista, tal como había sido en la Antigüedad.

¿Quiénes eran estos lectores, correctores, seleccionadores y actores? En la mayoría de los casos, resulta imposible saberlo. Algunos propietarios firmaban sus ejemplares, pero no siempre es posible estar seguros de que la mano de la firma sea también la responsable de las interesantes anotaciones que hay en el libro. E incluso, cuando sí lo estamos, la mayoría de los nombres son solo eso, nombres, casi imposibles de situar en el tiempo, el espacio o la sociedad.

Uno de estos lectores es la Marget Seymer que signó una copia, impresa en París en 1543, del *Elementale geometricum* de Johannes Vögelin, un compendio bastante breve extraído de Euclides y que estuvo en boga durante el siglo XVI. Las mujeres interesadas en Euclides son bastante esquivas en esta época, como en la mayoría, y sería interesantísimo saber más acerca de ella; sin embargo, la historia no nos ha dejado ninguna otra referencia. Podría ser la Marget Seymer, hija de Robert Seymer, casada con Jerom Atwod en All Hallows, Honey Lane, en Londres, el 11 de mayo de 1553 y enterrada cuarenta años más tarde, en 1593. Pero también podría ser que estas dos Marget Seymer no sean la misma persona.

Lo mismo podemos decir de muchos otros propietarios de los *Elementos*. Algunos pueden vincularse con universidades, escuelas o facultades concretas; algunas firmas incluyen la fecha. Algunos lectores ofrecen otras pistas, como un gran exlibris con un escudo de armas. Y otras veces el libro permanece en el mismo lugar, en la biblioteca de una finca o una facultad. No obstante, es mucho más frecuente que los libros cambien de lugar, se pierdan las referencias y se evaporen todas las pistas. En el caso de libros comprados de segunda mano, algunos de los nuevos lectores eliminaron las firmas de los propietarios anteriores, que hubieran ayudado a establecer su trayectoria y cronología; y precisamente la cronología es algo que no siempre es lo que parece. Una tal Sandie Hume señaló en su copia que los *Elementos* de Euclides eran «un hueso muy duro de roer» (*a Very Queen of a Buck*), y June Amelia Hume, suponemos que pariente de la anterior, también firmó y fechó el mismo ejemplar; el libro fue impreso en 1719, pero ella lo firmó más de un siglo después, en 1827.

En la Europa del Renacimiento, Euclides se consolidó con claridad como parte de la cultura. Se convirtió más que nunca (tal como había sido en el mundo antiguo y medieval) en un receptor de comentarios y de compromisos, en el que retahílas de texto decoraban las propias palabras de Euclides. Pero gracias a todo su periplo, algunas de esas anotaciones resultan aún más sugerentes.

Edward Bernard

Minerva en Oxford

En las inacabables estanterías de la Biblioteca Bodleiana de Oxford se halla la que tal vez sea la copia más inusual de los *Elementos*. Está formada a partir de las hojas independientes de cuatro versiones impresas diferentes del texto, en tres idiomas: griego, árabe y latín. Las páginas están repletas de notas al margen hechas en las últimas dos décadas del siglo XVII por los que en esos momentos eran profesores de geometría y astronomía en Oxford. Se pelean con las dificultades textuales, explican los problemas matemáticos y ofrecen equivalentes algebraicos a las proposiciones de geometría o de proporciones.

Este Euclides políglota está encuadernado en dos volúmenes, y pocas veces se abren. Sus complejas notas son difíciles de interpretar y a menudo también de leer. Pero en cualquier caso, es todo un monumento a la gran atención que se empezaba a prestar a los *Elementos* de Euclides en los últimos años del siglo XVII.

La cantidad de diferentes impresiones de los *Elementos* durante los siglos XVII y XVIII es abrumadora, llegando a las trescientas al final de este período. Por más que hubiera ya montones de versiones disponibles, no parece que disminuyera el interés de impresores y editores para llevar Euclides a la imprenta una vez más, traducido, reordenado, simplificado, cortado o embrollado. Cada año, una nueva legión de estudiantes renovaba la demanda, así como la apertura de nuevos mercados por parte de los editores al traducir Euclides a las lenguas vernáculas y cortando, reordenando, anotando y renovando el libro para que fuera atractivo a nuevas capas de la sociedad.

Hacia la segunda mitad del siglo XVII, cualquier entusiasta con dinero podía reunir una colección considerable de Euclides. Robert Hooke, quien, además de ser miembro fundador de la Royal Society de Londres y renombrado experimentador y filósofo natural, era el profesor de geometría en el Gresham College de Londres, tenía treinta y una ediciones diferentes de los *Elementos*, reunidas, al menos en parte, por el mero placer del coleccionismo.

Sin embargo, a pesar de toda la atención que los *Elementos* recibieron por parte de impresores y editores en los dos siglos que habían transcurrido desde Ratdolt, quedaron extrañamente apartados del tipo de erudición textual que recibieron otras obras. Se imprimía una versión tras otra, con poquísima atención a la exactitud textual; los manuscritos griegos conservados rara vez se consultaban, y el texto griego completo solo se imprimió una vez en doscientos años (en 1533) y en una edición mediocre.

Una institución que tenía un interés particular en los textos matemáticos antiguos fue la de las dos cátedras creadas en Oxford en 1619 por sir Henry Savile. Los profesores savilianos (uno de geometría y el otro de astronomía), que disponían de sus propias estancias y una colección especial de libros dentro de la Biblioteca Bodleiana de Oxford, acumularon una cantidad extraordinaria de versiones de los *Elementos*. El propio Savile donó libros impresos y manuscritos, y a mediados del siglo XVII, Oxford era una de las pocas ciudades del mundo que poseía manuscritos de los *Elementos* en griego, árabe y latín.

Los estatutos de Savile para sus dos cátedras intentaban fomentar una restauración de la enseñanza de las matemáticas. También intentaban refutar (o facilitar la refutación) de algunas de las bobadas que él consideraba que se estaban discutiendo en el continente acerca de las matemáticas y sus autores antiguos. Savile (que en una ocasión se declaró locamente enamorado de la geometría) sentía una reverencia por el texto euclidiano que estaba a años luz de las impresiones apresuradas con que lo editaban algunos académicos, y se opuso a la idea de que el libro tenía que ser podado o reordenado para hacerlo digerible al estudiante moderno. Discutiendo sobre una versión abreviada, remarcó que los *Elementos* eran un «cuerpo perfecto» de geometría: puro, resplandeciente y virtuoso, digno de admiración, de estudio y de amor. Quería que sus profesores no se limitaran a enseñar los autores matemáticos antiguos, sino que también se dedicaran a estudiar, editar y publicar sus textos.

Todas estas buenas intenciones quedaron en suspenso durante un tiempo, en parte porque a mediados del siglo XVII Inglaterra estaba más preocupada por la guerra civil que por la edición de autores matemáticos antiguos. No obstante, a finales de siglo, los designios de Savile empezaron a cristalizar con nuevas y eruditas ediciones de algunos textos: obras de astronomía y de la matemática de la música y temas parecidos, a partir de los abundantes manuscritos de Oxford.

En este ambiente aparece Edward Bernard. Nacido en 1638 en los Midlands ingleses, hijo medio de un clérigo y formado en la Merchant's Taylor School de Londres y en el Saint John's College de Oxford, aprendió lenguas clásicas y también hebreo; estaba claro que tenía talento en este campo, pues en su juventud ya dominaba algo de árabe, siríaco y copto. Continuó en el Saint John's como miembro del *college* y luego como supervisor universitario y tesorero de este.

En los primeros años de su estancia en Oxford, Bernard estudió además matemáticas, y al parecer también tenía ciertas aptitudes en esta rama del saber. En 1669, el catedrático de astronomía Christopher Wren lo designó ayudante suyo en Oxford, dado que acababa de ser nombrado supervisor de las obras reales. Cuatro años después, Bernard se convirtió en profesor saviliano de astronomía, ahora ya sí con todas las de la ley.

Enseñó astronomía y matemática antigua, fue elegido miembro de la Royal Society y ejerció de tutor de varios nobles menores. Publicó algunas obras sobre pesos y medidas antiguos, sobre lenguas antiguas y sobre etimología, así como una colección de plegarias. También catalogó los manuscritos en posesión de las bibliotecas inglesas e irlandesas y, de hecho, fue una especie de «cazamanuscritos», pues viajó a Leiden en un par de ocasiones para adquirir ejemplares excepcionales en subastas. Fiel a los designios de Henry Savile, Bernard también editó textos antiguos; estuvo implicado en la elaboración de un ambicioso plan de editar toda la matemática antigua en veintiún volúmenes. De hecho, llegó a iniciar la edición de las obras de Apolonio, pero nunca la terminó, y durante años también se dedicó a una edición de los textos del historiador judío Flavio Josefo. Sin embargo, su verdadero sueño era una nueva edición de Euclides.

Si echamos un vistazo a las pruebas que conservamos del trabajo de Bernard sobre Euclides, nos damos cuenta de por qué fue un hombre que publicó poco y que tendía a no finalizar los proyectos. La idea de Bernard era comparar las ediciones griegas existentes con los manuscritos y corregir las mejores traducciones al latín a partir del texto griego. Además, junto con una versión limpia y exacta del texto, tenía previsto añadir la cantidad más amplia posible de anotaciones y para ello había planeado notas sobre variantes y lecturas alternativas del texto griego, referencias internas para mostrar la dependencia lógica de cada proposición con todas las demás y comentarios explicativos, todo lo cual tenía que extraerse de las primeras ediciones y comentarios impresos (en griego, árabe, persa y latín), a lo que se añadiría información nueva de su propia mano y de sus contemporáneos.

Para ello, Bernard recopiló una colección de copias impresas de los *Elementos* y varios manuscritos, así como libros con notas a mano de otros académicos. En diferentes copias impresas del texto transcribió partes de su retahíla de notas euclidianas y reclutó a su colega, el profesor saviliano de geometría, John Wallis, para que redactara y transcribiera algunas partes. Bernard también estaba interesado en las versiones árabes de los *Elementos*, de las cuales Oxford poseía manuscritos, y pudo aprovechar asimismo una versión impresa, una edición de 1594 de un compendio euclidiano del siglo XIII, atribuido (erróneamente) al famoso matemático Násir al-Din al-Tusí. Encarnaba un total de cuatro siglos de estudio del texto en árabe, era como un depósito de información geométrica e interpretación del texto, y Bernard lo escogió como base para su estudio de los testimonios árabes.

Tal vez era inevitable que un proyecto tan ambicioso chocara con dificultades. Parece que hubo algunos problemas para coordinar los diversos niveles de edición y comentarios, y la colección de Bernard de versiones impresas de los *Elementos* empezó a cargarse con un embrollo considerable de diferentes tipos y estilos de notas. Es más, algunas se contradecían con otras y más de una vez, toda una serie de notas meticulosas tenían que tacharse con la misma meticulosidad.

Tras rellenar los márgenes de (por lo menos) siete copias impresas de los *Elementos* con trabajos preliminares, Bernard se lanzó a la alucinante tarea de recopilarlo todo en un único texto unificado adecuado para una imprenta. Para ello, se hizo con cuatro ejemplares más, a un coste que sin duda debió de ser considerable: copias de la edición griega de 1533, de la edición árabe de 1594, de la edición latina de 1612 y de una edición parcial de 1620 en griego y latín. Sacó todas las páginas de sus encuadernaciones y las ordenó y las volvió a encuadernar juntas, de modo que obtuvo lo que vendría a ser una única copia de los *Elementos* en tres idiomas, con los tres textos más o menos paralelos en páginas adyacentes, dentro de lo posible.

A continuación, se dispuso a anotar este gigantesco Euclides políglota, añadiendo todo lo que había acumulado hasta el momento: correcciones textuales y lecturas alternativas de los manuscritos, referencias internas, inacabables modificaciones del texto, del uso de mayúsculas, de la puntuación e incluso de los encabezamientos y, por supuesto, comentarios. No pasó mucho tiempo hasta que las nuevas copias se convirtieron en un nuevo barullo, con cambios de parecer y tachaduras varias; además, muchas partes del texto nunca llegaron a recibir algunas anotaciones.

A partir de aquí, el relato es algo desmoralizador. Los amigos de Bernard intentaron disuadirlo varias veces de continuar con un proyecto que había perdido todo contacto, si no con el sentido común, por lo menos con la realidad del negocio editorial. Uno de ellos le escribió que no había ni editor ni mercado para tal edición, pues la mayoría de los matemáticos no sabían griego: «En esta época degenerada los hombres no aprenden griego ni compran matemáticas para un gasto tan grande de tiempo y de estudio y también de dinero». Aunque pudiera persuadir a algún impresor de editar el libro, Bernard tendría que pagar todas las facturas cuando no se vendiera.

No obstante, Bernard hizo imprimir varios apartados del texto como prueba, incluyendo grandes grupos de diagramas. Ahora bien, al hacerlo solo reforzó el argumento de que los costes de la edición serían, con toda probabilidad, astronómicos. Sus amigos le interpelaron con más franqueza, instándole a «dejar de lado cualquier idea de imprimir tu Euclides».

Al final, no halló ningún impresor dispuesto a tal empresa. Siempre delicado de salud, Bernard murió de desnutrición y tuberculosis en enero de 1697. Su gran edición de Euclides no era más que un montón de notas desordenadas en los márgenes de libros impresos. Fue enterrado en la capilla del Saint John's College y la Biblioteca Bodleiana pagó a su viuda 340 libras por una selección de sus libros y manuscritos; trescientos años después, siguen en la biblioteca, unos manuscritos sin publicar y tan imposibles de publicar como entonces.

Sin embargo, este relato admonitorio tiene una coda interesante. Seis años antes de su muerte, Bernard fue sustituido como profesor de astronomía por un hombre veinte años más joven. David Gregory, formado en Escocia y antiguo profesor de matemáticas en Edimburgo, era un maestro agradable y enérgico; quizá no era un matemático brillante, pero sí un comunicador y autor competente. Trabajó satisfactoriamente con Edmond Halley en una edición de Apolonio, algo que Bernard había sido incapaz de completar. Más adelante (algo que quizá era inevitable), su atención se centró en Euclides.

En 1698, personajes prominentes de la universidad escribieron al famoso editor de Londres Jacob Tonson dando apoyo a una propuesta de imprimir las obras de Euclides en griego y prometiendo que Gregory «se encargaría de la geometría y el razonamiento». El texto griego sería revisado por un tal John Hudson, con apoyo adicional de John Wallis, quien seguía siendo profesor de geometría. Tonson ya tenía experiencia en la impresión de ediciones clásicas, y además era el fundador del famoso Kit-Kat Club[3].

En la carta no se hacía ninguna referencia a Bernard, y parece que la escala del proyecto era bastante menor que la del ambicioso plan de aquel. Sin embargo, Tonson no se mostró demasiado entusiasmado y el gran proyecto euclidiano languideció de nuevo. Pasaron cinco años más hasta que, finalmente, la Universidad de Oxford publicó las obras completas de Euclides en griego y en latín. Gregory es atribuido como editor, y en el prefacio menciona su deuda con los manuscritos de Savile y la Biblioteca Bodleiana y con los libros de Edward Bernard. En esta edición de Gregory se pueden observar algunas de las correcciones específicas de Bernard, si bien el primero nunca reconoció el enorme esfuerzo del segundo para que el texto llegara a publicarse.

Los *Elementos* de Euclides habían pasado por muchísimas manos y habían hecho un largo recorrido, tan largo como el de cualquier texto, desde la Antigüedad hasta el Renacimiento. Unos dos milenios después de su redacción, y más de dos siglos después de su primera aparición impresa (y tras una multitud de versiones impresas más o menos caprichosas), había llegado a buen puerto y por fin podía descansar de sus tribulaciones, con una edición que podía afirmar ser la definitiva, al menos por el momento.

Atenea en Oxford.

Así y todo, buena parte de lo que Bernard había intentado se perdió al convertir la edición en algo que podía ser realmente impreso y vendido. Esta edición no incorporaba el árabe, no había extensas explicaciones, no había referencias a otros autores, no tenía lecturas alternativas ni discusiones sobre lo que contenían los manuscritos. El Euclides de Gregory era, en muchos aspectos, una edición reducida, con pocos o nulos comentarios e incluso una cierta poda del propio texto.

Uno de sus escasos ornamentos era una ilustración en la portada que mostraba a Minerva con su escudo, casco y lanza sentada ante un panorama de Oxford (se la muestra recostada en lo que era, y es, la Broad Street, ajena al ajetreo cotidiano). En el fondo se pueden ver el antiguo edificio del Museo Ashmoleano y el Teatro Sheldoniano donde se imprimió el libro y, como corresponde, un ala de la Biblioteca Bodleiana que alberga las estancias y los libros savilianos, donde Edward Bernard se había esforzado tanto.

Interludio

Un momento. Detengámonos unos instantes. Todos estos encuentros con Euclides solo nos cuentan una de las muchas historias posibles sobre los *Elementos*; una historia en la que los *Elementos* son una obra de la literatura griega, que viajó tal como lo hizo la literatura griega y que se transmitió y se tradujo del mismo modo que Homero y Hesíodo, que Esquilo y Sófocles. Es una historia en la que el texto de Euclides es como los demás: hermoso, sin duda, pero con la tendencia habitual a ensuciarse, embrollarse y corromperse por el contacto con los seres humanos. En definitiva, es una historia en la que Euclides es un autor como cualquier otro.

Pero hay mucho más. Muchas personas han leído los *Elementos* no solo por el puro placer de hacerlo, sino por lo que les podía aportar, como fuente de sabiduría o como estímulo para una transformación personal. Un relato diferente haría de los *Elementos* una obra de filosofía y de Euclides un sabio. Mostraría a gente leyendo el libro porque los acerca a verdades eternas.

Volvamos, pues, a Grecia para explicar una historia diferente.

II

EL SABIO

Platón

El filósofo y el esclavo

Una noche de luna en el Mediterráneo, quizá sea el año 415 a. C. En el camino de Atenas a Mégara, los transeúntes ven una figura misteriosa ataviada con ropajes femeninos: una larga túnica, un manto coloreado y un velo sobre la cabeza. Incluso a la luz de la luna se puede apreciar que no es ninguna mujer; los más informados reconocen a Euclides. Su ciudad está en guerra con Atenas, prohibida para los megarenses. Sin embargo, asume el riesgo, ansioso por escuchar las enseñanzas de Sócrates y participar en sus debates; así, disfrazado, se escabulle en la ciudad una noche tras otra.

La figura velada es otra leyenda euclidiana, si bien es una de las más seductoras; quizá la más romántica, que empezó a asociarse con él durante la Edad Media. Se basa en una confusión de identidades entre el geómetra y un filósofo que tenía su mismo nombre. Por desgracia, el Euclides geómetra vivió mucho más tarde como para haber conocido a Sócrates.

Si regresamos a los hechos históricos, el gran filósofo ateniense Platón (el seguidor y representante más famoso de Sócrates) estaba claramente interesado en la geometría. Hacia el 380 o 370 a. C., en su diálogo titulado *Menón*, presentó una famosa escena en la que Sócrates explica a un obediente esclavo un fragmento de razonamiento geométrico.

> —Dime, muchacho, ¿sabes que un cuadrado es una figura que tiene esta forma?
>
> —Yo sí.
>
> —¿Tiene la figura del cuadrado sus cuatro líneas todas iguales?
>
> —Perfectamente.
>
> —¿No tienen también iguales estas trazadas por el medio?
>
> —Sí.
>
> —¿Y una figura como esta podría ser más grande o más pequeña?

> —Desde luego.
>
> —Si este lado fuera de dos pies y este otro también de dos, ¿cuántos pies tendría el todo?
>
> […]
>
> —Cuatro, Sócrates.
>
> —¿Y podría haber otra figura cuya superficie fuese el doble, pero del mismo tipo, con todos sus lados iguales como esta?
>
> —Sí.
>
> —¿Cuántos pies tendrá?
>
> —Ocho.
>
> —Vamos, trata de decirme cuál será la longitud de cada lado de esa figura. Esta mide dos pies: ¿cuál será el lado de la otra, que es el doble de tamaño?

Trazan un diagrama y Sócrates plantea una serie de cuestiones: «dime, …», «¿podría haber…?», «¿tiene la figura…?», «¿cuál será, …?». El diagrama muestra un cuadrado, con una línea que lo atraviesa diagonalmente; siguiendo las indicaciones del filósofo, el esclavo muestra a Sócrates cómo dibujar dos cuadrados, uno con un área doble del otro. El truco es emplear la diagonal del pequeño como lado del más grande.

En el contexto del diálogo, el objetivo es discutir acerca de dónde procede el conocimiento. Sócrates no explica nada al esclavo, solo le plantea preguntas, de modo que el conocimiento que manifiesta el esclavo, según él, tenía que ser un recuerdo de una vida anterior, y «el alma, pues, siendo inmortal y habiendo nacido muchas veces, y visto efectivamente todas las cosas […], no hay nada que no haya aprendido». La escena es totalmente imaginaria (nadie enseñaba geometría a los esclavos), pero es el mejor y casi el único testimonio que tenemos de la manera en que se discutía de geometría en la antigua Grecia. La geometría era una representación en directo mientras se trazaban diagramas y se deducían cosas sobre ellos; era un proceso en el que se trabajaba una demostración diagrama en mano, intentando convencer, explicar o descubrir. La manera de filosofar de Platón era muy parecida a la de Sócrates: una conversación para llegar hasta la verdad.

En otro diálogo, una década o dos más tarde, Platón nos ofrece otro fragmento geométrico igualmente famoso. Utiliza los sólidos regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) como ladrillos básicos del universo y afirma que son las formas de los elementos fundamentales (tierra, aire, fuego y agua) y que las propiedades de los sólidos regulares podrían ayudar a explicar las propiedades e interacciones de esos elementos.

Platón y sus estudiantes.

Qué significan estos fragmentos, y otros parecidos, y cómo deben interpretarse, ha sido motivo de debate durante dos mil quinientos años. En cualquier caso, está claro que Platón pensaba que la geometría era importante y que, al igual que otros filósofos atenienses como Aristóteles, estaba dispuesto a emplearla como fuente de ideas y ejemplos en su filosofía.

Además, casi con toda seguridad, el círculo de Platón en Atenas contaba con geómetras competentes; de hecho, es posible que fueran la fuente de información para la geometría que incluye en sus obras. Eudoxo de Cnido, de una generación posterior a la de Platón, trabajó en la teoría de proporciones. Platón titula uno de sus diálogos con el nombre de Teeteto, de una generación anterior, quien puede que fuera el primero en descubrir construcciones geométricas de algunos sólidos regulares (es decir, cómo construir esos sólidos a partir de círculos, rectas y triángulos) y tal vez también la demostración de que solo hay cinco. También es posible que hubiera estudiado las diversas maneras en que dos longitudes pueden tener una proporción entre ellas que no se puede expresar con números enteros, como por ejemplo el lado y la diagonal de un cuadrado. Todo esto formó parte más adelante del material que Euclides recopilaría en los *Elementos*.

Dicho esto, es muy posible que nos equivocáramos imaginando a Platón haciendo algún tipo de investigación matemática o estando muy interesado en el tema. De hecho, tanto él como Sócrates tenían sentimientos encontrados acerca de la matemática teórica. Según uno de sus contemporáneos, Jenofonte, Sócrates:

> desaprobaba el seguir aprendiendo geometría hasta llegar a las figuras incomprensibles, pues decía que no veía para qué podía servir. Sin embargo, él no las ignoraba, pero decía que tales estudios consumían la vida entera de un hombre, impidiéndole aprender otras muchas enseñanzas útiles.

Platón expresaba también sus reservas acerca de la manera en que los geómetras solían estudiar su campo; tal como lo expresó en *La República*:

> su lenguaje es sumamente ridículo y forzado, pues hablan como si estuvieran obrando y como si todas sus explicaciones las hicieran con miras a la práctica, y emplean toda clase de términos tan pomposos como «cuadrar», «aplicar» y «adicionar»; sin embargo, toda esta disciplina es, según yo creo, de las que se cultivan con miras al conocimiento.

Dicho de otro modo, la geometría era útil, pero solo si se modificaba para alejar al estudiante de los diagramas y sus manipulaciones y llevarlo a lo puramente intelectual.

En el mundo de la leyenda, sin embargo, el interés de Platón por la geometría tendió a exagerarse un poco, otorgándole un papel creador de la tradición geométrica, como si fuera una especie de director de estudios de matemáticas en su Academia de Atenas y que planteaba problemas para que los matemáticos los estudiaran ávidamente. Entre las consecuencias de esta creencia se halla la fábula, muy posterior, de que en la puerta de la Academia había una inscripción que decía «Que no entre nadie que no sepa geometría». El primer testimonio que tenemos de esta supuesta inscripción es de mediados del siglo IV d. C., más de setecientos años después de Platón, lo que lo sitúa con claridad en la categoría de leyenda. En versiones árabes posteriores, la inscripción se vuelve aún más explícita: «Que no entre nadie en nuestras escuelas que no esté versado en los *Elementos* de Euclides».

Una vez que la matemática del *Menón*, la construcción de los cinco sólidos regulares y otros resultados pasaron a formar parte de los *Elementos*, la tentación de asociar a Euclides con Platón resultó irresistible. Los cinco sólidos recibieron el apelativo de *platónicos*, su descubrimiento se asoció (a veces) a Pitágoras y el hecho de que Euclides los colocara al final de sus *Elementos* se consideró una especie de homenaje a la filosofía platónica. Supuestamente, Euclides «pertenecía al método persuasivo de Platón y se sentía a gusto con esta filosofía». Con el tiempo, surgió la leyenda más pintoresca sobre él:

> Los atenienses, decía, habían dado un decreto condenando a muerte a todo megariano que se encontrase dentro de las murallas de Atenas, tal era el odio que profesaban a aquella nación vecina. Euclides, que era de Mégara, y que antes de este decreto habitaba en Atenas, donde asistía a las lecciones de Sócrates, no se intimidó por esta prohibición de los atenienses. Por la tarde, cuando iba cayendo la luz, salía de su casa, vestido con larga túnica de mujer, envuelto en un manto de diferentes colores y cubierta la cabeza con un velo, y con este traje iba de Mégara a Atenas, para poder, al menos durante una parte de la noche, escuchar las lecciones de Sócrates y gozar de su conversación. En cuanto despuntaba el día, marchaba y recorría para volver a su casa más de una milla con el mismo disfraz.

Tal como hemos dicho, la historia sin duda se refiere a Euclides de Mégara, un filósofo y estudiante de Sócrates nacido hacia el 440 o 430 a. C. Vivió en una ciudad diferente y era de una generación diferente que el geómetra Euclides de Alejandría. Pero por un accidente, que no parece tan accidental, se acabó aceptando que los dos hombres eran uno mismo, que Euclides el geómetra era también un filósofo, un miembro del grupo de Platón, y que una vez se disfrazó de mujer para entrar en Atenas de noche. Los manuscritos medievales posteriores y las ediciones impresas hasta finales del siglo XVI repitieron esta identificación; un ejemplo típico, entre cientos, es la primera traducción italiana de los *Elementos*, que en 1543 atribuían su composición a «Euclide Megarense Philosopho».

Si Euclides era platónico, nunca lo dijo; si le gustaba usar la geometría para la docencia o la filosofía, no hay ninguna prueba de ello. Es posible que nunca estuviera en Atenas, pero el silencio de los *Elementos* sobre cualquier cosa que no fuera la propia geometría dejó que sus lectores dieran rienda suelta a la imaginación y asignaran a Euclides inclinaciones filosóficas, situaciones históricas y detalles biográficos inventados. En cualquier caso, la geometrización de Platón y la filosofización de Euclides tuvieron consecuencias relevantes para la interpretación y la lectura de los *Elementos*.

La convicción de que Euclides fue un filósofo platónico autorizó a estudiantes posteriores a leer su obra como una expresión de las creencias platónicas en un mundo de formas ideales, perfectas e inmutables, un reino lleno de formas geométricas que ningún ser humano podría dibujar nunca, pero que cualquier humano, con la formación adecuada, podría concebir. Leer los *Elementos* de esta manera, como manifestación de una idea filosófica y ayuda al estudio de la filosofía se iba a convertir en una tradición de dos mil años.

Proclo Diádoco

Minerva en Atenas

Una finca próspera y frondosa cerca de Atenas en 450 d. C., más o menos. Mientras se pasea por sus jardines, se puede atisbar la Acrópolis en la lejanía.

Aquí vive Proclo, director de la escuela platónica. Atractivo y carismático, lleva una vida de disciplina casi absoluta y trabajo intelectual. Se levanta por la mañana para orar al Sol; a veces imparte cinco o más clases en un día, además de escribir unas setecientas líneas de prosa. Visita a otros filósofos y por las tardes enseña. Su saber es enciclopédico y su producción literaria, enorme.

En el ocaso, y también a mediodía, se arrodilla una vez más ante el Sol, y tiene una cierta reputación de adoración insomne de los dioses por la noche. Cada mes ayuna, se abstiene de comer carne, vive en comunión constante con los dioses en sus plegarias y en sus sueños; conoce los rituales caldeos y egipcios y celebra la luna nueva con una solemnidad especial. Se dice que sus plegarias sanan a los enfermos y provocan cambios meteorológicos. Compone himnos:

> Escúchame, gran diosa, y vierte sin límite tu pura luz en mi ensombrecida mente; […] Que esta luz sagrada, reina protectora, que luce eterna en tu rostro sereno, inspire mi alma vagabunda con tu fuego imparable y sagrado; y de tus mitos, místicos y divinos, concede todos los poderes con los que luce la sagrada luz.

Una de las sorpresas del relato euclidiano es que la primera respuesta más o menos sustanciosa a los *Elementos* de Euclides que ha llegado hasta nosotros fue escrita por una de las personas que nos parecería menos probable que se involucrara con el texto. Proclo era el director de la recuperada Academia platónica en Atenas durante el Bajo Imperio, y enseñaba filosofía a jóvenes, tanto hombres como mujeres, en la gran finca privada destinada a tal efecto.

No es evidente que este lugar fuera propicio a un compromiso sólido con las matemáticas, pero lo cierto es que los filósofos de este círculo consideraban su trabajo como la correcta interpretación de Platón y se dedicaban a armonizar sus textos con lo que había de válido en muchos otros autores, desde Aristóteles hasta los oráculos caldeos. Se tomaban muy en serio las implicaciones que tenían las obras de Platón para las matemáticas y, de hecho, aceptaron la creencia de que los *Elementos* de Euclides eran un recurso filosófico importante.

Para Proclo había tres niveles de realidad: el Uno, aprehensible mediante el intelecto; el mundo físico, acerca del cual los seres humanos pueden aprender cosas por medio de los sentidos, si bien de modo imperfecto; y, entre medio, los objetos matemáticos, que se pueden considerar desde ambas perspectivas, pues son eternos e inmutables y las personas pueden razonar sobre ellos pero comparten características con los objetos físicos, como forma y tamaño. Esta evolución de las ideas de Platón (y hay mucho más en la metafísica de Proclo de este estilo) implica que la matemática era crucial para la vida del filósofo. Podía afilar el intelecto con la práctica del razonamiento; también podía preparar y acostumbrar la mente a la contemplación de lo eterno y de lo no físico. A un nivel más práctico, podía ayudar a estudiar los objetos materiales, como hacen la física o la astronomía, campos en los que la matemática permite un razonamiento exacto sobre medidas y movimientos. Y también podía ofrecer un modelo de razonamiento válido aplicable tanto a la física como a la teología; Proclo escribió unos *Elementos de teología* y unos *Elementos de física*, cuyos estilos de razonamiento derivan de los de la geometría.

Proclo era particular en la atención que prestaba a la geometría entre todas las ramas de la matemática. Tal como él mismo indica, a diferencia de los números, los objetos geométricos comparten una serie de propiedades como longitud, tamaño y forma con los objetos físicos, lo que refuerza el vínculo y la analogía que presentan con el mundo material y los hace más útiles en ciencias como la física, además de ser una suerte de «puente» más transitable para la mente en su viaje del mundo físico al mundo eterno. Las enseñanzas de Proclo incluían lecciones regulares sobre temas geométricos, y de estas clases nacen sus comentarios escritos al primer libro de los *Elementos*. Proclo no fue el primero en escribir un comentario sobre una parte del libro de Euclides, pero el suyo es el más antiguo que ha sobrevivido, completo y en griego.

Se ha calificado como el documento filosófico más importante de su época, y lo cierto es que contiene una gran cantidad de información en pocas palabras. Dos prefacios establecen la importancia de la matemática en general y de la geometría en particular para el estudiante de filosofía. Parece claro que Proclo, como maestro, estaba acostumbrado a arrastrar a los alumnos reticentes a través de una «exigencia geométrica» en la Academia y a oír quejas del estilo de «He venido aquí a estudiar la gran jerarquía de las cosas y ¿ahora quieres que me ponga a dibujar triángulos?». Proclo se deshace con rapidez de varias objeciones evidentes, como la aparente falta de relevancia de algunos resultados geométricos o la poca importancia de las matemáticas en la vida cotidiana.

Proclo también hace un repaso a la historia de la geometría. Disponía de fuentes que no han sobrevivido hasta la actualidad, pero también tenía un objetivo en mente; su punto de vista era que la corriente principal del pensamiento griego era el platonismo y así, decretó que Euclides había sido platónico. Proclo afirma que Euclides era la culminación de una larga lista de geómetras que escribieron *Elementos* de geometría y que sistematizó todas sus obras, las recopiló y las ordenó, todo bajo una clara inspiración platónica y colocando los sólidos platónicos al final de su libro.

Por último, Proclo trabajó en las definiciones y resultados del libro I de los *Elementos*. En estos momentos apenas ha transcurrido un siglo desde Teón, y Proclo pertenecía a la misma tradición filosófica que la hija de aquel, Hipatia, de modo que puede que sea un modelo de exposición parecido al del editor de Euclides. Era detallado, meticuloso y se preguntaba cosas como «¿Podría refutarse esta demostración colocando las líneas y puntos en una configuración particular?», «¿Hay suposiciones no especificadas?», «¿Faltan pasos en la argumentación?», «¿Puede separarse la proposición en varios casos independientes, con demostraciones ligeramente diferentes?». Esta parte del libro, que es la principal, implica una tarea ardua, y como formación para el razonamiento adopta el enfoque de una práctica repetitiva y tediosa. Pero el estudiante que avanza prestando atención sin duda tendría la oportunidad de conseguir una buena habilidad en el tipo de pensamiento matemático que el libro quería transmitir, así como de refinar la imaginación geométrica y la rapidez y la flexibilidad mentales.

Para explicar el modelo geométrico de razonamiento, Proclo también ofrece una discusión esquemática de cómo se estructura una proposición geométrica. Tal como él lo concebía, había seis partes: enunciado, exposición, definición del objetivo, construcción, demostración y conclusión. Era un esquema pulcro, bastante más que el de los propios *Elementos*, donde muchas veces la parte de construcción está ausente, como también la de exposición y la definición del objetivo (en otros textos matemáticos antiguos, las partes de Proclo de una proposición apenas pueden identificarse). Un sistema como este, que centraba la mente de los estudiantes en la estructura de una demostración y en el método geométrico, podía trasladarse a la física o a la teología o bien tomarse como modelo de razonamiento en general. Con su método característico, Proclo muestra cómo compartimentar la primera proposición de Euclides en sus partes, pero deja a los estudiantes como ejercicio que lo hagan con las otras cuarenta y siete proposiciones del libro I.

Escribir unos comentarios de este tipo afectó claramente a los *Elementos* de Euclides. Y lo hizo de la forma más evidente, pues los comentarios de Proclo tuvieron una larga vida y generaciones posteriores incorporaron fragmentos de ellos en los márgenes de los *Elementos*, donde se transmitieron junto con el texto y, en algunos casos, se añadieron al propio texto por error, como ya hemos visto que sucedía a menudo.

Sin embargo, también afectó a la obra de Euclides de un modo más sutil, pues modificó de manera permanente su lectura. Proclo inauguró una larga tradición de leer los *Elementos* como un método, un tratado de lógica, un modo de razonar. Para él, su validez como forma de razonamiento era una consecuencia del lugar que ocupaban los objetos geométricos en su metafísica, pero a largo plazo, la gente encontró maneras de dejar de lado esa metafísica y mantener el punto de vista de Proclo de la geometría como afiladora de las capacidades mentales y formadora de un intelecto que debe centrarse en cosas elevadas. En el fondo, resulta irónico, puesto que, tal como descubrirán muchos lectores de Euclides, el texto no está a la altura en la que Proclo lo había situado. Era realmente complicado hacer que más de un puñado de proposiciones del libro I de los *Elementos* se adaptaran al ordenado esquema en partes de una demostración, y cuanto más avanza el libro, peor. En algunos casos, las demostraciones de Euclides no tienen nada de ordenado; además, los *Elementos* contienen saltos lógicos y, como ya indicó Proclo, suposiciones no especificadas, como por ejemplo que dos rectas no pueden encerrar un área. El forcejeo para arreglar estos aspectos (es decir, hacer de los *Elementos* lo que Proclo creía que eran y debían ser) se convertiría en uno de los campos de investigación más fructíferos de la geometría euclidiana durante varios siglos.

Hroswitha de Gandersheim

La Sabiduría y sus hijas

SABIDURÍA: Oh, emperador, si deseas saber las edades de mis hijas, helas aquí: Caridad ha completado un número deficiente parmente par de años; Esperanza un número también deficiente, pero parmente impar; y Fe un número abundante imparmente par.

ADRIANO: Con tal respuesta me quedo sin saber lo que te he pedido.

SABIDURÍA: No es sorprendente, pues con este tipo de definición se pueden incluir muchos números, no solo uno.

ADRIANO: Explícate con más claridad, pues mi mente no puede aprehenderlo.

SABIDURÍA: Caridad ha completado dos olimpiadas, Esperanza, dos lustros, y Fe, tres olimpiadas.

ADRIANO: ¿Y por qué ocho (que son dos olimpiadas) y diez (que son dos lustros) se llaman *deficientes*? ¿O por qué doce (que son tres olimpiadas) se llama *abundante*?

SABIDURÍA: Porque un número se llama *deficiente* si sus factores, sumados, dan una suma menor que el número del cual son factores. Como el 8, pues la mitad de 8 es 4, su cuarto es 2 y su octavo es 1; sumados, dan 7. Lo mismo sucede con el 10, su mitad es 5, su quinto es 2 y su décimo es 1; sumados hacen un total de 8. En cambio, un número se llama *abundante* cuando sus factores, sumados, dan un total superior al número. Como el 12, cuya mitad es 6, su tercio es 4, su cuarto es 3, su sexto es 2 y su doceavo es 1; la suma de todos estos es 16. Pero no debo pasar por alto el principio de que entre los extremos díscolos hay un punto medio armonioso; un número se denomina *perfecto* si no está ni por encima ni por debajo de la suma de sus factores. Así es el 6, cuyos factores (3, 2 y 1) suman justamente 6. Por la misma razón reciben el nombre de *perfectos* el 28, el 496 y el 8128.

Los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* se ocupan de los números: pares e impares, primos y compuestos, perfectos e imperfectos. En este campo, como en la mayoría de las partes de la matemática que trató, Euclides ofrece una imagen de una tradición que estaba bien viva y era muy activa en su época, así como también antes y después. Y en este tema en concreto, el texto de Euclides es la única imagen que nos ha llegado de ese período. El siguiente tratado completo conservado de teoría de números es el de Nicómaco de Gerasa, en Siria, que vivió hacia el año 100 d. C. (uno de los pocos autores conocidos que trabajó en teoría de números durante este intervalo de cuatrocientos años fue Hipsicles, cuya obra geométrica se convirtió en el libro XIV de los *Elementos*). El libro de Nicómaco era un manual sin demostraciones, un resumen de resultados conocidos, seguramente destinado a la enseñanza de los principiantes.

El estadista y traductor romano Boecio elaboró una versión, más o menos libre y en latín, alrededor del año 500 y amplió el texto, al que añadió numerosos ejemplos. En esta forma, con el nombre de *De institutione arithmetica*, la teoría de números se difundió y se estudió durante toda la Edad Media. Y de esta manera acabó en boca de la Sabiduría a finales del siglo X, o Sapientia, en el original en latín, un personaje de una obra de teatro del mismo nombre, un sangriento relato de martirio y redención. La Sabiduría y sus tres hijas fueron llevadas ante el emperador romano acusadas de hacer proselitismo cristiano (dicho sea de paso, Adriano está mal caracterizado, pues en realidad fue tolerante con el cristianismo). El potencial opresor fracasa una y otra vez, intentando, sin éxito, que las jóvenes se retracten y adoren a los dioses de Roma. Luego trata de torturarlas, pero la intervención divina las protege de todo dolor: siguiendo la tradición de santa Catalina de Alejandría, los diversos instrumentos de tortura fallan, se rompen o se vuelven contra los que los emplean. Al final, las hijas son decapitadas y enterradas y la Sabiduría ora al lado de su tumba hasta morir en un arrebato de éxtasis, en una escena que un crítico ha calificado (tal vez con cierta exageración) de «un rayo de Sófocles que brilla a través de una mente cristiana».

La teoría de números aparece al principio de la obra, cuando la Sabiduría provoca al emperador demorando una respuesta a una pregunta sencilla con una explicación cómicamente inapropiada. Tras haber hecho quedar a Adriano como un bobo con sus números perfectos, deficientes y abundantes, le explica los términos *parmente par*, *imparmente par*, etc. (que se remontan a Euclides vía Nicómaco y Boecio). Para acabar:

ADRIANO: ¡Qué sutil y enmarañada cuestión ha surgido de las edades de estas jóvenes!

SABIDURÍA: En tales cosas debemos alabar la sabiduría del creador supremo y el sorprendente conocimiento del hacedor del mundo. No solo ordenó todas las cosas según su número, su peso y su tamaño al principio de los tiempos cuando creó el mundo a partir de la nada, sino que en todas las edades posteriores, así como en la época de los hombres, permitió que descubriéramos el maravilloso conocimiento de las artes matemáticas.

Adriano no se dejó impresionar, aunque acaso se sintió algo humillado por la muestra de sabiduría de esta mujer.

Sabiduría fue escrita por Hroswitha de Gandersheim, quien tal vez fuera la mujer europea más notable de su generación, pero de la cual apenas sabemos nada excepto por lo que podemos recoger de sus obras y de sus prefacios y dedicatorias. Es probable que naciera en la década de 930 y pasara la mayor parte de su vida como canonesa en la abadía de Gandersheim, una pequeña ciudad a orillas del río Gander, en la Baja Sajonia. Seguramente era de familia noble, pues la admisión en este convento estaba restringida a las hijas de casas nobles. Podemos suponer que entró en este convento hacia los doce años.


Hroswitha en una representación renacentista.

A diferencia de las comunidades que seguían el orden benedictino, por ejemplo, y se basaban en una vida comunitaria centrada en el trabajo y la liturgia, las canonesas como Hroswitha no estaban recluidas de un modo muy estricto ni tampoco tenían prohibido tener propiedades; podían recibir visitas, entrar y salir del convento previo permiso e incluso podían decidir abandonar del todo la vida conventual. La abadesa de Gandersheim era tan poderosa como un señor feudal, con su propia corte, dinero, soldados y un escaño en la dieta imperial. La abadía, fundada a finales del siglo IX, tenía vínculos muy estrechos con la casa ducal sajona, cuya corte fue un centro de cultura y conocimiento durante buena parte del siglo X. En consecuencia, la educación de Hroswitha fue excelente, tal como ella misma explica, primero bajo la guía de una de las religiosas y luego con Gerberga, la abadesa, que también era la sobrina de Otón el Grande, duque de Sajonia y emperador del Sacro Imperio. Aprendió latín (su lengua nativa era el sajón) y leyó los clásicos; estudió filosofía, matemáticas, astronomía y música, y puede que incluso aprendiera griego.

Entre sus escritos hay crónicas y leyendas sacras en verso, así como seis obras de teatro también en verso, de las cuales *Sabiduría* es la última. Fue la primera persona en escribir obras dramáticas en latín desde la Antigüedad, y no habría más hasta los dramas religiosos del siglo XII(los llamados *milagros* y *misterios*). Sus híbridos de hagiografía y teatro fueron provocados en parte por la popularidad de los dramaturgos paganos (sobre todo Terencio), muy usados como material de lectura y aprendizaje; Hroswitha decidió ofrecer una alternativa moralizante y edificante. Compuso sus obras inicialmente en secreto, y más adelante incluso destruyó algunos de sus primeros intentos, pero acabó produciendo un corpus que recibió la admiración de los instruidos críticos a los que se lo mostró en la abadía y en la corte; su producción es también una muestra de la brillantez de la cultura y la biblioteca de Gandersheim. Además de apoyarse en la *Vulgata* y en las leyendas de santos y mártires, las obras de Hroswitha están inspiradas por una gran variedad de autores romanos y cristianos, como Horacio, Ovidio, Estacio, Lucano, Terencio y Virgilio, y también Prudencio, Jerónimo, Alcuino, Boecio, Beda y muchos otros, con alusiones a muchos de ellos.

También escribió sobre la historia de su abadía y de la dinastía otoniana que la había fundado y apoyado; escribió sobre el pecado y la virtud, con el primer tratamiento poético de un pacto con el diablo. Escribió sobre santos y mártires, especialmente mujeres, cuyo potencial de valentía, gracia y energía espiritual retrató con vívidos colores. Tenía un don para presentar de manera impactante el clímax de una historia, así como un especial buen gusto y sentido del humor; un fragmento citado con frecuencia muestra a un tipo lascivo, Dulcitio, abrazando diversos utensilios de cocina creyendo que son mujeres. En sus obras de teatro, introduce con frecuencia incongruencias verbales a modo de ocurrencias: cháchara innecesariamente larga, explicaciones que no explican nada, muestras incoherentes de erudición, etc.

Mostrar su propia erudición era algo importante para Hroswitha, y del mismo modo que en *Sabiduría* aparece el fragmento sobre teoría de números, en otras obras introduce discusiones de teoría musical o de lógica, testimonio de su amplia cultura y concienzuda educación. Le encantaba acuñar neologismos o buscar nuevos significados a los vocablos ya existentes. En sus poesías adapta los metros clásicos (hexámetros y pentámetros) a la pronunciación y las preferencias de rima de su época. Tal como ella misma escribe en un prefacio, Dios «me ha concedido una mente sagaz, pero es una mente improductiva y ociosa si no se cultiva».

Tras su muerte, posiblemente hacia el año 1000, Hroswitha dejó un legado intelectual de lo más notable, además de ser un testimonio único de una mujer instruida y leída en la Alta Edad Media; una instrucción y una lectura que incluía, entre muchas otras cosas, la teoría de números euclidiana en la versión latina de Boecio. No sabemos si sus obras se representaron durante su vida, aunque sin duda sí que fueron leídas fuera de los muros del convento y, con bastante probabilidad, en la corte otoniana. El prestigio literario de su monasterio declinó ya entrado el siglo XI, pero se siguieron copiando numerosos manuscritos de sus obras, lo que sugiere un interés habitual en ella durante la Edad Media.

Hacia 1500, un erudito y poeta alemán descubrió varios manuscritos de las obras de Hroswitha en el monasterio benedictino de San Emerano, en Ratisbona, y los publicó al año siguiente. Desde entonces, Hroswitha ha atraído considerable atención, tanto académica como popular; sus obras se representaron (quizá por primera vez, teniendo en cuenta los testimonios disponibles) a finales del siglo XIX, y entre 1944 y 1999 el Club Hroswitha de Nueva York patrocinó trabajos de investigación sobre sus obras (entre otras actividades bibliófilas). Las representaciones de sus obras continúan, y es posible que mil años después de su muerte, su extraordinaria mente aún no se nos haya mostrado al cien por cien.

Leví ben Gershon

Euclides en hebreo

La ciudad de Orange, en el sur de la actual Francia, famosa por su bien conservado anfiteatro romano. Finales de 1330.

En el barrio judío, un rabino escribe en hebreo. «Nos ha parecido adecuado completar lo que es necesario en el libro de los *Elementos*, pues este libro es de gran provecho para la geometría, de la que ofrece los principios fundamentales».

Los *Elementos* de Euclides no empiezan con proposiciones geométricas, sino con una serie de afirmaciones preliminares, como definiciones y suposiciones básicas. Después de las definiciones, en las que se explicita lo que se quiere decir con *punto*, *línea*, etc., se presentan los denominados *postulados* y *nociones comunes*. Estas últimas son afirmaciones del tipo «el todo es mayor que la parte»; no son específicas de la geometría y para la mayoría de las personas son tan evidentes que ni tan solo sería necesario expresarlas. Los postulados son suposiciones en las que se expresa que es posible trazar cosas como rectas y círculos; nuevamente, se trata de afirmaciones tan evidentes que muchos lectores consideraban que no era necesario enunciarlas.

Los postulados y las nociones comunes han sido sometidos a una gran cantidad de intervenciones a lo largo de los siglos, pues los editores intentaban llegar a una lista de suposiciones básicas lo bastante completa y, a la vez, que no contuviera demasiadas cosas obvias. Su número variaba de un manuscrito a otro, así como su clasificación, que a veces incluía también una categoría de *axiomas*. De hecho, continúa la incerteza acerca de cuáles son obra del propio Euclides, si es que alguna lo es.

Uno de los postulados ha generado siempre muchos problemas y ha perseguido y agitado toda la historia de los *Elementos*. Se trata del postulado quinto, que dice así:

> [postúlese que] si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Tal vez la observación más amable que se le suele hacer es que se trata de un postulado muy poco elegante. Solo el hecho de entender lo que está diciendo ya implica un esfuerzo considerable; expresa la idea intuitiva de que si dos rectas no son paralelas, acabarán cortándose en algún punto, pero lo hace de una manera prolija y enrevesada. Acabó conociéndose como el *postulado de las paralelas* y casi todos los editores de los *Elementos* han comentado algo sobre él.

Algunos han intentado sustituirlo por un equivalente más sencillo, o más comprensible; otros han intentado demostrarlo a partir de suposiciones más básicas. Estos intentos de modificación se remontan ya al primer siglo antes de nuestra era y prosiguen con todos los geómetras que escribieron en griego, árabe, latín y demás lenguas. Proclo nos informa de un par de falsas demostraciones del postulado procedentes de la tradición griega, en las cuales el error habitual era que el geómetra había asumido tácitamente algo equivalente al propio postulado de las paralelas que quería demostrar. Los intentos árabes, desde el traductor de Euclides Thábit ibn Qurra, en el siglo IX, hasta el comentarista Násir al-Din al-Tusí, en el XIII, fueron también un fracaso.

Uno de los intentos más decididos e interesantes de resolver el problema del postulado de las paralelas durante la Edad Media no apareció en griego, árabe o latín, sino en hebreo, de la mano del rabino Leví ben Gershon, de Orange.

La cultura judía floreció en la península Ibérica durante el dominio islámico, adaptando el árabe como lengua vernácula y elaborando tradiciones filosóficas y teológicas en contacto con las obras y autores árabes y, a través de estos, con las fuentes griegas como Aristóteles. Se fue formando la sensación de que el judaísmo se podía enriquecer y fortalecer con el estudio de la lógica aristotélica, la física aristotélica e incluso la metafísica aristotélica. Para el gran pensador del siglo XII Moisés ben Maimón (Maimónides), autor de la célebre *Guía de los perplejos* en árabe (luego traducida al hebreo), la adquisición de conocimiento era un paso necesario para llegar a la perfección del alma.

Sin embargo, a partir de 1140, más o menos, los judíos empezaron a ser expulsados de Andalucía tras la invasión almohade y se desplazaron hacia el norte de la Península y el sur de la actual Francia, donde el condado de Provenza y el principado de Orange veían con buenos ojos la llegada de inmigrantes. De hecho, un par de siglos después, la corte papal en exilio en Aviñón estaba dispuesta a conceder estatus y patrocinio a los sabios de cualquier religión. Hacia el siglo XIV, en Provenza había unos quince mil judíos entre una población de dos millones de personas, trabajando como prestamistas, médicos, artesanos y mercaderes. Las ciudades de cierta entidad, como Orange y Aviñón, disponían de juderías y cementerios judíos.

La traducción al hebreo empezó a ser una actividad importante a medida que el uso del árabe en las comunidades judías fue decayendo. Muchas obras de autores árabes y griegos se tradujeron al hebreo, en un momento de compromiso y asimilación cultural sin precedentes en la literatura hebrea. Ahora, un sabio que solo leyera en esta lengua podía disponer de una gran cantidad de textos académicos y podía dedicarse a emprender proyectos originales en diversos campos, desde la lógica y la matemática hasta la astronomía y la metafísica.

Como era de esperar, los *Elementos* también formaron parte de este proceso de traducción, entre otros textos matemáticos. Durante el siglo XIII se hicieron por lo menos cuatro versiones de los *Elementos* en hebreo a partir de fuentes árabes, además de una o más a partir del latín y dos a partir del persa. Los *Elementos* no solo se convirtieron en la obra matemática más traducida en hebreo, sino también en la más comentada y una de las más copiadas. Se redactaron nuevos comentarios en esta lengua (quince, por lo menos) y se tradujeron unos cuantos del árabe. Como sucedió en otros momentos y lugares, los *Elementos* pasaron a ser una de las obras que cualquier persona educada y cultivada debía tener en su colección, uno de los libros académicos que aparecían en las bibliotecas de intelectuales de cualquier especialidad.

Leví ben Gershon, también conocido como Leo de Balneolis, Leo Hebraeus o Gersónides, y también como Ralbag en el acrónimo convencional judío (de 'rabino Leví ben Gershon'), nació en 1288 y murió en 1344, en la importante y al parecer cultivada familia de Balneolis. Es probable que viviera toda su vida en Orange, en la comunidad judía formada por unas cincuenta o cien familias. Hablaba hebreo y occitano provenzal, pero solo escribió en hebreo; es posible que supiera algo de latín o de árabe, pero las pruebas son escasas.

Su padre y su abuelo debían de ser eruditos talmúdicos, pero no sabemos muchos detalles, y uno de sus hermanos era médico. Se casó con una prima, pero tampoco sabemos si tuvieron hijos. De hecho ni tan solo sabemos cómo se ganaba la vida; hay algunas pruebas dispersas que lo relacionan con la práctica de la medicina o con los préstamos, o también con la función tradicional de rabino de la comunidad.

Sea como fuere, lo cierto es que se convirtió en el líder intelectual de su generación, un gran filósofo y uno de los más destacados científicos medievales. Aprovechó la tradición filosófica árabe-hebrea y la hizo avanzar, esforzándose para elaborar una física y una metafísica acordes a las doctrinas básicas del judaísmo y siguiendo la ciencia y la filosofía aristotélicas. Ben Gershon escribió comentarios sobre varias obras aristotélicas del filósofo musulmán del siglo XII Ibn Rushd, más conocido como Averroes; también redactó una serie de comentarios sobre las escrituras judías. Elaboró obras originales y comentarios sobre lógica y la que es su gran obra, *Las guerras del Señor*, calificada como la obra más sofisticada de filosofía en la historia del judaísmo.

Era un ferviente creyente en el poder del razonamiento humano para descubrir la verdad, es decir, para obtener el verdadero conocimiento de las cosas reales mediante las pruebas que nos aportan los sentidos y perfeccionar las ciencias con el tiempo. Se comprometió con la ciencia experimental a un nivel sin parangón en la erudición hebrea; en concreto, fue el astrónomo observacional más destacado de su generación, y quizá de todo su siglo. No contento con basarse en los datos de los libros si podía mejorarlos por él mismo, hacia 1320 empezó a observar el cielo y continuó haciéndolo durante el resto de su vida. Además de usar una cámara oscura, que existía en Europa desde hacía medio siglo, más o menos, inventó un nuevo instrumento, llamado hoy en día *ballestilla* o *vara de Jacob*, a causa de un malentendido en una alusión al patriarca Jacob en uno de los poemas de Ben Gershon. La ballestilla consiste en una vara larga con una vara más corta montada en ángulo recto, perpendicular respecto a la primera y sobre la cual puede desplazarse. Situando un ojo en un extremo de la vara más larga, el observador apunta al cielo y hace coincidir los dos extremos de la vara más corta con dos estrellas; anotando la posición de la vara pequeña sobre la larga y sabiendo su longitud, se puede determinar el ángulo entre las dos estrellas en el cielo. Puede parecer algo rudimentario, pero tal vez fuera el instrumento astronómico más útil antes del telescopio (Copérnico lo utilizó) y tuvo una larga vida como instrumento de navegación hasta el siglo XVI y más tarde. A partir de sus observaciones, Ben Gershon revisó el sistema aceptado de movimiento de los planetas, determinó que las distancias entre ellos tenían que ser mucho más grandes y elaboró un modelo simplificado del movimiento de la luna.

Sus obras lo convirtieron en una celebridad. En sus libros hay fragmentos acerca de cómo la filosofía puede hacer elevar el estatus de uno, y está claro que elevó el suyo, qué duda cabe. Tiene fragmentos sobre cómo tratar con príncipes y sin duda aprendió a hacerlo. Sabemos poquísimo de sus relaciones dentro de la comunidad judía, pero sí sabemos que Ben Gershon tenía tratos con destacados cristianos, incluso en la corte papal. A los cincuenta y tres años, elaboró un almanaque para hallar la fecha de la Pascua cristiana, a petición de «muchos nobles y grandes cristianos», del cual hay versiones en occitano y en hebreo. Más tarde, en la década de 1330, el papa Benedicto XII le encargó unas predicciones astrológicas y en los últimos años de su vida revisó su obra *Astronomía* y dedicó a Clemente VI la traducción al latín de partes de esta. Al parecer, era hasta cierto punto cliente de la corte papal.

A grandes rasgos, Platón y Proclo habían considerado que uno debe estudiar los objetos matemáticos porque habitan en el reino de las formas eternas y permiten alejarse de lo mundano para dirigirse a ideas más elevadas. Ben Gershon no creía en un mundo de formas, pero pensaba que los objetos matemáticos, como las demás verdades, eran abstracciones obtenidas a partir de los datos recibidos por los sentidos; sin embargo, estaba de acuerdo con el valor de la matemática dentro de una educación filosófica. ¿Cómo se podían aprovechar de la mejor manera las observaciones empíricas para mejorar el propio intelecto y el estado del conocimiento humano? Consideraba que una persona debía estudiar matemáticas porque le ayudaría a elaborar ideas abstractas de manera correcta y a identificar y discernir las pautas verdaderas del mundo, sobre todo en una ciencia como la astronomía. En este sentido, en la educación ideal de Ben Gershon había un lugar para las matemáticas desde su mismo inicio, como preparación para lo que, según él, eran los estudios superiores de la física y la astronomía (que a su vez eran una preparación para el estudio de la metafísica). Con estas ideas, escribió un libro sobre aritmética y álgebra, en un estilo algo euclidiano, y uno sobre trigonometría.

De este modo, Ben Gershon se dirigió a Euclides, sobre el cual echó una mirada de filósofo y de astrónomo. Consideraba que los libros aritméticos de los *Elementos* (las partes que Hroswitha había hecho citar a las hijas de la Sabiduría) eran una lectura necesaria para su propia obra aritmética, en la cual hace referencia a ellos. Las partes geométricas de los *Elementos*, por su parte, las veía como requisito imprescindible para el estudio adecuado de la astronomía.

Sin embargo, había aspectos que lo turbaban. Al igual que otros, consideraba que para los propósitos para los que estaba leyendo geometría, las definiciones de Euclides tenían que mejorarse, clarificarse y ampliarse, de modo que decidió redactar unos comentarios sobre los *Elementos* en los que ofrecía tal clarificación y ampliación. En el caso de la definición de Euclides «un punto es lo que no tiene partes» señaló que otros comentaristas ya habían indicado que es necesario diferenciar un punto respecto a la unidad aritmética, afirmando que tiene posición. A la definición de Euclides de diámetro de un círculo, añadió una demostración de que el diámetro así definido realmente divide el círculo en dos partes iguales[4]. Cuando Euclides postula que una recta dada se puede extender indefinidamente, Ben Gershon también se muestra preocupado; Aristóteles había señalado que a no ser que el universo fuera infinito, en realidad ninguna línea podía extenderse indefinidamente, y Ben Gershon consideró necesario diferenciar entre los aspectos físicos y matemáticos de una recta. Del mismo modo, Ben Gershon se dedicó a ampliar lo que consideraba necesario en los libros I a V de los *Elementos*.

En el caso del postulado de las paralelas, ese desconcertante fragmento sobre el comportamiento de rectas que se intersecan, Ben Gershon lo encontró deficiente, como tantos otros antes que él. Era consciente del trabajo de comentaristas anteriores y escribió prolijamente sobre el tema. Su idea era sustituir el objetable postulado por otros dos, que estimaba más evidentes, y luego utilizarlos para demostrar el propio postulado de las paralelas. Sus postulados de sustitución eran los siguientes, que tampoco es que sean un dechado de claridad y comprensibilidad:

> [postúlese] que una recta se puede extender para hacerla más larga que cualquier recta dada; que si dos rectas dadas forman un ángulo recto y un ángulo agudo, respectivamente, con una tercera recta que las corta, se acercarán una a otra por el lado del ángulo agudo y se separarán en el sentido opuesto.

Su demostración implicaba una cadena de nueve resultados subsidiarios antes de llegar al postulado de las paralelas, ahora reconsiderado como teorema. Ben Gershon demostraba así su habilidad con la geometría euclidiana (que era considerable), pero por lo que respecta a la fundamentación de la geometría, por desgracia consiguió poco más que sustituir un elemento dudoso con otro igualmente dudoso.

De hecho, Ben Gershon no estaba totalmente satisfecho con su intento de arreglar los *Elementos*, y llegó a la conclusión de que la geometría en realidad necesitaba una fundamentación nueva por completo, una presentación mejorada que evitara algunas de las lagunas y dificultades que veía en el libro de Euclides. Así pues, se lanzó a escribir su propio tratado de geometría, sobre unas bases más sólidas y así, en esta obra reunió las ideas de sus comentarios a los *Elementos*, mejorando las mismas definiciones y planteando las mismas suposiciones. El objetivo de demostrar el postulado de las paralelas permanecía igual.

El nuevo tratado geométrico de Ben Gershon no tuvo éxito; hoy en día solo sobrevive en un único manuscrito, con las primeras veinticuatro definiciones e hipótesis. En cambio, los *Elementos* continuaron su largo reinado en la matemática y (tal como Ben Gershon había respaldado) en la educación filosófica. No fue el último en sentirse perturbado por la falta de adecuación de las definiciones de Euclides, ni tampoco el último en preocuparse por el estatus del postulado de las paralelas y en determinar si podría demostrarse a partir de postulados más evidentes; y tampoco fue el último filósofo en estar de acuerdo con que el conocimiento geométrico estaba estructurado, a grandes rasgos, tal como lo había hecho Euclides, pero con ciertas dudas acerca de si el contenido detallado de los *Elementos* era correcto por completo.

Christopher Clavius

Los *Elementos* jesuíticos

En 1574 se publicó un librito, algo más pequeño que una edición de bolsillo actual, pero con tapas duras y unas setecientas páginas. Hoy en día su encuadernación está bastante desgarrada; alguien garabateó «EUCLIDES» en el lomo, junto con un código de biblioteca, «L 135». Las guardas llevan la signatura de, por lo menos, tres propietarios previos; están parcialmente tachadas y cuesta leerlas. En algún momento el libro formó parte de una biblioteca institucional y se pueden ver las palabras «… de San Francisco».

El libro es la primera edición de los *Elementos* de Euclides en la versión de Christopher Clavius (castellanizado a menudo como Cristóbal Clavio) de la Compañía de Jesús; o más bien, se trata del primero de los dos volúmenes de esa edición. Cada uno cabe en un bolsillo grande o en una bolsa pequeña; la letra es menuda y el texto, abundante; la introducción afirma que contiene 1234 demostraciones euclidianas, algo casi difícil de creer, pues son más del triple que en la mayoría del resto de las versiones. El libro incluye grandes cantidades de notas y adiciones procedentes de todo tipo de fuentes: demostraciones alternativas, proposiciones alternativas, axiomas alternativos, demostraciones de axiomas, refutaciones de falsas demostraciones, etc.

Christopher Clavius nació en la pequeña ciudad alemana de Bamberg, el día de la Anunciación de 1538. Dos años después, la orden jesuita (la Compañía de Jesús, fundada por Ignacio de Loyola) recibió la aprobación papal y es probable que el joven Christopher quedara convencido por uno de sus predicadores, de manera que entró en la sociedad poco después de cumplir los diecisiete años y se dirigió a Coímbra, a estudiar en su universidad. Nunca regresaría a su ciudad natal.

Coímbra tenía como mínimo un famoso maestro de matemáticas, pero no está claro si Clavius aprendió de él o a partir de los libros; en cualquier caso, pronto se volvió todo un experto en la materia. En 1561 partió a Roma para proseguir estudios superiores de teología y al cabo de dos años fue nombrado profesor de matemáticas en la escuela jesuita de la ciudad (el Colegio Romano), donde permaneció el resto de su vida, salvo algunos períodos de viajes.

Fue ordenado en 1564 y pasó a ser miembro pleno de la Compañía en 1575. Clavius fue una autoridad respetada en matemáticas, un autor prolífico y un profesor carismático. Un testimonio contemporáneo nos dice de él que era:

> un hombre incansable en sus estudios […] de una constitución tan robusta que podía soportar sin problemas las largas noches y los esfuerzos de los estudios. Es de buena estatura, bien proporcionado y fuerte. Tiene un rostro agradable con un rubor masculino, y en su pelo se mezcla el blanco y el negro. Habla italiano muy bien, habla latín con elegancia y entiende el griego. Pero tan importante como todos estos aspectos es su propensión a ser agradable con todos aquellos que conversan con él.

Christopher Clavius.

De hecho, ha quedado registrada una de sus chanzas. Preguntado por el papa Gregorio XIII acerca de si disponía de unas buenas habitaciones, «cómodas y adecuadas a sus estudios», Clavius respondió: «¿Buenas? ¡Las mejores! […] cuando llueve por la noche todo lo que tengo que hacer es mover mi cama de una habitación a la otra para que el agua no me chorree sobre la cabeza».

Llevó a cabo observaciones astronómicas y tuvo la buena fortuna de presenciar un eclipse total de Sol en Coímbra y otro en Roma; también registró diversas novas. Fue una de las personas de la primera generación en observar a través de un telescopio, y vio lo mismo que Galileo: las fases de Venus y los rasgos y marcas en la Luna. Publicó libros de texto de astronomía y libros sobre instrumentos científicos y matemáticos, además de involucrarse en la elaboración del nuevo calendario gregoriano, que defendió ante los críticos. Este calendario entró en vigor en 1582 y es el que sigue empleándose hoy en día.

Uno puede preguntarse qué es lo que quería la Compañía de Jesús con un experto matemático de tal calibre. Para ello hay que entender que la Compañía se fundó con un ideal de clero itinerante, pero que en los veinte años que transcurrieron durante la vocación y la formación de Clavius fue basculando cada vez más hacia la educación de niños y adolescentes. Cuando se unió a la Compañía, había unos mil jesuitas que gestionaban una treintena de escuelas; a finales del siglo XVI esta cifra había aumentado a más de ocho mil y casi doscientas cincuenta escuelas. La estructura del plan de estudios era una cuestión importante y en los años previos a la publicación de un programa definitivo, en 1599, Clavius se dedicó a hacer campaña para que las matemáticas tuvieran en él un lugar destacado. En el Colegio Romano había una academia informal de matemáticas para formar a especialistas técnicos (arquitectos, topógrafos, administradores) y así transmitir a los futuros misioneros los conocimientos científicos que podrían necesitar en lugares remotos y formar maestros para las escuelas jesuitas. De hecho, la escasez de maestros de matemáticas fue un problema recurrente para los jesuitas a lo largo del primer siglo de existencia de la orden.

De momento, solo hemos mencionado los argumentos pragmáticos, pero el estatus de la matemática continuaba siendo un tema filosófico más profundo. El punto de vista platónico de Proclo y otros había sido ampliamente leído y se había ido aceptando en un aspecto tras otro dentro del pensamiento medieval occidental. San Agustín, en particular, transmitió a la filosofía cristiana la idea general de la geometría como muestra de lo eterno e inmutable, mientras que Boecio y Adelardo, los traductores de Euclides, estaban interesados y familiarizados con las ideas platónicas. Santo Tomás de Aquino alabó las matemáticas y Alberto Magno escribió un comentario sobre Euclides.

Por su parte, el redescubrimiento latino de Aristóteles en el siglo XII había arrastrado el pensamiento medieval hacia otra dirección. Para Aristóteles, no había ningún reino de formas eternas; las ideas matemáticas, como cualquier otra, eran abstracciones de las pruebas que nos aportan los sentidos (igual que para Ben Gershon) y no tenían ninguna realidad. En este sentido, las matemáticas no ocupaban ninguna posición excelsa. Además, todo el corpus aristotélico sobre demostraciones lógicas, muy estudiado, daba preferencia al razonamiento verbal en forma de silogismo: todos los hombres son mortales, todos los griegos son hombres, luego todos los griegos son mortales; este tipo de razonamiento y trece combinaciones más de premisas y conclusiones. Si este era el camino para lograr el conocimiento verdadero, el modelo alternativo de deducción euclidiana era irrelevante y más bien una distracción.

Como resultado, en las universidades medievales la matemática tuvo cierta tendencia a perder su estatus destacado.

En época de Clavius, el péndulo empezaba a oscilar nuevamente a favor de Euclides. Las obras de Platón se habían redescubierto y traducido desde el siglo XV y las obras de Proclo se publicaron en el XVI. Algunos matemáticos se sintieron envalentonados para atacar las posiciones aristotélicas acerca de lo que era la matemática y para qué servía, respaldando un estatus superior para la disciplina, tanto socialmente (para sus practicantes) como en la jerarquía de formas de conocimiento (para la propia matemática); de hecho esgrimieron básicamente los mismos argumentos que ya había empleado Proclo. Además, la utilidad práctica de las matemáticas era cada vez más evidente y más aceptada con regularidad por los intelectuales.

En resumen, los matemáticos habían atisbado la posibilidad de, tras varios siglos en la sombra, potenciar la condición de su disciplina y, de paso, su propia posición, apelando a los textos de la tradición platónica que afirmaban que la matemática era básica para el conocimiento de la realidad. Copérnico, Galileo y Kepler, por citar solo unos pocos, absorbieron todos ellos los comentarios de Proclo sobre Euclides. Ratdolt había mostrado, gracias a sus innovadores diagramas impresos, que el razonamiento geométrico (incluso sobre el papel) podía ser en verdad exacto, no solo aproximado, mientras que hacia el año 1500 un influyente traductor de Euclides del griego al latín, Bartolomeo Zamberti, añadió un prefacio que abundaba en cómo dirigir la mente hacia lo inmaterial mediante el uso de la geometría.

Todo ello dio nueva importancia a un tipo de obras sobre el texto euclidiano que habían ido apareciendo intermitentemente desde la Antigüedad. Un autor que quisiera aseverar que los *Elementos* de Euclides eran un equivalente superior a la lógica de Aristóteles tenía que asegurarse de que su contenido lógico era en verdad correcto. Los editores prestaron una atención renovada a tareas como la comprobación de demostraciones, en busca de fallos o lagunas, y editaron el texto para obtener una estructura coherente y clara y asegurarse de que cubría todos los casos que se suponía que tenía que cubrir, sin inoportunas suposiciones no explícitas.

Este último aspecto se convirtió en un tema de especial preocupación, y durante el siglo XVI, una edición tras otra aportaba un conjunto renovado o mejorado de postulados y nociones comunes para intentar que los *Elementos* fueran lo más lógicamente intachables posible. A lo largo de los siglos XVI y XVII se intentaron más de doscientos postulados o axiomas diferentes en combinaciones diversas; algunas ediciones llegaron casi a la cincuentena. Por ejemplo, a partir de «el todo es mayor que la parte», los editores del siglo XVI intentaron definir los términos («un todo es lo que tiene partes», «un todo se divide en partes») y ampliar y refinar el axioma («el contenedor es mayor que lo contenido», «la medida no es mayor que lo que se mide»). Al darse cuenta de que no había ningún axioma que requiriese que dos líneas que se cortan tuvieran un punto de intersección, alguien añadió uno («si se traza una línea recta o curva a partir de un punto en el interior de una figura hasta otro punto en el mismo plano exterior a la figura, intersecará los lados o el límite de tal figura»). Otros también intentaron rellenar posibles lagunas de Euclides, como en la noción común «si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales», completándola con «si se añaden cosas desiguales a cosas desiguales, la mayor a la mayor y la menor a la menor, los totales serán desiguales y el primero, mayor que el segundo».

Fue en este contexto en el que Clavius publicó su edición de los *Elementos* de Euclides. Había pasado casi un siglo desde que Ratdolt había impreso por primera vez la obra y Clavius era el heredero de una larga y brillante tradición de trabajo sobre el texto. Quiso sintetizar lo mejor de las diversas ediciones anteriores y presentar material de versiones del libro antiguas, medievales y del siglo XVI. Añadió numerosos corolarios, lemas y comentarios propios, e incluso algunas proposiciones nuevas. Por ejemplo, si Euclides tenía cinco postulados y cinco nociones comunes, Clavius presentó cuatro postulados y veinte axiomas, y ofreció hasta quinientas ochenta y cinco demostraciones adicionales a las del texto euclidiano estricto. De este modo, su libro era un ejemplar abarrotado, rebosante, enmarañado, lleno de notas, recordatorios y referencias; la separación entre texto y comentario estaba siempre a punto de desdibujarse. De hecho, el libro de Clavius no estaba muy lejos de ser, en realidad, un libro diferente, un libro nuevo, e ilustraba con brillantez que la geometría euclidiana seguía siendo algo vivo y en desarrollo, además de invitar al estudiante capaz a contribuir también a la tradición.

El prefacio de Clavius abundaba en un mensaje sobre la importancia de las matemáticas; citaba a Platón acerca de la relevancia de estas en filosofía, recurría abundantemente a Proclo y modeló el prefacio de sus *Elementos* a partir del prefacio del editor alemán de Proclo. Clavius hace referencia a toda la tradición, desde Agustín y Jerónimo, del uso de las matemáticas en la teología cristiana: «Nadie puede acceder a la metafísica si no es a través de las matemáticas».

No obstante, también remarcaba el potencial de las matemáticas en los usos prácticos. Clavius, como astrónomo y reformador del calendario, se hallaba en muy buena posición para presentar tales argumentos, y por todos sus *Elementos* hay indicaciones sutiles de que quería facilitar todo lo que pudiera la aplicación de las matemáticas. Sus diagramas remarcan los aspectos físicos de lo que representa. Añadió diagramas para construir modelos de papel de los sólidos platónicos, de modo que el lector interesado pudiera manipular los objetos con sus propias manos. Su defensa y loa de las matemáticas resultó tan convincente que Clavius reutilizó todo el prefacio cuatro décadas más tarde como prefacio a sus obras completas.

Así pues, Clavius reunió dos enfoques respecto a la matemática: el teórico y el práctico. El primero veía la geometría como una vía hacia las verdades universales; el segundo, como un arte práctico, un utensilio para finalidades mundanas. Clavius se situó en la intersección de dos aproximaciones a la matemática en la cultura y la educación y, al hacerlo, creó algo parecido a un clásico, una versión de los *Elementos* que unía las dos facetas (la práctica y la intelectual) que llevarían a la revolución científica del siglo XVII. Su libro fue revisado y reeditado cinco veces durante su vida y se volvió a imprimir en el siglo XVII. Siguiendo sus pasos, varios matemáticos jesuitas publicaron ediciones diversas, asumiendo la tradición que él había iniciado y llevándola hasta finales del siglo XVII e inicios del XVIII. Sus admiradores lo calificaron de «el Euclides de su época».

El libro cruzó fronteras políticas y religiosas. Varias copias del Euclides de Clavius se donaron a las facultades (protestantes) de la Universidad de Oxford durante el siglo XVII, para su uso por parte de los graduados más brillantes. La edición se convirtió en un punto de referencia en cualquier discusión acerca de la naturaleza de la geometría euclidiana durante unos doscientos años y se ha calificado, con razón, como la edición más importante de Euclides jamás publicada.

En el contexto de la educación jesuítica, la versión de Clavius de los *Elementos* alcanzó una enorme importancia y logró una gran victoria para el estatus de la matemática y la geometría dentro de la orden. La academia informal de matemáticas del Colegio Romano obtuvo reconocimiento oficial hacia 1593; Clavius, por su parte, había disfrutado del título y el honor del cargo de profesor durante veinticinco años. El plan de estudios que elaboró para los matemáticos más dotados incluía todos los *Elementos* de Euclides, intercalados con otros estudios de aritmética, trigonometría y aplicaciones de la matemática, como la astronomía y la teoría musical (de hecho, el propio Clavius compuso canciones y motetes). En este currículo, los *Elementos* eran, claro está, el primero y más importante de los libros objeto de estudio. El plan de estudios oficial de los jesuitas, publicado en 1599, prescribía el estudio de Euclides en todas las escuelas jesuíticas, además de la enseñanza de la matemática a los estudiantes avanzados de física y de filosofía. Aunque se descartaron propuestas más ambiciosas con requisitos más estrictos acerca de la cantidad de matemática que se debía estudiar, se trató de una clarísima victoria del punto de vista de Clavius sobre la relevancia de las matemáticas en la educación jesuítica y sobre el lugar que debía ocupar Euclides en el temario. A inicios del siglo XVII, las disciplinas matemáticas habían alcanzado el estatus que Clavius deseaba para ellas, y hacia el final de su vida, se fundó en Amberes una escuela especial para formar a matemáticos jesuitas, uno de cuyos primeros maestros fue Grégoire de Saint-Vincent, quien había sido estudiante de Clavius en Roma.

La consecuencia de todo esto fue que casi un cuarto de millón de niños y adolescentes a cargo de los jesuitas, en algún momento de su vida, recibirían alguna dosis de los *Elementos* de Euclides en la versión de Clavius. Además de los estudiantes de Clavius en Roma y de la larga lista de grandes matemáticos jesuitas, la orden también educaría a no jesuitas interesados en la matemática, como Descartes, Laplace, Diderot o Voltaire. La pasión de Clavius por Euclides y su característica visión de los *Elementos* daría forma a la cultura matemática durante dos siglos.

En sus últimos años, Clavius era ya célebre, y muchos visitantes en Roma querían conocerle. Uno de ellos fue Galileo, las observaciones telescópicas del cual habían llamado la atención de Clavius. Consideró que el venerable jesuita era «merecedor de fama inmortal» y se sospecha que Galileo utilizó los *Elementos* de Clavius en sus actividades docentes y que se inspiró de alguna manera en el viejo jesuita en su consideración de la matemática dentro de la filosofía natural.

Algunas de las alabanzas contemporáneas de Clavius son una clara exageración o yerran por completo en su valoración. Sin embargo, Clavius sí que tal vez se hubiera sentido halagado por un pequeño detalle: alguien en Cambridge, a principios del siglo XVII, escribió en la portada de los *Elementos* de Clavius «he aquí las maravillas del Señor y los misterios del mundo».

Xu Guangqi

Euclides en China

Pequín, año treinta y tres del reinado de Wanli (1604 d. C.).

Xu Guangqi, en la capital para presentarse a su examen de funcionario, visita a su conocido Li Ma To. Li es un sabio del Lejano Oeste que ha viajado un año para llegar hasta China desde su hogar en el otro extremo del mundo. Tiene una reputación de hombre que nunca miente, es un conversador refinado y un polemista habilidoso, con una memoria portentosa. Ha publicado libros en un elegante chino literario sobre la amistad, sobre el arte de la memoria y sobre el nuevo culto religioso que ha traído consigo. Su casa en China está repleta de objetos misteriosos: instrumentos, mapas, tesoros. Y libros.

Xu Guangqi era el hijo y la gran esperanza de una familia urbana de Shanghái. Las inundaciones, las sequías, las hambrunas y la constante erosión de la herencia paterna hicieron que una carrera en el funcionariado (una puerta de acceso a la élite a través de la erudición y la cultura) fuera su mejor opción. Superó el examen local, el *xiucaí*, en 1581, pero fracasó tres veces en los exámenes regionales, el *jurén*, durante la siguiente década y finalmente logró su título en 1597, tras trabajar como maestro y tutor. Tardó siete años más en superar el examen final, el *jinshi*, en Pequín.

Xu Guangqi.

Al igual que muchos de su clase y su época, Xu se sentía frustrado por lo que consideraba el estudio estéril de los clásicos literarios y filosóficos en los que se basaban los exámenes; además, las crisis de su juventud y la amenaza de los manchúes en la frontera septentrional añadían incerteza a su impaciencia. Como confuciano, quería que el conocimiento llevara a resultados prácticos al servicio de su país; en este sentido, se interesó por la ingeniería hidráulica y en 1603 presentó al magistrado de la prefectura de Shanghái un texto con métodos para cartografiar los cursos de agua.

Su vida dio un vuelco de lo más inesperado alrededor de 1600. En la década de 1590 conoció a un hombre llamado Cattaneo en Shaozhou; era un viajero procedente del oeste que fomentaba una vía religiosa diferente a las tradiciones confucianas, budistas y taoístas que conocía Xu. En 1600, camino de Pequín para su segundo e infructuoso intento en el examen *jinshi*, conoció a Li Ma To en la capital meridional de Nanjing; era otro individuo de la misma secta que Cattaneo, y le causó una profundísima impresión. Xu escribiría luego que «era el único caballero del mundo que comprende las relaciones entre todas las cosas».

Tras unos cuantos años de reflexión en Shanghái, Xu regresó a Nanjing en 1603, pero Li Ma To ya no estaba ahí. Su colega João da Rocha recibió a Xu, le enseñó y le dio material de lectura, entre el cual se encontraba el manuscrito de Li sobre el «Señor de los Cielos». Xu quedó lo bastante convencido del «camino del Señor de los Cielos» para aceptar el rito que sus seguidores llamaban *bautismo*, también en Nanjing y en el cual asumió el nombre de Pablo.

En el examen *jinshi* del año siguiente, Xu fracasó en la primera prueba, pero luego fue aprobado cuando los examinadores hicieron una segunda lectura de su texto. Xu consideró que este éxito era una señal del favor divino y recuperó el contacto con Li Ma To, que ahora vivía en Pequín con un salario oficial imperial.

Li Ma To era un hombre del otro extremo del mundo, literalmente. Su ciudad natal era Macerata, en los Estados Pontificios, y su nombre allí era Matteo Ricci. Diez años mayor que Xu, se había formado en Roma como letrado y se incorporó a la Compañía de Jesús. A los estudios en el Colegio Romano, entre cuyos maestros tuvo a Christopher Clavius, siguió la voluntad de prestarse voluntario para las misiones en el Lejano Oriente. Uno de sus predecesores, Francisco Javier, había fracasado en 1552 en su intento de internarse en tierras chinas, pero luego, en esa misma década, jesuitas portugueses visitaron Guangzhou y parecía que el contacto esporádico podría convertirse en una misión permanente en tierra firme.

Ricci y siete compañeros abandonaron Roma en 1577. Viajaron vía Portugal (donde recibieron algo más de formación en la Universidad de Coímbra, incluyendo matemáticas con un estudiante de Clavius) y Goa, lo que implicaba un año en el mar para bordear la costa meridional de África. Era uno de los viajes más ambiciosos que alguien del siglo XVI podía emprender, y para Ricci resultó ser un viaje solo de ida; con veinticuatro años, hacía nueve que no veía a sus padres, y nunca los volvería a ver, pues tras dejar Portugal ya no regresaría jamás a Europa.

Después de Goa, donde Ricci finalizó sus estudios teológicos, y ya ordenado, viajó hasta Macao, la siguiente escala en la cadena de colonias portuguesas. En esta ciudad empezó a aprender chino de la mano de Michele Ruggieri, otro italiano y fundador de la misión jesuita en China. Después de Macao, Zhaoqing. Era 1583.

En China se sucedieron escalas y más escalas, a medida que los jesuitas se acercaban a lo que era su objetivo final, la capital imperial, y medraban entre los altibajos de los favores y la protección oficial o, a veces también, de las sospechas e incluso expulsiones. El viaje parece que sentó bien a Ricci, y buena parte de lo que sabía de China lo aprendió en sus recorridos por el país: sus ríos, lagos y canales; anotó distancias y ubicaciones y detalles de la vida en las tierras que cruzaba.

Ricci y sus compañeros se instalaron en Shaozhou durante doce años y también visitaron Nanjing. Pasaron tres años en Nanzhang y, después de un primer intento fallido, se mudaron de manera permanente a Pequín en 1601. Una vez más, ya no hubo vuelta atrás, pues Ricci nunca abandonaría la ciudad imperial. En Pequín, al principio la misión se instaló (tal vez deberíamos decir mejor que fue recluida) en la residencia para emisarios extranjeros. Sin embargo, luego se permitió a los jesuitas alquilar y después comprar una casa, con el apoyo material de un estipendio imperial y el apoyo social de los funcionarios de alto rango interesados en ellos.

Ricci estaba impresionadísimo con la arquitectura de las capitales chinas, Nanjing y Pequín, con sus muros, tropas y fortificaciones. Admiraba el poder y la dignidad de los mandarines y la grandiosidad de la inaccesible corte imperial y él, por su parte, también procuró impresionar. La intención de la misión siempre había sido mezclarse y adoptar las costumbres locales, su estilo de vida y sus vestimentas. Al principio, siguiendo lo que resultó un mal consejo, se vistieron como monjes chinos, con la cabeza rapada, la barba afeitada y ropa a la manera budista; sin embargo, al ser así percibidos como unos nuevos budistas, esta estrategia poco favoreció a su causa, de manera que hacia 1590, Ricci y sus compañeros ya se habían dejado crecer el pelo y se vestían con trajes de gala confucianos. Su descripción revela con claridad que le gustaba su nueva imagen, con ropajes

> de seda púrpura, con el dobladillo, el cuello y los bordes […] revestidos de una banda de seda azul de algo menos de un palmo de anchura; la misma decoración muestran las bocamangas, que cuelgan abiertas, de modo parecido al estilo habitual en Venecia. Hay una amplia faja de seda púrpura embellecida de azul, que se ajusta al mismo vestido y permite que cuelgue abierta cómodamente.

Como ejercicio de manipulación de imagen, funcionó, y los jesuitas aparecían ante sus anfitriones como dignos colegas de la élite erudita. Colegas de Xu Guangqi, por ejemplo.

¿Qué vieron Xu y sus compatriotas en Matteo Ricci, es decir, en Li Ma To? Sabían que eran hombres del Lejano Oeste que habían viajado durante un año, o quizá varios, hasta llegar a China (cierto), que muchos compañeros suyos habían muerto por el camino (leyenda, pero muy relatada), que su tierra natal era una utopía pacífica repleta de maravillas (leyenda, también), que hablaban chino lo bastante bien como para hacerse entender pero cuyas lenguas eran extrañas.

Los jesuitas habían llegado cargados con una extraordinaria colección de artefactos: relojes, prismas, astrolabios, cuadrantes, globos terráqueos; tenían libros impresos con tipos móviles, grabados y óleos con representaciones en perspectiva; tenían espejos, ropa blanca y un clavicordio; tenían un mapa del mundo (que fue especialmente admirado). Algunos de estos objetos estaban pensados como regalos para el emperador y algunos se mostraban en la residencia de la misión. Los «gabinetes de curiosidades» eran algo bien establecido en la Europa que Ricci había dejado atrás, y los jesuitas lograron reproducir algo parecido en su hogar de Pequín.

Todas estas «maravillas» servían como punto de partida para numerosas charlas, así como los propios jesuitas, con sus historias personales, su conversación y sus escritos. Ricci firma una obra como «el hombre de la montaña de la gran región occidental»; en otra, como «el hombre de la paradoja». Las multitudes se agolpan para verlos; las fuentes nos dicen que su casa estaba «asediada» y que el gentío solo se apartaba cuando llegaba algún visitante chino de alto rango. De hecho, los visitantes con invitación personal podían llegar a veinte en un día normal y a un centenar en un día festivo. Los mandarines se amontonaban alrededor de Ricci «como locos», y este pasaba casi todas sus horas de vigilia recibiéndolos; algunos días apenas si tenía tiempo de comer. La dependencia de la misión del mecenazgo implicaba que no podían rechazar visitantes; devolver visitas y asistir a banquetes (donde se esperaba que debatiera sobre temas científicos y religiosos, a veces con eruditos confucianos o budistas) consumía aún más el tiempo de Ricci.

Los visitantes chinos se acercaban a la misión para observar, maravillarse, hablar, aprender y discutir. La curiosidad por el Lejano Oeste podía llevar a discusiones sobre filosofía y religión, y los jesuitas eran muy hábiles dirigiendo las conversaciones hacia su propio «camino» y el Señor de los Cielos. La imagen del oeste y del cristianismo que presentaban en su residencia como si fuera un microcosmos llevaba a la curiosidad, lógicamente, y con suerte a una cierta atracción por lo que podía ofrecer. En 1606 se habían bautizado a unos mil chinos; en 1610, a dos mil quinientos y en 1615, al doble. Si la de los jesuitas era una manera indirecta de lograr conversiones, sin duda parece que tuvo éxito.

Xu era un visitante entre tantos otros, pero acabó siendo uno muy especial. Tras superar su examen *jinshi*, se le asignó a la academia Hanlin de la capital durante tres años, a la espera de un cargo definitivo. El cristianismo satisfizo sus necesidades en varios aspectos, y se sentía atraído por los conocimientos occidentales a causa de lo que él percibía como las virtudes gemelas de certeza y pragmatismo. Se instaló en una casa al lado del complejo jesuita, que incluso disponía de un pasillo que conectaba ambos edificios, y se convirtió en un estrecho colaborador y amigo de Ricci. El jesuita le enseñó matemáticas y Xu pronto le pidió libros científicos para traducir al chino; Ricci insistió que el punto de partida eran los *Elementos* de Euclides:

> En mi universidad, todos los libros de las diferentes ramas de la matemática consideran este libro como el punto de partida. Todo principio y toda teoría que se elabora cita este libro como su demostración.

En cuanto Xu comprendió la potencia y la precisión del libro, se entusiasmó y «no podía hablar de ninguna otra cosa con sus amigos».

Entre los objetos que había llevado consigo, Ricci disponía de una copia de los *Elementos* de Clavius, en la primera edición de 1574 (una nota en el prefacio de Clavius explicaba que el libro se había impreso en dos pequeños volúmenes para poder transportarlo con facilidad, algo que las misiones debían tener presente). Ricci ya había intentado redactar una versión china antes, pero el trabajo, en colaboración con otro chino converso, se había encallado tras el primer libro. A continuación, un amigo de Xu se puso a trabajar en lo mismo con otro de los jesuitas, pero cuando este nuevo intento también parecía destinado al fracaso, Xu y Ricci decidieron asumir el proyecto.

Habían pasado treinta años desde que Ricci había estudiado matemáticas. La pareja empezó a trabajar en los *Elementos* en agosto de 1606: Ricci explicaba en chino lo que decía el texto latino y Xu lo escribía en su chino, probablemente muy diferente del que hablaba Ricci. Era una estrategia de traducción que, en China, tenía una larga tradición como el método con el que se habían traducido los textos budistas en los siglos III y IV. En la historia euclidiana, era similar a los métodos tal vez empleados por los traductores del árabe al latín en el siglo XII. Este método a cuatro manos, que emplearía otras veces, permitió que Ricci mejorara muchísimo en su capacidad de producir textos en chino para su publicación y aprovechó al máximo su comprensión de un texto que ya estaba incrustado en la tradición científica europea y el conocimiento de Xu de los términos matemáticos chinos y su dominio del idioma.

Hubo dificultades, como sucede con cualquier traducción. Ricci se quejaba de que «las gramáticas del este y el oeste son muy diferentes y el significado de las palabras se corresponde solo de una manera vaga e incompleta». Él y Xu aprovecharon cuidadosamente el chino clásico para elaborar una versión que transmitiera de manera convincente el estilo y la estructura de los *Elementos* de Euclides. El sistema de teorema y demostración se mantuvo, por supuesto, al igual que los axiomas y las definiciones iniciales, en la particular presentación que había hecho Clavius. Pero fue difícil encontrar los términos adecuados incluso para los conceptos de *definición, demostración* y *axioma*; tal como afirma el historiador Peter Engelfriet:

> La palabra para ‘definición’, *jieshuo*, es un neologismo bastante desmañado, basado en la raíz etimológica del término latino; el carácter para ‘demostración’, *lun*, significa poco más que ‘discusión’, sin ninguna indicación de un análisis persuasivo; la expresión para ‘axioma’, *gonglun*, significa ‘opinión pública’, que no transmite adecuadamente el sentido de ser una afirmación vinculante o una verdad evidente por sí misma.

Los traductores añadieron elementos a la estructura de las proposiciones en un intento de hacerlas más transparentes; en cada proposición indicaron, además del enunciado, un *fa* (método) y un *lun* (demostración). No había nada en la edición de Clavius que correspondiera a esta estructura, y tal vez surgió de las estrategias docentes orales de Ricci con estudiantes chinos de geometría; recuerda el intento de Proclo, siglos antes, de imponer una estructura en seis partes a las proposiciones para ayudar a sus estudiantes. En algunos puntos había comentarios explicativos adicionales redactados por los traductores. Como cualquier otra traducción y edición, los *Elementos* chinos eran un producto fabricado tanto a partir del texto de Euclides como a partir de otras fuentes (comentarios, discusiones y explicaciones).

Al parecer, Xu y Ricci revisaron el texto tres veces antes de darse por satisfechos y pararon el trabajo tras los seis primeros libros. Las versiones de los *Elementos* con seis libros eran habituales en Europa para propósitos docentes y, aunque Xu quería continuar, Ricci prefirió ver la aceptación que tenía esta primera parte antes de traducir más. El trabajo concluyó en abril de 1607 y se imprimió poco después en la propia imprenta de los jesuitas.

Cada uno de los dos editores firmó un prefacio a estos *Elementos* en chino, en los cuales nos revelan sus complejos motivos para emprender tal tarea y todas aquellas cosas que consideraban que era ese libro y lo que podía conseguir. Ricci subrayó el estatus de los *Elementos* en la educación y su papel como fundamento de las matemáticas: «todo está contenido en su teoría y no hay nada que no se siga de él», «cada principio, cada teoría que se desarrolla, cita este libro como demostración», «cualquiera que se consagre al estudio de las matemáticas debería usar esta obra como “escalera”». Xu retomó este tema y señaló la calidad sistemática de la obra y la certeza que confiere mediante el método deductivo: «Partiendo de lo que es perceptible con claridad, penetra hacia lo más sutil; a partir de lo dudoso, obtiene certeza». En un ensayo independiente sobre los *Elementos* escribió que con su método «no hay necesidad de dudar, no hay necesidad de suponer, no hay necesidad de comprobar y no hay necesidad de cambiar»; «uno no puede escapar de él, no puede discutir en su contra, no puede simplificarlo ni tampoco puede intentar cambiar su orden». Haciéndose eco de algunas cosas que afirma Clavius en su prefacio a los *Elementos,* Xu razona que el estudio de Euclides permite mejorar la mente: «Formará la inteligencia innata de las personas y la hará más refinada y precisa».

Ambos también tenían cosas que decir sobre los usos prácticos en los que podía aplicarse la matemática: desde la excavación de pozos hasta la curación de enfermedades, desde la correcta disposición de los planes de batalla hasta las predicciones astronómicas. Pero para ambos, un punto clave era que el estudio de la geometría podía alejarse de ella misma y tender hacia la teología. Xu esperaba que la obra demostrase que las enseñanzas de su maestro eran dignas de confianza y no ofrecían dudas; si los jesuitas decían la verdad sobre las cosas visibles y poseían métodos para lograr la certeza en el dominio de la naturaleza, sin duda tenían que estar también en lo cierto acerca de los temas trascendentes. Ricci, por su parte, parece que pensaba que los *Elementos* podían ser una manera de introducir en los lectores chinos un modelo de razonamiento correcto que luego podía utilizar en discusiones religiosas; en sus diarios sugirió que los *Elementos* podían servir de curso intensivo de lógica.

Se imprimieron pocos ejemplares del libro y se enviaron varias copias como obsequios, que se pueden reseguir en los catálogos de varias bibliotecas privadas de la época. Ricci también envió copias a Europa, incluida una al propio Clavius. En 1611 se imprimió una segunda edición corregida, y su texto se incluyó en el *Tianxue Chuhan* de 1626, la «colección de enseñanzas celestiales» de Ricci. Como muchos de los objetos de la residencia de Ricci, es posible que los *Elementos* chinos fueran más admirados que comprendidos, pero varios de los términos chinos creados por Xu y Ricci, como el uso de *jihe* con el significado de ‘geometría’ siguen en uso hoy en día.

Xu continuó escribiendo sobre matemáticas en chino. Inició una búsqueda de las obras conservadas de los matemáticos clásicos chinos e intentó cotejarlas con los métodos euclidianos que había aprendido. En cuestión de pocos años, redactó dos textos sobre topografía y agrimensura, el segundo de los cuales comparaba de manera explícita los métodos occidentales y los orientales. Su estudio de los métodos aritméticos chinos, el *Gougu yi,* intentó emplear proposiciones euclidianas para demostrar que los algoritmos chinos eran correctos. Xu también creía que la influencia de la matemática occidental ofrecía una oportunidad de rellenar las lagunas provocadas por la transmisión incompleta de los antiguos textos chinos; sin embargo, las diferencias metodológicas resultaron ser demasiado grandes para que su intento de síntesis resultara satisfactorio. A más largo plazo, los matemáticos chinos se mostraron dispuestos a adoptar las técnicas de cálculo occidentales a la vez que rechazaban, en su mayor parte, los modos de razonamiento en las que se basaban. Las generaciones posteriores de misioneros jesuitas, más avanzado ya el siglo XVII, aceptaron tácitamente el fracaso del proyecto euclidiano de Ricci y, en lugar de obras de Euclides, decidieron traducir libros de texto prácticos y con menos carga teórica.

Xu Guanqi amplió su interés y su fomento del saber occidental, y halló nuevas maneras de vincularlo con los estudios prácticos que tanto apreciaba. Colaboró en obras sobre hidráulica y presionó con éxito para el uso del conocimiento occidental en la reforma de aspectos militares (resulta irónico que la invasión de los manchúes, que en 1644 ocuparon China, se produjera con ayuda de armas occidentales). Hacia el final de su vida, fue ascendido a ministro de ritos y canciller de la academia Hanlin. Siguió escribiendo y se encargó de una reforma del calendario a partir de los métodos astronómicos occidentales, en un curioso eco de la obra de Clavius un siglo antes, a medio mundo de distancia. En todas estas empresas, Xu recibió el apoyo de sus estudiantes y de una nueva generación de misioneros jesuitas. En el momento de su muerte, en 1633, estaba trabajando en un tratado de agricultura.

La colaboración de Xu Guangqi y Matteo Ricci fue un momento excepcional, en que un contacto personal se convirtió en un contacto cultural, y fue uno de los encuentros más extraordinarios de los que se produjeron con los *Elementos* de Euclides. El período de su colaboración finalizó cuando Xu regresó a Shanghái en 1608 para el funeral y el luto por la muerte de su padre.

Para Ricci, el proyecto euclidiano era solo una parte de un enorme proyecto de redacción, traducción (incluidas otras obras de matemáticas) e impresión y, claro está, de contactos personales. Se describió a sí mismo deambulando por la ciudad, paseando por las calles con un velo negro sobre su rostro para protegerse del polvo. Sus conocimientos, su memoria y su amabilidad continuaron impresionando a muchos que lo conocían.

Pero toda esta actividad pasaba factura y Ricci ya no era ningún joven. En 1610 se organizó una nueva ronda de exámenes *jinshi* en la capital, a la que acudieron cinco o seis mil aspirantes. Además de realizar los exámenes, visitaron atracciones culturales, entre las cuales se contaba la iglesia y residencia de los jesuitas. Para cada visitante, Ricci hacía de guía y explicaba qué eran los objetos sagrados y las imágenes de la iglesia; con cada uno entablaba una conversación educada y erudita, mostrando los conocimientos occidentales, las enseñanzas cristianas y los libros europeos.

Ricci cayó enfermo y murió el 11 de mayo. Gracias a un favor imperial excepcional, a instancias de uno de los estudiantes de Xu, se concedió una parcela de tierra para su entierro, cuya propiedad sería de la orden jesuita a perpetuidad. Según un biógrafo chino de la época, el favor se concedió sobre todo por la traducción de Euclides.

No culpéis a nuestro autor

Geometría en escena

> LÍNEA: ¡Ja, ja, ja! Creo que si prosigue el carnaval cambiaré mi forma y seré no sé qué. Con unos macarrones añadiré algo de latitud a mi longitud; creo que haré que los sabios discutan acerca de mi definición, porque si bien soy Línea, soy bastante ancha de miras.

Estas palabras fueron escuchadas por un grupo de estudiantes ingleses en Roma en, probablemente, el carnaval de 1635, al asistir a la representación de una de las respuestas más adorables y a la vez intrigantes a los *Elementos* de Euclides en el siglo XVII. La obra, escrita en inglés y titulada *Blame not our author* ('No culpéis a nuestro autor') era la creación de una mano anónima; sus cuatro protagonistas son cuatro formas geométricas, Cuadro, Rectángulo, Línea y Círculo, acompañadas de Regla y Compás, y también tienen un pequeño papel Semicírculo, Rombo y Triángulo.

Puede parecer un punto de partida un poco bobo, pero la trama tiene una complejidad extraordinaria, porque los personajes no están a la altura de lo que podría esperarse de unas formas geométricas por lo que respecta a la pureza y la estabilidad. Interactúan y sufren; aunque son planos, muestran «profundidad» en sus sentimientos. Es una obra llena de juegos de palabras de discutible brillantez, como «acompásame», «no estás en tu elemento», etc.

En la obra, las formas consiguen rebelarse contra el Compás y la Regla que las habían creado para poder así cambiar sus formas. Los cuadrados pueden soñar en convertirse en círculos; Rectángulo imagina una especie de golpe de Estado cósmico liderado por él y sus colegas de cuatro vértices, que lo llevaría a ser «el cabecilla del círculo de los planetas». ¿Órbitas planetarias rectangulares? Sin duda, la receta perfecta para el caos, «un quebrado en el orden universal de las cosas», tal como lo expresa otro personaje.

El argumento principal gira en torno al deseo del maestro de Rectángulo, Cuadro, de ser circular. No piensa tanto en un procedimiento geométrico capaz de lograr tal cosa («cuadrar el círculo» había sido un infame problema desde la Antigüedad) como en una metamorfosis mágica al estilo de Ovidio. No obstante, las cosas empiezan a torcerse enseguida. Un tratamiento farmacéutico no logra producir el resultado deseado; luego, los personajes lo prueban con un artefacto denominado «la hija del trazacuadros», con el que atan a Cuadro con unos aros para redondearlo. Esto tampoco funciona y, de hecho, resulta ser una broma malvada de Círculo. Una vez se libera de sus ataduras, Cuadro se pasa el resto de la obra planeando su venganza.

La trama se complica aún más cuando el secuaz de Cuadro, Rectángulo, intenta manipular la situación a su propia conveniencia. Con una mentira tras otra, convence a Triángulo de que Círculo ha matado a Compás, pero al final sus falsedades salen a la luz, se solucionan todos los entuertos y Regla, el gobernante, interviene para castigar a Rectángulo:

> Ven, Felicidad, y con tu pacífico círculo de olivo
> corona nuestras cabezas y nuestras nubladas frentes […]
> Que los cuadrados, del temor y la vulgar servidumbre
> sean vasallos por obra de la regla y el compás.

Blame not our author nunca se publicó; solo existe en un único manuscrito que se halla en el Colegio Inglés de Roma, la academia de formación de los jesuitas ingleses desde 1579. Es posible que el anónimo autor fuera uno de los profesores de la institución, pero no se ha podido identificar la caligrafía. Quizá era el maestro de física, asignatura en la que se estudiaban los *Elementos* durante el segundo año.

Aunque parece que fue prácticamente la única obra teatral de su época en que los personajes son formas geométricas, *Blame not our author* estaba emparentada con obras morales más o menos extravagantes en varios lugares de tradición académica en los años iniciales del siglo XVI. Todas ellas tratan de temas como la guerra entre los sustantivos y los verbos, o el *Combate entre la lengua y los cinco sentidos*. Son obras metafóricas y muy diversas, repletas de alusiones a historias míticas, fábulas, relatos bíblicos, herbología, historia antigua y filosofía; en definitiva, todo lo necesario para complacer al intelecto de una audiencia estudiantil. Otra debilidad de estas obras, casi obsesiva, son las imágenes de comida, lo que indica lo que los estudiantes tenían en la cabeza, tanto en el Colegio Inglés como en otras partes. Para que Cuadro lograra su objetivo:

> Ahora nuestros cuadrados tajaderos se convertirán en bandejas redondas, nuestros birretes cuadrangulares en las redondas boinas de los ciudadanos de Londres, nuestras cuadripuntiagudas empanadas en *pastichios*.

Y, cuando las cosas se estaban poniendo feas, Línea amenaza a Círculo:

> Déjame a solas con él: lo partiré por la mitad y haré tantos triángulos de él como el cocinero que rebana una torta en porciones.

Además de facilitar los personajes, los *Elementos* de Euclides tienen una intervención directa en la obra, en la forma de citas de algunas de sus definiciones. De hecho, las citas proceden de la ubicua edición de los *Elementos* de Christopher Clavius:

> LÍNEA: ¿Dónde estás, Rectángulo?
> RECTÁNGULO: Perpendicular sobre tu espalda. [en latín:] *Cuando una línea recta yace sobre una línea recta…*
> LÍNEA: ¿Estás haciendo definiciones a mis espaldas? [en latín:] *Una línea es recta cuando es la más corta entre dos puntos*. Voy a trabajar por el camino más corto.

Dicho sea de paso, la edición de 1591 de los *Elementos* de Clavius aún se puede encontrar en la biblioteca del Colegio Inglés.

Blame not our author puso formas geométricas en escena y las utilizó para crear efectos novedosos, sorprendentes y confusos. Un melancólico Cuadro, con su anhelo de una imposible transformación en círculo, muestra que las emociones y los deseos humanos no siempre encajan del todo con las rígidas leyes de la geometría. De hecho, él y sus compañeros comentan una y otra vez la tensión que hay entre los ideales matemáticos y la realidad. Además de ser una metáfora de la verdad y la certeza, la geometría se puede adaptar a usos prácticos, unos usos que a veces parecen incómodos a los lectores cuya experiencia con la geometría era una experiencia de la hermosa estructura deductiva de Euclides.

> CÍRCULO: ¿Por qué debería sojuzgarme ante un
> servil innoble que está en las manos de todos?
> Vil compás, secuaz de cualquier buhonero,
> manoseado y girado por todo carpintero:
> cada picapleitos ata sus desviados brazos
> a distancia de compás en sus garabatos.

Por su parte, la descuadrada experiencia vital de Cuadro podía tocar la fibra de los estudiantes del Colegio Inglés, separados de sus compatriotas por la religión y de sus vecinos por el idioma. El lenguaje de la geometría ofrecía a Cuadro (y al autor) una manera de expresar esa desorientación, a pesar de la idea de que las matemáticas tienen que centrarse en el orden, la razón y la ley.

> ¿Cómo podría escatimar mis pasiones
> para ver la esfericidad de los cielos,
> los elevados planetas, estrellas y jerarquías,
> circulares todos, mientras Cuadro a cuadros queda?

Así, en *Blame not our author*, la geometría se vuelve una forma de expresar y explorar la irracionalidad: desencajamiento, desorientación y deseos imposibles. Lejos de ser una mejora para la mente, para el pobre Cuadro la manipulación geométrica sirve de acicate hacia la locura y el frenesí. En él, «el ángulo recto era de todo menos (cor)recto», tal como lo ha expresado un comentarista moderno; y de hecho, Regla y Compás son una aberración, caprichosos, errantes. Tal vez, como sugiere uno de los personajes, el problema recae en el propio Euclides:

> COMPÁS: Quien más me ha fastidiado ha sido Euclides, con una cierta demostración que tenía que hacerse de un [en latín] *círculo-heptágono*. Te aseguro que me ha machacado.

O acaso el «autor de nuestras penas» era el «cerebro matemático» del dramaturgo. Aquí quizá podemos ver una referencia a la proliferación de versiones e interpretaciones de Euclides. Por su propia abundancia, todas estas versiones tal vez convertían la experiencia de leer y estudiar a Euclides en una tarea confusa e inestable, en lugar de una asociada con la belleza y la perfección.

Blame not our author ilustra la complejidad a la que llegaron las ideas sobre matemáticas y geometría en el siglo XVII. También pone de manifiesto que la geometría euclidiana se estaba convirtiendo en algo con lo que jugar y con lo que reír, algo a lo que se podía asignar nuevos significados y provocar nuevas situaciones y dramas. Un vestido, en el fondo, con el que el ambicioso autor podía ataviarse para muchos propósitos diferentes. Si las formas geométricas y las definiciones euclidianas podían participar en una farsa tan carnavalesca como *Blame not our author*, al parecer Euclides se estaba transformando en un disfraz con el que se podían interpretar muchos papeles.

Baruch Spinoza

El modo geométrico

Ámsterdam, 1656. Un joven judío es expulsado de la sinagoga. Se trata de un hombre de complexión pequeña, de veintitrés años, con un hermoso rostro, un largo cabello negro y un bigote y unos ojos del mismo color. Su destino cambiaría la historia de la filosofía.

> Que sea maldito de día y de noche, que sea maldito al acostarse y al levantarse, que sea maldito cuando sale y cuando entra […] Nadie debe comunicarse con él de palabra ni por escrito, ni mostrarle ningún favor, ni estar con él bajo el mismo techo ni acercarse a más de cuatro codos de él [unos tres metros] ni leer nada escrito por él.

En la Europa del siglo XVII no pocas personas utilizaron los *Elementos* de Euclides como ejemplo de cómo debía ejercerse el pensamiento, de cómo se estructuraba el conocimiento o de cómo trabajaba realmente la razón. Había títulos como *El Euclides de la lógica*, *El Euclides de la medicina*, *Elementos de jurisprudencia* o *Elementos de teología*, y muchos más. Sin duda, había buenos precedentes antiguos y medievales de este tipo de textos, como los *Elementos de teología* de Proclo.

Es bien famosa la descripción del filósofo inglés Thomas Hobbes, quien no se quedaba atrás en su estimación de la geometría euclidiana, de su primera toma de contacto con el tema:

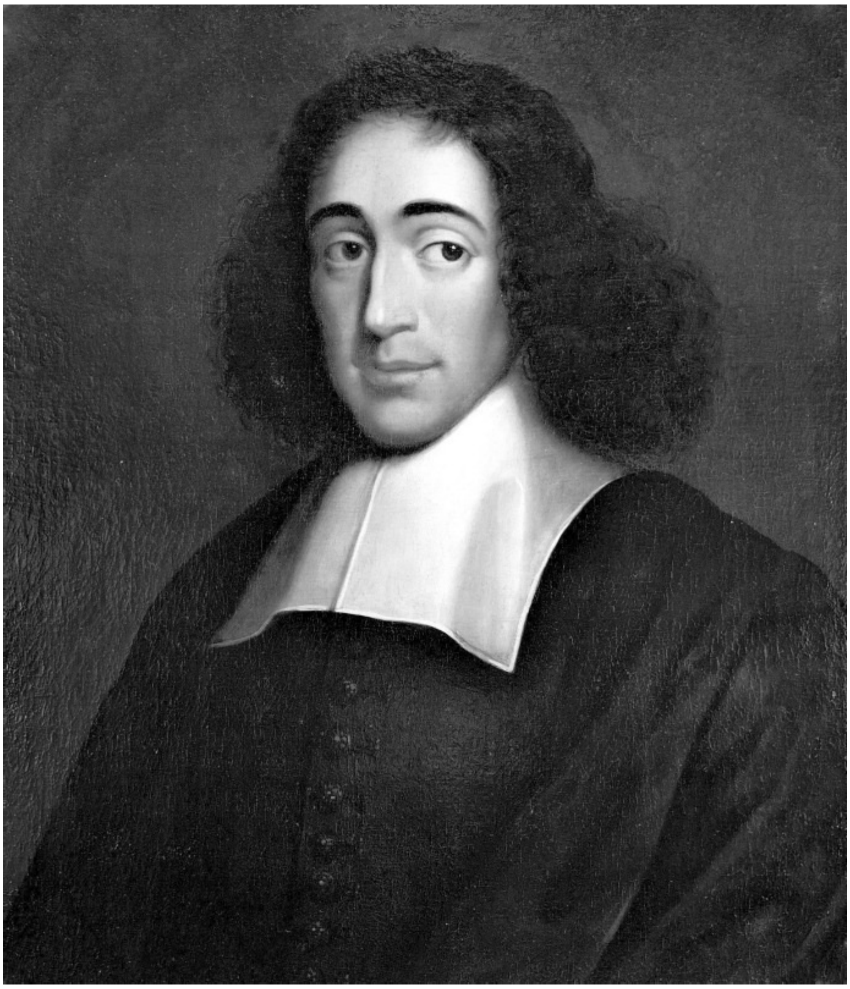
> En una biblioteca me topé por azar con los *Elementos* de Euclides, que estaban abiertos por la proposición 47 del primer libro. Cuando leí estas palabras, «En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto», me dije al instante que aun siendo tal cosa cierta, no podía ser conocida por el hombre, ignorante como yo era

> entonces de los asuntos matemáticos. Pero al inspeccionar la demostración, me llevó de inmediato a la proposición 46, y de esta a las anteriores, hasta que llegué a los primeros principios.

En esta historia, los *Elementos* de Euclides no solo son un modelo de certeza, sino también de claridad y transparencia; los vínculos lógicos eran fáciles de apreciar y de comprobar. Ojalá todos los temas pudieran tratarse como este, pensaba Hobbes, que más adelante tituló una de sus obras principales «elementos» de filosofía. Creía que «los geómetras han gestionado su territorio de manera destacadísima» y que si las leyes de las acciones humanas pudieran comprenderse con certeza geométrica, se podrían eliminar la guerra, la ambición y la avaricia.

Así, había una resuelta tendencia que tomaba a Euclides y lo utilizaba como sustituto de la lógica tal como se concebía tradicionalmente: ¡Aristóteles ha muerto! ¡Larga vida a Euclides! El obispo Berkeley escribiría en 1734 que «la geometría es una lógica excelente» (el contexto era una defensa de las matemáticas, tal como él lo veía, frente a su dilución en novedades lógicamente problemáticas). Euclides continuó siendo una referencia definitiva de certeza durante todo el siglo XVII y ya entrado el XVIII. Su estilo de teoremas y demostraciones adquirió cada vez más prestigio, cada vez una mayor reputación de ser la relación más simple posible con la verdad, una relación que otras formas de discurrir nunca podrían igualar. Dejando de lado algunos debates acerca del estatus de las matemáticas y la certeza de sus demostraciones, que habían constituido el trasfondo de la obra de Clavius, bastantes autores del siglo XVII escribieron sus obras de filosofía, física o teología en un estilo geométrico, convencidos sin duda de las ventajas que ello aportaría en términos de claridad, certeza, brevedad, transparencia y persuasión.

Una de las cimas de toda esta cordillera de autores fue la obra de Baruch Spinoza. De padres sefardíes, nació en Ámsterdam en 1632 y su nombre significa ‘bendecido’; estudió hebreo, la Biblia hebrea y literatura rabínica en la escuela talmúdica local. Dejó pronto los estudios para trabajar en el negocio familiar de importación y venta de frutas tropicales en una parada en el canal principal de Ámsterdam. Sin embargo, hacia los veinte años tenía claro que su futuro estaba en la filosofía y empezaba a destacar por la heterodoxia de sus opiniones. En verano de 1656, rechazando ya de plano los fundamentos del judaísmo, fue expulsado de la comunidad con una ardiente acusación de anatema.



Baruch Spinoza.

Durante casi todo el resto de su vida, Spinoza trabajó como pulidor de lentes, haciendo microscopios y telescopios además de lentes individuales. Fue cambiando de residencia por los Países Bajos, primero en Leiden y luego en La Haya. Estudió latín y filosofía antigua y moderna, especialmente la de Descartes, que debatía en un círculo de amigos. Recibió visitas de científicos y filósofos de Inglaterra y Alemania y continuó filosofando.

Para un estudiante llamado Cesario, preparó unas notas sobre partes de los *Principios de filosofía* de Descartes, en un estilo euclidiano. Su descripción de la materia era en forma de axiomas, definiciones, proposiciones y demostraciones, y demostraba al modo geométrico algunas de las conclusiones del libro de Descartes. Sus amigos le convencieron para que compartiera el texto y, así, su exposición en dos partes de los principios cartesianos se convirtió en su primera obra publicada, en 1633; de hecho, fue también la última que publicaría con su nombre.

Está claro que la matemática, la geometría y Euclides tenían una relevancia especial para Spinoza. Tenía libros de matemáticas de autores antiguos y modernos, y ya había utilizado un estilo geométrico para elaborar demostraciones de la existencia de Dios, tanto en una carta a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society de Londres, como en un anexo a un breve tratado no publicado sobre temas filosóficos. Al reordenar las demostraciones de Descartes en el mismo estilo, iba aún más lejos, aunque con propósitos educativos y, en el fondo, en contra de la opinión del mismo Descartes, que consideraba que el método geométrico «no capta las mentes de aquellos ansiosos por aprender, pues no muestra cómo se descubrió el tema en cuestión» (Descartes incluso había ofrecido una muestra, con cuatro proposiciones y un corolario de sus *Meditaciones*, para demostrarlo). Para Spinoza, en cambio, tal objeción no era válida; el prefacio a su versión de los *Principios* de Descartes afirma con vehemencia que para hallar la verdad y para enseñarla, la mejor manera era «la de las matemáticas, que demuestran sus conclusiones a partir de definiciones, postulados y axiomas».

En cambio, a diferencia de muchos de sus contemporáneos, Spinoza no estaba convencido de que aplicar las matemáticas al mundo natural fuera una forma de avanzar en el conocimiento. Para Spinoza, las pruebas empíricas (incluso las más cuantitativas) siempre eran sospechosas y, como máximo, podían tener un cierto valor heurístico, pues nunca podían llevar a un conocimiento cierto.

Tras su publicación cartesiana, Spinoza se puso a trabajar (o continuó trabajando) en una exposición de sus propias ideas filosóficas, claramente diferentes de las de Descartes, para su círculo de eruditos amigos. Durante un tiempo, experimentó con una redacción discursiva, alejada de la manera geométrica, pero a principios de la década de 1660 estaba reescribiendo su material en un estilo geométrico, que ya había decidido que era la mejor manera, si no la única, de presentar sus ideas. Durante varios años siguió escribiendo y enviando partes del texto a sus amigos para que lo comentaran.

Spinoza hizo un paréntesis en 1665 para escribir un tratado teológico y político (aunque no en estilo geométrico). Su cruda reformulación de conceptos tradicionales como el de *dios* o su reinterpretación de las escrituras lo hicieron casi imposible de publicar, de manera que acabó apareciendo como obra anónima en 1670; de todos modos, como su autoría era un secreto a voces, lo hizo famoso por toda Europa. En los Países Bajos, la situación política se estaba deteriorando, con el famoso asesinato de los republicanos hermanos De Witt por parte de una muchedumbre monárquica en 1672; una consecuencia fue que dos años después, el tratado anónimo fue prohibido por el Consejo de la Iglesia Reformada de Ámsterdam y la corte de justicia (secular) de Holanda.

Spinoza regresó a su obra filosófica, que luego sería conocida como *Ética*, sabiendo que su publicación sería difícil, si no imposible. Rechazó ofertas de trasladarse a París o a Heidelberg, y permaneció en unos convulsos Países Bajos mientras finalizaba su libro, en los primeros años de la década de 1670. Se trata de una obra notable, uno de los tratados filosóficos más atrevidos que se hayan redactado nunca. Era un intento de desentrañar las consecuencias de la naturaleza de Dios, tal como Spinoza lo concebía, en cada campo del pensamiento: la mente, la moral, las emociones, la política, la religión. Una vez completado, en apariencia era una obra de lo más austera; al abrirla, el lector se enfrentaba de inmediato a una serie de definiciones, sin ningún prefacio ni intento de guía o introducción. El libro estaba escrito en un estilo por completo geométrico, desde las definiciones (sustancia, atributo, modo, Dios, eternidad) y los axiomas («el conocimiento de un efecto implica y depende del conocimiento de una causa») hasta 207 proposiciones, cada una con su demostración.

Este estilo austero oculta en parte las fuentes de la obra: muchas de las ideas y algunas conclusiones proceden de Descartes y de Hobbes, o de la tradición filosófica judía, como Maimónides o Ben Gershon. Sin embargo, en su conjunto se trata de una obra radicalmente original y sorprendente. La respuesta de Spinoza a la pregunta filosófica más básica de todas —qué existe —, era de lo más simple: Dios. Para Spinoza, todo lo que existe no lo hace de manera independiente, sino como una modificación, un «modo» de Dios. Así, todo lo que los seres humanos pueden querer saber está implícito, está incluido, en la naturaleza y las propiedades de la divinidad. Los «modos» tienen atributos; en concreto, los objetos físicos tienen el atributo de la extensión, mientras que las mentes tienen el atributo del pensamiento (y, en sentido estricto, no hay interacción entre ambas).

Hay un cierto debate sobre por qué Spinoza utiliza el término *dios* en lugar de *naturaleza* (o alguna otra cosa) para su entidad fundamental; sin duda, no hay nada en el dios de Spinoza de un amor hacia los seres humanos, no hay nada de sagrado en él, no hay ningún deseo de ser adorado. De hecho, nada puede resultar más impersonal que el dios de Spinoza, y en su desprecio por el antropomorfismo es posible que haya un reflejo de los puntos de vista (¿y de la antipatía?) que le llevaron a ser expulsado de la sinagoga de Ámsterdam: «Si los triángulos pudieran hablar, nos asegurarían que Dios es básicamente triangular; si los círculos pudieran hablar, nos dirían que Dios es circular».

El azar, el libre albedrío y la relación de causa y efecto, tal como la mayoría de la gente entendía estos conceptos, también desaparecen en la *Ética*. Si todo es consecuencia lógica de la naturaleza divina, no hay lugar para la voluntad o la contingencia:

> Pero yo pienso haber mostrado con bastante claridad que de la suma potencia de Dios, o sea, de su naturaleza infinita, han fluido necesariamente, o se siguen siempre con la misma necesidad, infinitas cosas en infinitos modos, esto es, todo: de la misma manera que de la naturaleza del triángulo se sigue desde la eternidad y para la eternidad que sus tres ángulos equivalen a dos rectos.

Así, «Dios no pudo haber producido las cosas de ninguna otra manera, ni en ningún otro orden en el que fueron producidas». Podríamos decir que había razones para todo pero causas de nada.

El mundo que nos presenta Spinoza es un mundo lóbrego. Su punto de vista es que las personas no pueden controlar lo que sucede ni tampoco pueden controlar sus reacciones a lo que sucede; ni tan solo pueden controlar sus emociones. Spinoza va más allá de los estoicos y de su famosa doctrina de resignación, exigiendo a los seres humanos que acepten que no poseen libertad ni tienen ningún tipo de elección. Uno de los pocos puntos de consuelo se halla en un reflejo de la doctrina también adoptada por Ben Gershon según la cual la parte de la mente que consiste en ideas verdaderas es, por su propia naturaleza, eterna y no muere con el cuerpo.

Cuando la *Ética* de Spinoza, en su parte final, se ocupa por fin de la ética, de hecho no tiene mucho que decir. No hay lugar para la responsabilidad moral; la virtud o la excelencia, para él, no son más que una tendencia innata de los entes biológicos de buscar su propia preservación y obtener ventajas. Para los seres humanos, la virtud y el provecho (y la inmortalidad) implican conocimiento, nada más. El objetivo de la vida era sustituir las falsas creencias por las verdaderas, elevarse por encima de la turbulencia de las emociones y llegar a una especie de resignación infinita, una conformidad con la necesidad de todas las cosas.

La *Ética* fue una obra extraordinaria y recibió un amplísimo abanico de reacciones. Al final, se imprimió pocos meses después de la muerte de Spinoza en 1677, primero en latín, el idioma en que la había escrito, y luego en una traducción al neerlandés. Se convirtió en un libro tremendamente influyente, que marcó el camino de buena parte de lo que más adelante se denominó *racionalismo*, tanto para sus seguidores como para sus detractores. Hasta el día de hoy los filósofos siguen debatiendo acerca de la interpretación del libro, con desacuerdos importantes sobre las cuestiones más fundamentales de lo que quería decir Spinoza y lo que ello implica. El estilo geométrico en que escribió ha sido fuente de admiración por su claridad y precisión, pero también ha sido ridiculizado por su pretenciosidad e irrelevancia. Friedrich Nietzsche, que estaba de acuerdo con Spinoza en muchos aspectos básicos, se burló del «juego de manos de la forma matemática» con el que está escrita la *Ética*. La mayoría de las discusiones modernas parecen coincidir en el uso de términos como *intimidante*, *severa* y directamente *difícil* al caracterizar la obra. Ahora bien, sin duda Spinoza lo que quería era crear claridad y precisión adoptando una forma y un estilo con el que muchos lectores de su época estaban familiarizados, y que no habrían considerado intimidante o severo.

Spinoza se vincula directamente con todos aquellos de su época y de épocas anteriores que creían que la geometría tenía una relación especial con la verdad y, por ende, asignaban un estatus especial al método geométrico. Proclo habría reconocido sus métodos y Ben Gershon habría identificado algunas de sus conclusiones; sin duda, Matteo Ricci habría estado de acuerdo en que el conocimiento, en el fondo, está moldeado como los *Elementos* de Euclides. Y de hecho, este era el punto clave, el axioma no explícito que Spinoza asumía en todas partes: que el conocimiento, el conocimiento verdadero, funciona como la deducción geométrica, está estructurado como una red de relaciones lógicas y se forma mediante una sucesión lógica de consecuencias a partir de suposiciones, de manera que «el orden y la conexión de las ideas es lo mismo que el orden y la conexión de las cosas».

Este aspecto era una indicación de lo que, por lo demás, podría parecer un proyecto arbitrario de Spinoza de presentar sus ideas en forma geométrica. En efecto, tal forma tenía ventajas reales en cuanto estilo retórico, pues era clara, precisa y concisa, sobre todo en su capacidad de remitir con rapidez a varios resultados previos mientras se demuestra uno nuevo. Era un método persuasivo, en el sentido de que a no ser que el interlocutor pudiera hallar un error en el razonamiento, el acuerdo era obligado; tal como lo expresó Descartes, «el lector, por muy tozudo o discutidor que sea, [quedaba] obligado a estar de acuerdo». Además, como el método estaba formado por apartados breves, se podía interrumpir cuando fuera necesario con «comentarios» que recalcaban las conclusiones con recursos retóricos más habituales y apelaciones a las emociones, como la ironía o el sarcasmo.

Pero había mucho más que una presentación innovadora; la disposición geométrica era la correcta para la *Ética* de Spinoza porque reflejaba la estructura de las cosas que el libro describía. El libro empezaba con unas pocas premisas y lo deducía todo de manera lógica, del mismo modo que el universo de Spinoza empezaba con Dios y sus propiedades y todo lo demás se deduce de él de forma lógica. El patrón de deducción infinita presentado en el libro en realidad era, para Spinoza, la forma en que estaba estructurado el mundo, la naturaleza de las cosas. La deducción rigurosa reflejaba la necesidad que gobernaba la naturaleza; en consecuencia, emplear un método geométrico en su presentación era la única manera que tenía Spinoza de mostrar esta característica tan básica de su concepción del mundo.

Por último, el método geométrico, además de persuadir a los lectores y de mostrar la estructura de la realidad, también tenía la capacidad, según Spinoza, de mejorar la mente de los lectores. Podía inculcar la virtud especial no solo de conocer las cosas correctas, sino de conocerlas del modo correcto. Podía hacer que el orden y la conexión de las ideas en la mente de las personas reflejara el orden y la conexión de las cosas en la realidad. Para Spinoza, esto se acercaba mucho a la tarea básica de la ética: limpiar la mente de ideas erróneas y sustituirlas por las correctas, contrarrestar la emoción y convertir a los charlatanes en razonadores. Spinoza pretendía que el hecho de esforzarse a través de demostraciones de estilo geométrico fuera una especie de terapia de autoayuda para los lectores de su *Ética*.

Paradójicamente, en todos estos aspectos, Spinoza, que había rechazado en gran parte la tradición filosófica que le precedía, se sitúa cerca de algunos de sus predecesores, especialmente de los platónicos, para los cuales todo emanaba del Uno y para los cuales todo el conocimiento tenía que deducirse a partir de las propiedades del Uno. El dios de Spinoza no era el Uno platónico, pero como ellos, había encontrado una vía hacia el conocimiento verdadero y la mejora humana que pasaba, inexorablemente, por la geometría euclidiana.

Anne Lister

La mejora del intelecto

Halifax, Yorkshire; martes 13 de mayo de 1817. Una joven escribe en su diario sobre las actividades de ese día:

> Entre la una y las dos, las primeras siete proposiciones del primer libro de Euclides, con el cual quiero renovar mi familiaridad con las matemáticas y progresar diligentemente, con la esperanza de, si sigo con vida, alcanzar en un cierto tiempo una competencia pasable en los estudios matemáticos.

La creencia de que el conocimiento verdadero estaba estructurado como la geometría euclidiana llegó a su clímax con Spinoza. Después de él, pocos pensadores de relevancia utilizaron el «modo geométrico» con tal exhaustividad fuera del campo de la geometría. El mundo filosófico estaba cambiando (y, de hecho, Spinoza había sido bastante responsable de cambiarlo) y las suposiciones sobre las que los pensadores desde Platón hasta Ben Gershon habían basado la importancia cósmica de la geometría ya no eran válidas. Las formas arquetípicas eternas ya no estaban en boga, y en consecuencia, tampoco la posición excelsa de la geometría como puente entre lo mundano y lo divino, entre la mente humana y la mente de Dios.

Sin embargo, la convicción de que el estudio de la geometría era bueno para cualquier persona sobrevivió, y lo hizo con una energía inusitada a pesar de que su fundamento filosófico había quedado relegado a una posición secundaria. John Locke, sin duda el más destacado teórico de la mente en la Inglaterra del siglo XVIII, había afirmado que la matemática era «una forma de afianzar en la mente un hábito de razonar atento y dirigido» y que «en todo tipo de razonamiento, cada argumento debe tratarse como una demostración matemática». Como en el caso de Spinoza y de muchos otros que le habían precedido, para Locke el conocimiento era un tipo de virtud moral; no se trataba solo de conocer las cosas correctas, sino también de conocerlas de la manera correcta. Y la geometría era la manera correcta (o así se lo parecía a muchos que se hacían eco de los sentimientos de Locke, en Inglaterra y en otros lugares).

En los siglos XVII y XVIII se hizo popular una historia del sexto libro de la *Arquitectura* de Vitrubio (del siglo I a. C.) como ilustración de la identidad de la geometría con la humanidad, la razón y la mente civilizada y centrada. En esta historia, Aristipo, un filósofo socrático, naufraga y acaba llegando a una playa en Rodas; allí ve unos cuantos diagramas geométricos, presumiblemente trazados sobre la arena, y lleno de alborozo dice a sus compañeros náufragos: «¡No temáis! ¡Pues veo las señales de la humanidad!». Es evidente que los simios no trazan diagramas geométricos en la arena, como tampoco lo hacen los bárbaros. La historia se hizo famosa, y la edición de 1703 de las obras de Euclides, preparada por David Gregory, muestra una imagen de Aristipo en la playa; también lo hace la edición de Apolonio de 1710, de Edmond Halley, así como, ya a finales de siglo, la edición de Arquímedes de 1792 de Giuseppe Torelli.

La posición de Euclides en esta época era ya, en parte, una cuestión comercial, pues los editores tenían buenas razones para alabar y promocionar este casi perenne superventas. El mercado de nuevas versiones de los *Elementos* no parecía dar muestras de cansancio durante el siglo XVIII, y los editores siempre hallaban ingeniosas y novedosas maneras de presentar el texto. Se imprimió en nuevos idiomas (sueco en 1744, hebreo en 1775, portugués en 1792); añadieron demostraciones algebraicas, mucho más en boga y cada vez más comprensibles, en lugar de las geométricas, y adornaron el texto con nuevos comentarios explicativos, mejores y más completos.

Fue en Inglaterra y en el mundo angloparlante donde la obsesión por el estudio de Euclides prendió con más fuerza y duró más tiempo. En el país había una tradición matemática comparativamente conservadora, tanto por lo que respecta a la investigación como a la docencia universitaria, y uno de sus pilares era un profundo conocimiento de Euclides. A finales del siglo XVIII, solo en Inglaterra se habían publicado casi cincuenta obras que eran, en parte o por completo, versiones de los *Elementos* de Euclides.

La permanente visibilidad de Euclides también era, en cierto sentido, una cuestión institucional: los *Elementos* formaban parte de los planes de estudio de varias universidades influyentes. A mediados del siglo XVIII David Gregory (hijo de un matemático y primer Regius Professor de historia en la Universidad de Oxford) hizo que Euclides fuera uno de los requisitos en los exámenes de su facultad; Euclides se enseñaba en Harvard hacia 1730. Otras instituciones se sintieron obligadas a seguir su ejemplo.

Lógicamente, las escuelas que aportaban alumnos a las universidades intentaban preparar a sus estudiantes con un estudio preliminar de los *Elementos*, o de alguna parte de ellos, con el resultado de que (sobre todo en el mundo anglohablante) Euclides alcanzó una posición dominante en la formación matemática de la educación secundaria, las academias privadas y las clases particulares. Este dominio también era, en parte, una cuestión social: el hecho de que las universidades y escuelas de élite consideraran Euclides relevante hizo que muchas personas llegaran a la conclusión de que una de las cosas que tenían que hacer para tener una buena educación era estudiar a Euclides. El aprendizaje autodidacta y el aprendizaje mutuo en clubes matemáticos locales se multiplicó, y muchas personas leían y releían los *Elementos* de Euclides, con la convicción de que les aportaba algo social o intelectualmente, o ambas cosas.

Lady Anne Conway, en el Londres de la década de 1650, aprendió aritmética de manera autodidacta y contrató a un tutor para que le ayudara a vadear por los *Elementos* cuando vio que no podía hacerlo sola. Logró una reputación de «rápida competencia» en el tema y recibió una carta de su hermano instándola a limitarse a los primeros seis libros, «pues el estudio de la matemática puede ocupar toda la vida de uno». Su esposo también se animó a introducirse en el estudio de Euclides, a pesar de su compromiso con asuntos de Estado (estamos en 1657-1658, tal vez el período más difícil de la Mancomunidad de Inglaterra). Unos pocos años después, su antiguo tutor Henry More, conocido como filósofo de tradición platónica, se retiró a Cambridge, enfermo, y se convenció de que el estudio de la geometría como descanso de la teología le había curado de sus fiebres (además del cambio de aires): «Casi había olvidado todo lo poco que sabía de geometría, [pero] lo he recuperado con cierto provecho, así como, de paso, también mi salud, espero».

Más adelante, durante el siglo XVIII, los ingleses con aspiraciones matemáticas disponían de una vitrina para sus talentos en forma de revistas matemáticas, publicaciones anuales, trimestrales o mensuales de preguntas y respuestas que presentaban selecciones diversas de problemas matemáticos y las soluciones que los lectores sugerían. Las más conocidas tal vez fueran el *Ladies' Diary* y el *Gentleman's Diary*; casi la mitad de sus problemas matemáticos eran geométricos, la mayoría resueltos mediante métodos puramente euclídeos y algunos citando explícitamente a Euclides. Era una manera de hacer públicos (aunque a menudo detrás de un seudónimo) logros euclídeos que, de otro modo, hubieran quedado en el ámbito privado; a menudo eran logros de personas que, a causa de su clase o su sexo, no habían recibido educación formal en el tema y se habían educado de forma autodidacta con ayuda de un libro o un tutor. Un ejemplo típico es el de Alex Rowe, que en 1797 preguntó cómo trazar un triángulo rectángulo dadas las longitudes de las dos rectas que lo dividen en dos a través de sus otros dos ángulos, no rectos (es decir, que lo bisecan); es un problema elegante que podía haber aparecido en los *Elementos*. Unas dos docenas de lectores aportaron soluciones correctas.

Anne Lister era la hija mayor aún con vida de una familia terrateniente en horas bajas; su padre era un capitán del ejército y su patrimonio, Shibden Hall, en Halifax, Yorkshire. Anne es un auténtico regalo para un historiador gracias a los veintisiete volúmenes de su diario, con casi cuatro millones de palabras, la mayor parte del cual aún no se ha estudiado con detalle ni publicado (alrededor de un sexto del diario está escrito en código).

Anne asistió a escuelas privadas en Ripon y York y a los dieciséis años «empezó Euclides» mientras iba a la escuela de un tal Mr. Knight en Halifax. Con algunas vacaciones, se lanzó a un libro de los *Elementos* por mes, más o menos, y acabó el libro V en agosto y el VI en septiembre, cuando parece que se detuvo. Mr. Knight fue nombrado vicario de Halifax y Anne Lister se convirtió en la administradora *de facto* de la finca de Shibden, tarea en la cual demostró ser una empresaria sagaz con una buena cabeza para los números.


Anne Lister.

Persona poco convencional en muchos aspectos, adoptó vestimentas masculinas de riguroso negro y se presentaba como un «caballero», supervisando la finca y las tierras con ayuda de un asistente. A Anne Lister se la ha calificado de «la primera lesbiana moderna». Inquieta por su rango social y por el comportamiento de su padre, que consideraba grosero, vulgar e «indigno de un caballero», se creó una imagen pública conservadora y estirada, con una paradójica oposición a la educación clásica para las mujeres, algo que sus propias acciones contradecían. La gente del pueblo la llamaba «caballero Jack» (*gentleman Jack*) y más de una vez eran crueles con sus peculiaridades.

Decidida (con éxito) en su persecución del conocimiento y los logros mentales de los caballeros con educación universitaria, se obligó a seguir un programa de lecturas que iban desde Sófocles, Ovidio y Juvenal hasta Malthus, Rousseau y Walter Scott. Y Euclides, claro está. El 13 de mayo de 1817, con veintiséis años, Anne retomó los *Elementos*, al parecer por primera vez en nueve años. Se esforzó con las primeras siete proposiciones, desde la construcción de un triángulo equilátero (proposición 1) hasta la demostración de que a partir de un conjunto de tres rectas dadas solo se puede formar un único triángulo (proposición 7). Su plan era «progresar diligentemente» y obtener un dominio de las matemáticas, de las cuales sin duda consideraba que los *Elementos* eran su base. El objetivo final era convertirse en autor y «prestar mi atención, principalmente y en último término, a la filosofía natural». Decidió «dedicar mis mañanas, antes del desayuno al griego y después, hasta la comida, dividir el tiempo a partes iguales entre Euclides y la aritmética», para luego enfrentarse al álgebra. «Las tardes y las noches las reservo para lecturas generales, para pasear, y media hora o tres cuartos para la práctica de la flauta». Cuando lo consideraba necesario pedía la ayuda de Mr. Knight.

Llegó al final del libro II a finales de julio y continuó con Euclides durante el otoño. Estudiaba más concienzudamente que cuando estaba en la escuela, por ejemplo luchando con éxito con la proposición 2.13: que en un triángulo acutángulo el cuadrado del lado más corto es igual al producto de los otros dos lados más el producto de la base del triángulo y su altura (algo que no es en absoluto fácil de demostrar). Dejó escrito que «no entendí este hecho la última vez que leí los primeros seis libros de Euclides, y ahora me ha costado más de media hora; sin duda es mi *pons asinorum*» (el *pons asinorum*, o ‘puente de los asnos’, era el nombre tradicional de la proposición 5 del libro I, cuyo diagrama recuerda vagamente un puente y además era intransitable para los menos duchos en geometría). En noviembre ya podía presumir ante Knight de que no solo había completado dos veces los libros I a VI, sino que también había estudiado treinta proposiciones del otro libro geométrico de Euclides, los *Datos*, más de lo que podían afirmar la mayoría de los graduados universitarios.

Sin embargo, problemas familiares, incluidas diversas enfermedades y muertes de parientes, perturbaron los estudios de Lister. Años después, tras heredar la finca familiar, viajó con asiduidad y al final murió, al parecer, de una picada de un insecto en Kutaisi (Georgia). No está claro si volvió a retomar Euclides después de 1817, pero su resuelto estudio de los *Elementos* durante su veintena, sin duda con el deseo de formar parte de todos aquellos que habían mejorado su intelecto por medio del contacto con Euclides, resulta impresionante se mire como se mire.

Interludio

Un momento. Detengámonos otra vez. Varios de los personajes de esta historia, una historia sobre Euclides como sabio y como filósofo, han señalado más allá de este horizonte concreto y se han fijado en el uso de los *Elementos* de Euclides para los aspectos prácticos de la vida. Tal como expresó la propia Anne Lister, las razones para leer Euclides van más allá de la simple mejora intelectual personal y se dirigen hacia la filosofía natural y su campo de acción e innovación mucho más mundano.

¿Acaso no era Euclides maestro de obras tanto como sabio erudito? ¿Acaso no había sido leído durante siglos por razones prácticas y públicas además de por motivos privados y filosóficos? ¿Acaso su libro no podía afectar al mundo natural tanto como afectaba al lector individual?

Por supuesto que sí. Y por esta razón hay otra historia euclidiana que tenemos que relatar. Esta tiene sus raíces en el lodo egipcio, en la agrimensura y en el cálculo de impuestos.

III

EL HÉROE

Peteconsis

Impuestos y abusos

Una franja de tierra en el delta del Nilo, cerca de Tebas. Es fértil, con inundaciones regulares hasta que se construyeron las presas y diques en los siglos XIX y XX. Durante una primavera del siglo I a. C. se mide y se tasa para determinar los impuestos que se van a cobrar; un escriba anota los resultados: «Tasación y medición de la [tierra] de Kaliedon [cultivada] por Peteconsis, empezando por el oeste».

El trabajo de agrimensura registra la ubicación, las dimensiones y la superficie de cada campo. No se trata de cuadrados o rectángulos, sino de formas irregulares; la primera tiene unos lados de 15, 28, 6 y 32 treintaidosavos de esqueno (un esqueno son cien codos o tal vez unos cincuenta metros, de manera que todos estos treintaidosavos son unos cuantos metros). A partir de estas medidas, el agrimensor podía calcular el área multiplicando las medias de los dos pares de lados opuestos y redondeando al alza. El resultado que obtiene es de 10 treintaidosavos de esqueno cuadrado, un poco menos de setecientos metros cuadrados. En realidad es un resultado demasiado alto; a Peteconsis se le gravará en exceso.

Los pesos y las medidas, la agrimensura y la contabilidad son casi tan antiguos como la escritura y, en algunos lugares quizá más antiguos (no todas las formas de registrar números exigen el lenguaje escrito). A finales del cuarto milenio antes de nuestra era, algunas ciudades Estado mesopotámicas disponían de elaboradas técnicas escritas para contar (y, por lo tanto, controlar) objetos y personas. Se han conservado planos de campos de Ur, de inicios del tercer milenio a. C., que muestran el terreno dividido en parcelas triangulares y rectangulares, cuyas áreas eran bastante sencillas de calcular. El junco y la cuerda se convirtieron en símbolos de una medición justa de la tierra, así como de la justicia en general. La cultura hebrea utilizó la misma imagen: «Pesos diversos y medidas diversas son ambas una abominación para el Señor».

Los egipcios también se habían dedicado a medir la tierra durante milenios antes de que el delta del Nilo pasara a ser una provincia griega. En el siglo V a. C., el historiador Heródoto dejó constancia de una famosa historia acerca del faraón Sesostris:

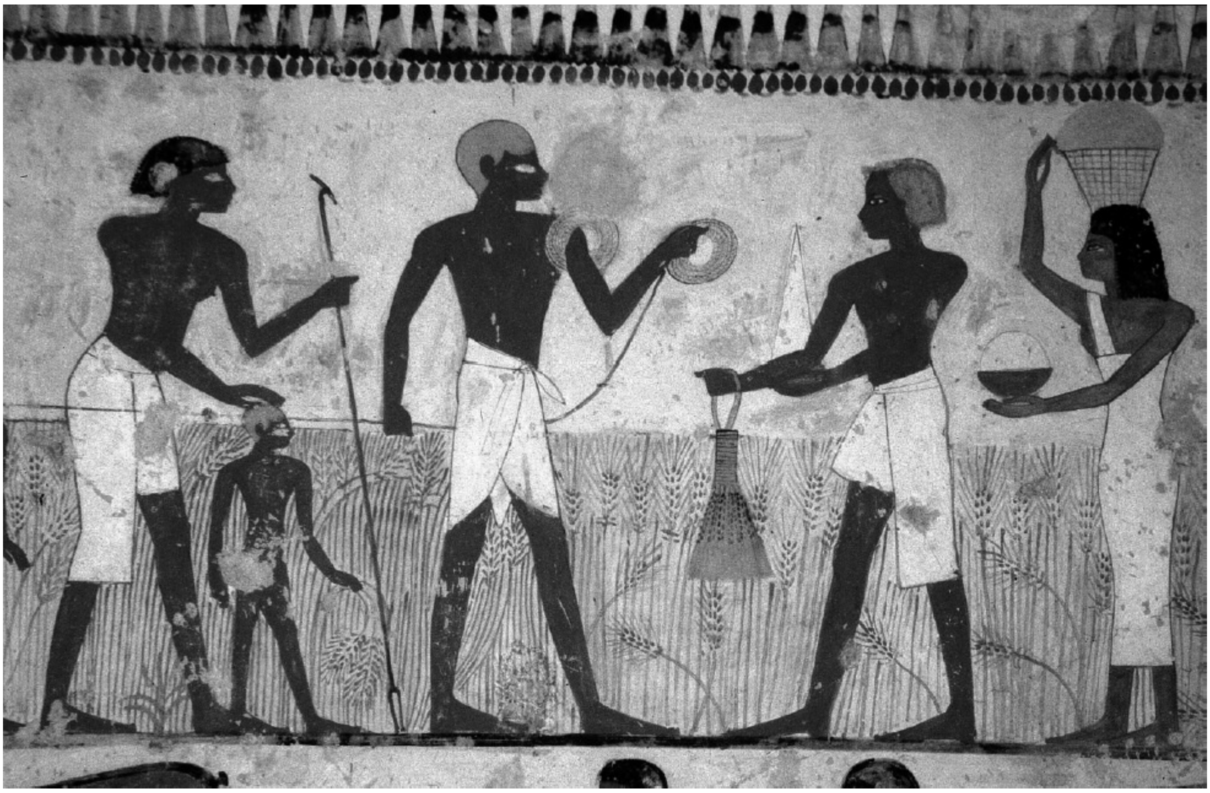
> Los sacerdotes también me dijeron que este rey repartió el suelo entre todos los egipcios, concediendo a cada habitante un lote cuadrangular de extensión uniforme; y, con arreglo a esta distribución, fijó sus ingresos, al imponer el pago de un tributo anual. Ahora bien, si el río se le llevaba a alguien parte de su lote, el damnificado acudía al rey y le explicaba lo sucedido; entonces el monarca enviaba a algunas personas a inspeccionar y medir la disminución que había sufrido el terreno para que, en lo sucesivo, pagara una parte proporcional del tributo impuesto.

En opinión de Heródoto este era el origen de la agrimensura entre los egipcios.

La historia puede tener algo de verdad. Sin duda, la preferencia por la tierra como base impositiva llevó a Egipto a una larga tradición de agrimensura. El tamaño de los campos ya se medía en la época del Imperio Antiguo, la segunda mitad del tercer milenio a. C. Desde el Imperio Medio hasta el período romano encontramos fuentes que muestran básicamente las mismas técnicas. Para los egipcios, igual que para los babilonios, la correcta medida de la tierra era un símbolo de justicia. Las *Enseñanzas de Amenemope* exhortaban al oyente:

> No muevas los hitos en los bordes de los campos
> ni cambies la posición de la cuerda de medir.
> No seas avaricioso por un codo de tierra
> ni traspases los límites de una viuda.

Bajo el dominio griego, las mediciones egipcias continuaron como siempre habían sido, la base para aumentar (o a veces bajar) los alquileres y para preparar arriendos y transferencias de tierras. La técnica, invariable, era estimar un cuadrángulo de tierra sumando los dos pares de lados opuestos, dividiendo ambas sumas por dos y luego multiplicando los dos valores. No era un método exacto; si la parcela era un rectángulo, daba el resultado correcto, pero en caso contrario, sobrestimaba el valor real, lo que siempre resultaba conveniente para el propietario. De hecho, las autoridades indicaron en algunos casos ciertas «diferencias en la medición», pero de todos modos el arrendatario estaba obligado a pagar los impuestos de acuerdo con el valor más alto. En cualquier caso, el cálculo era rápido y sencillo y los resultados, razonablemente satisfactorios, y se tiene constancia de que esta técnica se continuaba utilizando en Egipto en el siglo XIX.



Medición de un campo egipcio.

En todo el planeta podemos encontrar tradiciones de medición y cálculo con una matemática práctica y cotidiana, y sin duda también las había en los mundos griego y egipcio que vieron nacer a los *Elementos* de Euclides. En consecuencia, es natural preguntarse si la geometría teórica y docta de Euclides estaba relacionada con esos aspectos.

A lo largo de los años ha habido algunos intentos heroicos de relacionar partes concretas de los *Elementos* con problemas prácticos específicos, pero nadie ha logrado un consenso claro. No hay nada en los *Elementos* que se parezca a la división de un campo real o a la planificación de una ciudad; sería muy aventurado aseverar alguna conexión directa entre la vida cotidiana y las definiciones y demostraciones de la geometría de Euclides.

Los testimonios griegos de geometría euclidiana también nos ofrecen una imagen ambigua de su relación con actividades prácticas, y hay indicios de un abismo entre lo teórico y lo práctico. Los practicantes de la geometría tenían una estructura profesional, un marco institucional, mientras que los teóricos eran sabios aficionados; en general, se ignoraban mutuamente y cada grupo resultaba casi invisible para el otro en términos sociales. Cuando interactuaban, en ocasiones los intelectuales se lamentaban de los métodos y construcciones «mecánicos» empleados por los profesionales en lugar de usar demostraciones rigurosas. Por su parte, dramaturgos como Aristófanes se divertían presentando a los geómetras teóricos como personajes cómicos.

Sin embargo, está claro que los dos tipos de aproximación a la geometría tenían puntos en común. El nombre de la disciplina teórica, *geometría*, significaba originalmente ‘medición de la tierra’ y mantuvo este significado en la Grecia helenística. Un *geometrés* era el esforzado hombre que acarreaba la vara y la cuerda por los campos. El término de Euclides para una perpendicular, *káthetos*, significa literalmente ‘dejar caer’, como una plomada. Según un comentarista antiguo, el nombre *tomeus* con el significado de ‘sector circular’ procede de la palabra griega para el cuchillo de un zapatero. Incluso el vocablo griego para ‘definición’, *horos*, no estaba exento de connotaciones prácticas, pues inicialmente un *horos* era un límite o un hito.

El abismo no era infranqueable. El cuasi contemporáneo de Euclides, Arquímedes, era un matemático teórico de altísimo nivel pero del cual también circulaban numerosos relatos sobre máquinas y demás maravillas mecánicas por él concebidas. En una historia debida a Jenofonte, incluso Sócrates admite que los usos prácticos de la geometría eran legítimos antes de pasar a examinar la manera en que sus niveles superiores podían ayudar a la mente a alcanzar la comprensión del Bien.

Así pues, la relación entre las tradiciones práctica y teórica de la matemática ha sido compleja desde hace mucho, y a menudo se ha convertido en un enigma para todos aquellos implicados en una tradición o en la otra. ¿Era la matemática una única disciplina o varias? ¿Tenía que haber una relación clara entre la geometría euclidiana y su pariente práctica? ¿Tenía cualquiera de ellas algo de valor para enseñar a la otra? A lo largo de los siglos, a medida que ambas facetas han ido evolucionando, su relación ha ido cambiando, y tanto para los teóricos como para los practicantes a veces ha parecido buena idea fortalecerla; es decir, hacer (más) útil la matemática teórica y hacer más rigurosa la matemática práctica. Este tipo de proyectos convertirían a Euclides en una especie de héroe prometeico, que lleva la luz de la demostración y la deducción rigurosa al mundo de las matemáticas prácticas y otorga a los mortales el verdadero conocimiento allí donde antes solo había suposiciones y estimaciones. Por otro lado, una relación así también transformaría los *Elementos*, tan recluidos y filosóficos, haciendo que su inacabable madeja de referencias internas se proyectara hacia el mundo exterior, haciendo que su fría estructura lógica tuviera significado en el mundo real.

La división del monocordio

Un festival real en Alejandría, a principios del siglo III a. C., tal vez durante la vida de Euclides; incluso puede que el propio Euclides esté presente.

Actúa el músico Nicocles de Tarento, cantando acompañado de su propia cítara. El repertorio es antiguo, pero la destreza del músico es siempre algo nuevo, que revive las complejas y elusivas armonías de siglos pasados. Vencedor en los juegos de Delfos, Corinto y Atenas, cautiva a su audiencia y se lleva el premio una vez más.

Parece que una de las primeras personas en hacer un uso práctico de los *Elementos*, de sus resultados y de sus métodos pudo ser el propio Euclides, si bien las pruebas que han llegado hasta nuestros días dificultan poder ir más allá de ese «parece que».

A lo largo de los siglos siguientes, se fueron acumulando muchas obras alrededor del nombre de Euclides, dedicadas a diversos temas de interés práctico, y en algunos casos ahora nos resulta muy difícil asegurar quién escribió qué o si algunos fragmentos de texto se remontan o no hasta Euclides. Un conjunto de cincuenta y ocho proposiciones sobre óptica parecen ser auténticas; se trata de una obra ligera en comparación con los *Elementos*, aunque da la impresión de que el tema estaba bien establecido y fundamentado. Esta obra describe cómo se forman las imágenes en el ojo en términos del tamaño, forma y posición relativas de los objetos: los objetos cercanos ocupan (subtienden) ángulos más anchos, igual que sucede con los objetos grandes, etc. Todo se traducía al lenguaje de la geometría y lo que no podía traducirse (el color, por ejemplo) se ignoraba. El libro muestra un estilo euclidiano por completo y se basa una y otra vez en los *Elementos*. No llega a ser una teoría completa de la perspectiva (en el sentido de qué formas deben trazarse en una superficie plana para aportar la ilusión de estar viendo objetos sólidos) pero sí que sus estudios preliminares, con el tiempo, se utilizarían para tal fin.

Esta *Óptica* también resulta extraña al lector moderno porque Euclides asumía que el ojo emitía rayos que hacían perceptibles los objetos sobre los que incidían. Como no creía que se pudiese percibir la longitud recorrida por estos rayos, no está claro cómo pensaba que el ojo podía diferenciar un objeto cercano de uno lejano. Quizá no podía, pues Euclides solo consideraba la visión de un ojo a la vez, y en cierto sentido, podemos considerar que escribió acerca de las ilusiones que se producen cuando se cierra un ojo.

La astronomía también se asoció muy pronto a la red de relaciones de los *Elementos*. Proclo seleccionó unas pocas proposiciones de las cuales afirmó que se usaban en astronomía. Y, como antes, hay también un texto, titulado *Fenómenos*, que se ocupa de la geometría de la esfera en una larga lista de proposiciones que parecen auténticamente euclidianas. Estudia el orto y el ocaso de estrellas y el movimiento del Sol e intenta deducir la longitud del día en un punto cualquiera de la superficie terrestre.

En un campo bastante diferente, hay dos tratados de música que se atribuyeron a Euclides en la Antigüedad tardía, uno de los cuales contiene un extenso fragmento en el estilo de teorema y demostración de los *Elementos*. El debate entre los especialistas acerca de si alguna parte de este material musical se remonta a Euclides sigue sin estar cerrado. El punto relevante, sin embargo, es que para una mente actual puede parecer sorprendente que la geometría pueda aplicarse a la música.

La música era omnipresente en la cultura griega, y buena parte de lo que más adelante se apreciaría como poesía, para los griegos se consideraban canciones. La tragedia y la comedia griegas tenían más en común con la ópera que con el teatro hablado, y algunos griegos que ahora se consideran poetas quizá se deberían calificar con más propiedad como compositores. Durante rituales diversos se interpretaban melodías tradicionales con instrumentos de viento (los *auloi* o flautas dobles); el canto coral y los poemas épicos se acompañaban con la cítara. Rapsodas, citarodas, aulodas y aulistas competían en festivales no solo en la Atenas clásica, sino también en las ciudades helenísticas como Alejandría. Los cinco días de festejos por la boda de Alejandro en Susa incluyeron «un rapsoda, tres psilocitaristas, dos citarodas, dos aulodas, cinco aulistas […] tres actores trágicos y tres cómicos y un arpista». En una procesión organizada por Ptolomeo II en Alejandría participó un coro de seiscientos hombres acompañados por treinta cítaras.

A lo largo del extenso período de la interpretación musical en la antigua Grecia, los estilos y los gustos cambiaron. Los instrumentos, las afinaciones y las tonalidades tenían orígenes prehistóricos, pero durante el siglo V a. C. la cantidad de notas disponibles o empleadas aumentó y se hicieron más frecuentes los cambios de tonalidad en una misma pieza musical. Hacia el 440 a. C. uno de los comediógrafos atenienses presentó a un desaliñado personaje de la Música quejándose a la Justicia del cada vez más extravagante tratamiento al que se la sometía en los últimos tiempos.

La música, sobre todo la que era cada vez más compleja, llevó al desarrollo de la teoría musical; es muy posible que los músicos afinaran de oído, pero algunos teóricos querían algo más de precisión. Se atribuye a los mal documentados pitagóricos el hecho de darse cuenta de que dos cuerpos que emiten sonido (pongamos por caso, dos cuerdas) y cuyos tamaños están en proporción 2:1 producirán un intervalo musical placentero de una octava, y sucede lo mismo con otras proporciones: una relación de tamaño 3:2 produce una quinta perfecta; 4:3, una cuarta perfecta. ¿Por qué? Una posibilidad era decir que el fenómeno tenía algo que ver con las velocidades de vibración: se puede ver claramente que una cuerda más corta vibra más rápido y también se puede oír que da una nota más alta. Pero los griegos no tenían ningún modo de medir frecuencias de vibración, pues son demasiado rápidas para contarlas. Nadie tenía ninguna idea de por qué proporciones simples de frecuencias deberían sonar agradables, como tampoco por qué cuerdas cuyas longitudes estaban en proporciones simples deberían sonar placenteras al sonar a la vez. Era un hecho observado, sin más.

Interpretación con una cítara.

Varios pensadores griegos trabajaron en el tema de las proporciones musicales, preguntándose acerca de la suma de intervalos musicales para crear intervalos más grandes y de su subdivisión en partes más pequeñas; también se plantearon si había algún principio general que determinara qué proporciones estaban asociadas con sonidos musicales placenteros. Las conclusiones a las que llegaron eran ya conocidas por Platón y Aristóteles. El primero otorgó a la música un papel importante en la educación y también en la estructura del cosmos, pues razonaba que las formas musicales con proporciones simples eran especiales por ellas mismas, y las armonías musicales no eran nada más que su expresión sonora.

La primera discusión prolija sobre las proporciones musicales que ha llegado hasta nosotros desde la antigua Grecia es un texto titulado *La división del monocordio*, tradicionalmente asociado a Euclides. Al igual que los *Elementos*, reúne en una argumentación sistemática diversos resultados y observaciones de generaciones anteriores (a la vez que los despoja de cualquier resto de misticismo numérico pitagórico). Del mismo modo que sucede en las obras de óptica y astronomía atribuidas a Euclides, su autor asume algunos resultados de los *Elementos*, en este caso de los libros que se ocupan de proporciones de números: cómo expresar una proporción en sus términos más bajos o qué factores pueden tener los números de una proporción.

La división del monocordio empieza con una discusión acerca de qué es el sonido y alude a la relación entre tono y frecuencia. Tras esta introducción llega la matemática. El texto no presenta definiciones, postulados ni nociones comunes (aunque sí asume algunas suposiciones sin expresarlas), sino que va directamente a una serie de proposiciones sobre proporciones. Por ejemplo, una proporción de números consecutivos (como 3:2 o 4:3) no se puede dividir en dos proporciones iguales sin emplear los llamados *números irracionales* (también llamados *sordos* antiguamente); algunas de estas están estrechamente vinculadas a los temas tratados en los libros aritméticos de los *Elementos*. El texto señala que algunas proporciones simples corresponden a intervalos musicales agradables al oído, aunque no ofrece ninguna explicación convincente de qué proporciones son estas, y tras una discusión acerca de cómo se relacionan entre sí estos intervalos y con la escala musical, culmina con una demostración de cómo se puede dividir el monocordio; es decir, cómo partir de una única cuerda musical con una regla a su lado y, empleando la geometría, dividir la longitud de la cuerda de manera que se produzca una escala musical o, dicho de otro modo, dónde hay que colocar los trastes o los dedos para generar esa escala.

La división es un texto en verdad curioso; es a la vez un ejercicio de teoría de números euclidiana y un intento de describir la práctica musical griega con exactitud matemática. La habilidad técnica del autor no logra ocultar el hecho de que el proyecto, en su conjunto, no se aguanta. No se disponía de observaciones para vincular cocientes de frecuencias con cocientes de longitudes de cuerdas ni tampoco había ningún criterio matemático para determinar qué proporciones podrían corresponder a pares de notas en armonía.

Además, el texto parece describir y discurrir por un mundo más o menos idealizado, en el que los sonidos tienen una afinación perfecta o no la tienen en absoluto, sin posibilidad del «casi» de la experiencia y la práctica musical real. El autor de *La división* asume determinados hechos matemáticos y desentraña sus consecuencias para la afinación musical, nada más.

A pesar de estas particularidades (y en parte gracias a ellas), el texto resultó influyente, con su atractivo intento de convertir la música en un campo de estudio cuantitativo y preciso. Autores posteriores de teoría musical lo citaron abundantemente y se convirtió en una fuente importante para la ciencia de la armonía (una de las siete artes liberales) estudiada en las universidades medievales. Todavía en el siglo XVII hubo intentos serios de construir y demostrar instrumentos musicales de acuerdo con las especificaciones de este texto.

¿Fue escrito por Euclides? La tradición antigua estaba de acuerdo en que Euclides sí que escribió «algo» sobre el tema, y los primeros manuscritos de *La división* afirman que fue él. Sin embargo, muchos académicos lo dudan, y hoy en día el tema sigue sin estar zanjado. De todos modos, incluso si no es obra de Euclides, *La división del monocordio* es un texto euclidiano hasta la médula, y nos muestra que casi desde su mismo inicio la matemática de Euclides y proposiciones concretas de sus *Elementos* se utilizaron en campos musicales muy alejados del mundo puramente geométrico.

Higino

La agrimensura

Estamos en una nueva colonia romana, hacia el año 100 d. C. Higino es el topógrafo encargado de la zona. Ha consultado con el fundador de la colonia y con un augur; conjuntamente han escogido el punto adecuado para iniciar la parcelación de la tierra. Planta su instrumento en el suelo: denominado *groma*, consiste en una vara vertical de madera sobre la cual se sostiene una cruz horizontal de metal, de cada uno de cuyos extremos cuelga una plomada. Si el día es ventoso, puede que tenga que colocar también un cortavientos para evitar la oscilación de las plomadas. Higino orienta la cruz en las direcciones norte-sur y este-oeste, y observando a lo largo de sus brazos establece líneas divisorias siguiendo ambas direcciones: el *decumanus* y el *cardo*. Luego determina las distancias adecuadas para formar un gran cuadrado, dos mil cuatrocientos pies romanos por lado. A continuación vuelve a medir y observar para dividir el cuadrado en cien parcelas cuadradas más pequeñas.

Posteriormente, los cuadrados se asignarán mediante sorteo y la siguiente parte del trabajo de Higino será llevar en persona a los nuevos colonos a su parcela, para evitar errores o disputas. Para finalizar, trazará un mapa en una tablilla de bronce, como registro más permanente de la propiedad de cada parcela.

Los logros romanos en ingeniería, como las carreteras o los acueductos, dependían de una medición precisa de la tierra sobre la que se alzaban. La adquisición por parte de Roma de enormes extensiones de territorio a partir del siglo II a. C. llevó a la medición y la división de grandes áreas en parcelas adecuadas para una granja, repartiendo así las tierras recién conquistadas o confiscadas a beneficio de los veteranos del ejército o de los desposeídos.

En el desarrollo de la tradición agrimensora de Roma sin duda tuvieron un papel relevante la prueba y error y una mejora gradual, y los instrumentos empleados eran simples. El agrimensor o topógrafo romano estaba bien equipado con materiales de escritura y de dibujo, relojes solares, plomadas, una cuerda o vara de medir y un *groma*. De hecho, el *groma* era tan característico de los agrimensores romanos que acabaron siendo conocidos como *gromatici*, 'gromáticos' (el uso exacto del *groma* no está claro y sigue siendo un pequeño misterio; los restos arqueológicos, formados básicamente por un *groma* roto de Pompeya, no acaban de coincidir con las descripciones conservadas del instrumento).

El *groma* permitía establecer líneas rectas, así como cuadrados y rectángulos, pero no permitía medir ángulos; los agrimensores romanos no usaban trigonometría. Para los cambios de altura que se encontraban en el diseño de los acueductos, tenían que emplear otro instrumento, la *libra*. Sin embargo, el *groma* era suficiente para determinar una parcelación en un terreno plano, que era justamente lo que hacían más habitualmente los agrimensores.

El proceso se denominaba *centuriación* (dividir el terreno en centenares —de granjas—) y progresó a partir del siglo II a. C. en las nuevas colonias romanas. La República y el Imperio planificaron el uso de la tierra de una manera más meticulosa y exacta que en cualquier otro estado de la época y, de hecho, hasta el siglo XVIII; sus resultados se pueden observar (sobre todo, en cartografía aérea) en cientos de kilómetros cuadrados del norte de Italia y el norte de África, en el valle del Po, la Campania y Túnez.

Cuando no recibían el nombre de *gromatici*, los agrimensores romanos eran llamados *agrimensores*, es decir, literalmente 'medidores de la tierra'. Además de determinar las divisiones iniciales, de vez en cuando medían tierras ya divididas por cuestiones impositivas; también medían los tamaños de parcelas irregulares y sentenciaban en disputas sobre límites parcelarios. Los agrimensores eran un colectivo profesional cada vez más respetado, sus servicios eran apreciados y se les confiaban funciones cuasi judiciales. El magistrado romano Casiodoro recomendó en una ocasión el uso de un agrimensor para resolver una disputa, en lugar de recurrir a las armas:

> Al agrimensor se le confía la resolución de una disputa fronteriza que ha surgido, para poner así fin a una discusión sin sentido. Él es juez, en todo caso de su propia disciplina; su tribunal son los campos desiertos. Puedes pensar que está loco, viéndolo caminar por vías tortuosas. Si busca pruebas en bosques agrestes y matorrales, no camina como tú o como yo; él escoge su propio camino; explica sus afirmaciones, aplica su sabiduría a las pruebas, resuelve disputas mediante sus propios pasos y, como si fuera un enorme río, quita tierras del campo de una persona y se las entrega a otras.

La tradición de la agrimensura romana continuó durante quizá unos novecientos años, y como es de esperar, generó una gran cantidad de textos. Sin embargo, a pesar de toda la longevidad y el alcance de la tradición agrimensora, sus profesionales se veían más como una clase que como individuos, y en las fuentes muy pocos son citados con su propio nombre, la época en la que vivieron o la provincia en la que trabajaron. Higino es uno de estos pocos; de él se han conservado textos y la información de que trabajó hacia el año 100 d. C., aunque no está claro dónde. Escribió acerca de cómo establecer límites, cómo indicar diferentes tipos de tierras en los mapas y cómo resolver disputas de tierras.

En algún momento de los siglos IV o V, un editor desconocido, quizá en Roma, compiló una colección de textos de agrimensura, entre los cuales se cuentan los de Higino. El editor eliminó introducciones y conclusiones, parafraseó y resumió, pero no hizo ningún esfuerzo para aportar una coherencia global al tema tratado, como tampoco a su terminología ni estructura. El conjunto resultante de textos pasó a ser conocido como el *Corpus agrimensorum*. Se trata de una colección extraordinaria, que no solo incluye textos sobre agrimensura y medición, sino que también incluye discusiones acerca del suministro de agua, de la disposición de campamentos militares, de cartografía, de itinerarios, listas de fincas y la historia de varias colonias, así como temas de agricultura e incluso una supuesta profecía de una ninfa etrusca. En este compendio hay definiciones geométricas que coinciden en buena parte con las del libro I de los *Elementos*. Presenta métodos para medir áreas como rectángulos, trapecios, triángulos, círculos, semicírculos y hexágonos, así como indicaciones para medir áreas irregulares. También comenta trucos clásicos para usar los instrumentos de agrimensura con el objetivo de medir distancias inaccesibles, como la anchura de un río que no se puede vadear.

El ejemplar más antiguo conservado del *Corpus agrimensorum*, escrito hacia el año 500 d. C., se halla actualmente en la biblioteca Herzog August en Wolfenbüttel, en la Baja Sajonia. Es un libro sorprendente por varias razones, la más evidente de las cuales son sus ilustraciones. Algunas son simples diagramas geométricos con una tinta roja parduzca, otras son imágenes toscas para ilustrar conceptos como el cuadrado o el círculo, otras recuerdan más a los diagramas de los manuscritos de los *Elementos*, otras son imágenes en color más complejas que muestran carreteras (en rojo o marrón), colinas (en malva), bosques (en verde) y edificios (en marrón o amarillo, con tejados rojos). Ilustran las técnicas y los resultados de la agrimensura tal como se practicaba en el Bajo Imperio, las formas geométricas en las que se basaba y los mapas que producía.

Un geómetra en el *Corpus agrimensorum*.

Este antiguo manuscrito es el primero de una larga serie de copias posteriores realizadas en los monasterios de la Europa merovingia y carolingia. En ocasiones, su latín técnico era demasiado para los copistas posteriores y sus errores e intentos de corrección convirtieron un texto ya de por sí oscuro en todavía más oscuro. Los diagramas también se degeneraron, pues los escribas no siempre comprobaban cómo se relacionaban con el texto que los acompañaba. La práctica real de la agrimensura romana se iba desdibujando cada vez más, pues el sistema de campos abiertos de la Edad Media no necesitaba las divisiones cuadradas regulares de la centuriación romana. El *groma* y su uso real se convirtieron en tema de interés histórico y nada más.

Una de las sorpresas de la historia de los *Elementos* de Euclides es que el *Corpus agrimensorum* en latín entró en una relación muy estrecha con su pariente teórico. No ha sobrevivido ninguna versión completa en latín de los *Elementos* procedente del período romano, y tampoco parece que tuviera una verdadera popularidad y aceptación en el mundo de habla latina. Lo que sí se elaboró, quizá ya en el siglo V o VI, fue un resumen sin demostraciones de los primeros cuatro libros de los *Elementos*, que acabó asociado (quizá correctamente) al nombre de Boecio. En la época en la que empezamos a tener pruebas de manuscritos de este resumen, el siglo VIII, el texto aparece invariablemente asociado al *Corpus agrimensorum*, en diversos textos con una estructura híbrida y peculiar. En un caso, las definiciones y postulados de Euclides y sus tres primeros teoremas están copiados en el compendio de agrimensura; en otro, un monje benedictino confeccionó un *Arte de geometría y aritmética* en cinco libros juntando material de Euclides, del *Corpus* y de otros textos de aritmética; finalmente, en otro ejemplo, un escriba de Lorena elaboró una obra en dos libros reuniendo la geometría, el uso del ábaco y la agrimensura.

En realidad, lo que sucedía es que en las primeras escuelas y monasterios medievales se estaba formando una nueva disciplina. Se denominaba *geometría* y sus textos básicos se atribuían a veces a Euclides, a veces a Boecio. Su contenido eran definiciones, axiomas y afirmaciones euclidianas (pero no demostraciones), junto con ilustraciones, métodos y cálculos procedentes del *Corpus agrimensorum*. Empezaba con descripciones de figuras en el plano e iba avanzando por formas más complejas, así como maneras de trazar sus límites y medir sus áreas.

Este nuevo modelo de «geometría» en realidad no estaba concebido para un uso práctico en el campo, sino que, en un contexto cristiano, su uso principal parece haber sido de preparación para el estudio de la teología, del mismo modo que Platón y Proclo habían convertido la geometría de Euclides en una preparación para la filosofía. Los escribas y maestros medievales habían recogido las connotaciones de estabilidad y certeza que la geometría poseía para muchos autores y el estatus específicamente filosófico de que gozaba para los platónicos. Un autor medieval anónimo escribió que «la intención de Euclides es doble: se dirige al alumno y a la naturaleza de las cosas […] A la naturaleza de las cosas porque es sabido que la ciencia de la naturaleza y la espléndida sabiduría de Timeo o Platón se demuestran geométricamente». Estudiar los objetos geométricos (incluso las formas y las medidas de los campos romanos) era, pues, una manera de ampliar los horizontes de la meditación espiritual.

Además, el Antiguo Testamento habla varias veces de Dios como de un geómetra o agrimensor: colocando un compás ante las profundidades, tendiendo una vara de medir en los cimientos de la Tierra, creando todas las cosas según su número, peso y medida. Si la propia creación era un acto geométrico, razón de más para estudiar la geometría como manera de aprehender la mente del Creador. Un autor medieval anónimo, modificando una frase de Casiodoro, urge al estudiante a «acercarse a los cielos con la mente e investigar toda la construcción del firmamento, y en cierto modo deducir y reconocer, mediante una sublime contemplación mental, el Creador del mundo que ha ocultado tantos hermosos secretos». La disciplina ordenada y bien delimitada del agrimensor se convirtió en una metáfora de un cosmos ordenado y la ciencia de la geometría, una imagen del acto de creación.

Así pues, los caprichos de la traducción y la transmisión nos han llevado los *Elementos* de Euclides, una vez más, a un nuevo lugar. Esta vez se trata de las escuelas latinas medievales. Aquí, como en otras partes, los académicos locales y los profesionales tomaron el texto y lo convirtieron en algo nuevo, ampliando bruscamente el abanico de significados que otros habían asignado a la obra. La frontera entre la agrimensura y la geometría había desaparecido y ahora Euclides era un héroe en ambos campos.

Muhammad Abú al-Wafá al-Buzjani

La división del cuadrado

Bagdad, segunda mitad del cuarto siglo de la Hégira (segunda mitad del siglo X d. C.). Una reunión de geómetras y artesanos; una más de muchas. Uno de los presentes es el matemático Muhammad Abú al-Wafá al-Buzjani.

El orden del día de la reunión es discutir problemas geométricos de interés para los artesanos, como la división de un cuadrado en dos, tres, cinco o más cuadrados más pequeños. Se trata de cosas de interés para las artes decorativas, para confeccionar mosaicos y diseños en paredes, techos o puertas.

Los artesanos, o uno de ellos, preguntan cómo convertir tres cuadrados pequeños, del mismo tamaño, en uno más grande. El problema es desconcertante y provoca una larga discusión, en la que geómetras y artesanos contribuyen con sus respectivas formas de enfocar el tema.

En la época de al-Buzjani, los días gloriosos del Bagdad abasí ya eran cosa del pasado (la vieja Ciudad Redonda no era más que ruinas), pero la ciudad y toda la región estaban experimentando una especie de renacimiento bajo la dinastía búyida. El Imperio islámico que antaño se extendía desde el Guadalquivir hasta el Ganges se había desintegrado a partir de finales del siglo IX para pasar a ser una comunidad de Estados musulmanes más pequeños, vinculados por la religión y el idioma pero separados políticamente.

Los búyidas procedían de Dailam, una región montañosa en el extremo suroccidental del mar Caspio con una larga tradición de fuente de mercenarios para las luchas internas del mundo islámico. Tres hermanos, Alí, Hasán y Ahmad, se hicieron con el poder en Bagdad en 945; Ahmad asumió la posición de emir (‘comandante en jefe’) y protector *de facto* de los califas, cuyo poder usurpó a todos los efectos. La dinastía gobernó Bagdad y sus tierras (Irak más la base territorial familiar en Irán) durante un siglo.

Fue un siglo fructífero para la vida cultural de Bagdad, si bien cada vez más calamitoso para sus habitantes. En un trasfondo de declive económico y social (sobre todo en la atestada capital), los gobernantes búyidas se presentaban como «reyes de reyes» y emprendieron sofisticados proyectos de construcción, entre los cuales un nuevo palacio, además de patrocinar la literatura, la filosofía y las ciencias. La ciudad seguía siendo un punto de encuentro religioso, étnico y cultural y continuaba atrayendo a académicos de todo el mundo musulmán. Los búyidas y sus visires daban apoyo a sabios y poetas que, de manera consciente, intentaron recuperar, transmitir y ampliar la cultura antigua, traduciendo, editando, comentando e innovando. Ibn Sina (Avicena) fue uno de los productos de este período, como también el *Fihrist*, el famoso compendio enciclopédico árabe de escritores y literatura. Era una cultura de «escuelas» informales: círculos de sabios y estudiantes que se reunían en tiendas, plazas, jardines o residencias privadas para discutir y debatir. En las cortes de los emires y visires se celebraban debates de alto nivel, mientras que para los temas teológicos, la mezquita era el lugar natural.

Una de las personas atraídas por Bagdad y su riqueza cultural fue al-Buzjani. Muhammad ibn Muhammad ibn Yahyá ibn Ismaíl ibn al-Abbás Abú al-Wafá al-Buzjani, en general conocido como al-Wafá o al-Bujzani, nació en Buzjan (actual Buzhgan, en Irán) en junio de 940. Su familia era culta y dos tíos suyos le enseñaron aritmética y geometría. En 959 se trasladó a Bagdad, donde disfrutó del mecenazgo cortesano y se dedicó a la enseñanza y la escritura hasta su muerte en 998, probablemente.

Sus capacidades fueron muy admiradas por sus contemporáneos y hasta el día de hoy al-Buzjani se considera uno de los más grandes matemáticos de Persia. Se interesó por toda la matemática: por la astronomía y la trigonometría en la que se basaba, por la geometría a la manera euclidiana, por la aritmética y por el álgebra. La astronomía, en concreto, era su especialidad, y en este sentido, al-Buzjani estuvo implicado en la construcción de un nuevo observatorio en Bagdad bajo el emir Sharaf al-Dawla, con lo que se recuperó la tradición astronómica de la ciudad. A finales de la década de 970 realizó observaciones que se utilizarían durante siglos.

Trabajó en trigonometría esférica, es decir, en las reglas que determinan las formas y tamaños de triángulos trazados sobre una esfera, un campo fundamental para poder realizar cálculos astronómicos de una manera eficiente y precisa. Mejoró tablas trigonométricas y mostró cómo usar la trigonometría para expresar la hora del día a partir de la altura del Sol. Ayudó a su colega al-Biruni a determinar el tamaño de la Tierra; ambos también coordinaron sus observaciones de un eclipse lunar en 997, desde Bagdad y desde Jorasmia. Se le atribuyen una veintena de publicaciones, pero solo se conservan doce. Las fuentes de al-Buzjani fueron los clásicos griegos y la rica tradición árabe de comentarios, desarrollos y novedades. Siguiendo tal tradición, escribió comentarios sobre Euclides, sobre Diofanto y sobre el álgebra de al-Juarismi; todas estas obras se han perdido.

Entre los escritos que han sobrevivido se cuentan algunas de sus obras sobre astronomía y trigonometría y un par de textos redactados para uso de los practicantes de estas disciplinas. Su libro sobre la aritmética necesaria para los escribas y funcionarios del fisco se ocupaba de proporciones, multiplicaciones y divisiones, mediciones y aspectos técnicos de los impuestos, los intercambios y las transacciones comerciales. Se dice que es el primer lugar en que aparecen en árabe números negativos (para las deudas). Al-Buzjani recopiló y sistematizó los métodos empleados por los profesionales y uno de sus objetivos era corregir todos aquellos que necesitaban correcciones. Por ejemplo, señaló que los agrimensores solían determinar las áreas de cuadriláteros sumando lados opuestos, multiplicando las dos sumas y dividiendo por cuatro, el mismo método tradicional que ya se había aplicado en los campos de Peteconsis mil años antes; al-Buzjani escribió que «es un error evidente, que da resultados incorrectos y pocas veces corresponde a la verdad».

Al-Buzjani aportó la misma combinación de conocimientos técnicos, familiaridad con los clásicos y deseo de mejora e innovación a su trabajo con aquellos que usaban la geometría por motivos prácticos. Los métodos matemáticos cada vez se asimilaban más con las prácticas del mundo islámico, y en el ambiente cultural de Bagdad, con reuniones y discusiones, había círculos en los que geómetras como él debatían con carpinteros y artistas especializados en incrustaciones y mosaicos, y quizá también con agrimensores. En cuanto geómetra y astrónomo respetado, e incluso venerado, al-Buzjani tenía cierta autoridad sobre los demás geómetras y sobre los artesanos. En sus obras no se menciona a cuántas de estas reuniones asistió, pero los testimonios de ellas continúan esporádicamente durante el siglo siguiente y vuelven a aparecer hasta el siglo XVII. Se suele suponer que se celebraban con cierta regularidad, lo que es un reflejo de la larga y destacable simbiosis que hubo entre teoría y práctica en el mundo islámico.

Al-Buzjani escribió lo que había aprendido y enseñado en estas reuniones en su *Libro de lo que un artesano debe saber sobre construcciones geométricas*, redactado en la década de 990 y dedicado al emir Bahá al-Dawla. Al igual que su libro de aritmética, no se trata solo de un libro de texto introductorio, sino de una corrección de los diversos errores cometidos habitualmente por los profesionales:

> Varios geómetras y artesanos se han equivocado […] El artesano y el agrimensor toman las partes escogidas [literalmente, «la crema»] de las cosas y no reflexionan sobre los métodos por los cuales se determina la corrección. De este modo se producen errores y descuidos […] El geómetra sabe lo que es correcto de lo que quiere mediante demostraciones, pues es él quien ha derivado las nociones sobre las cuales el artesano y el agrimensor basan su trabajo. Sin embargo, para él resulta difícil transformar lo que ha demostrado en una construcción [práctica], pues no tiene experiencia con el trabajo práctico del artesano y del agrimensor.

Al-Buzjani pudo medrar en ambos mundos y corregir a los artesanos chapuceros y a los geómetras poco mundanos, a beneficio de ambos. Su obra y su carrera se convirtieron así en un momento crucial de aplicación de la geometría euclidiana a problemas del mundo real, especialmente en el diseño.

En su libro hay mucho de Euclides, Arquímedes, Herón, Teodosio y Papo: los héroes de la geometría griega conocidos en las traducciones y comentarios árabes. Pero también hay muchas partes originales, y al-Buzjani disfruta ampliando los métodos de Euclides mediante el uso de lo que a veces denomina un «compás oxidado», es decir, un compás cuyos brazos se mantienen en una posición fija entre usos (a diferencia del compás tradicional de la geometría euclidiana), lo que permite copiar longitudes de un lugar a otro en un diagrama. Este sutil cambio le permite llegar a nuevos resultados y a una mayor precisión en la solución de problemas prácticos.

En el libro también hay mucho material que procede de los propios profesionales; algunos problemas eran habituales en carpintería, como por ejemplo comprobar que un ángulo es verdaderamente recto. Al-Buzjani escribió sobre el diseño y uso de instrumentos geométricos y sobre la construcción y la medición de una amplia variedad de figuras, formas y diseños. Cómo dividir una línea en partes iguales, por ejemplo; cómo hallar una línea que toca a un círculo en un solo punto; cómo trazar polígonos regulares dentro o fuera de un círculo (inscritos o circunscritos); cómo trazar polígonos dentro o fuera de otros (como un triángulo en un cuadrado o un pentágono en un triángulo); cómo dividir las áreas de formas dadas en varias proporciones. Dos problemas de especial interés al final del libro son cómo dividir un cuadrado en un determinado número de otros cuadrados y cómo dividir la superficie de una esfera con polígonos regulares.

La teselación, de planos o de esferas, es uno de los rasgos más claramente asociados con la tradición de diseño generalizada en el mundo islámico durante finales del siglo X y todo el siglo XI. Las torres se decoraban con polígonos que se intersecaban, formados por ladrillos tallados, como puede verse en las torres de Jarraján y de Maraga, en Irán; puertas y arcones también se decoraban con motivos similares de madera. Estos diseños llenaban el espacio disponible de un modo armonioso y sin parecer recargados; generaban motivos a gran escala a partir de elementos simples repetidos una y otra vez. Tanto el proceso como el resultado final se han considerado una representación de las características del cosmos: armónico, unificado y relacional.

En la antigua Grecia también había interés en este tipo de cosas. En el mundo griego había un juego denominado *stomachion* que consistía en un conjunto de polígonos planos de marfil que tenían que reordenarse formando diversas figuras; Arquímedes escribió sobre este juego y había versiones árabes de, por lo menos, alguna parte de su texto. El juego tenía un cierto parentesco con algunas demostraciones del libro I de los *Elementos*, en las que se diseccionan las figuras con las que se trabaja; de hecho, el propio Euclides escribió un libro entero, hoy perdido, titulado *Sobre la división de las figuras*. Este libro era conocido en el mundo árabe y los capítulos 8 y 9 del texto de al-Buzjani parecen haber sido escritos con la *División* de Euclides al lado.

La división del cuadrado era el tema tratado con más extensión en esta parte del libro de al-Buzjani. Para los artistas de mosaicos, tanto el fragmento que se debía cortar como el patrón final eran a menudo cuadrados, y al-Buzjani elaboró diferentes versiones del problema, creando cuadrados grandes a partir de diversas cantidades de cuadrados más pequeños. A veces bastaba con cortar los pequeños cuadrados en diagonal y reordenar las piezas; a veces se trataba de disecciones mucho más complejas, dejando un cuadrado entero y partiendo los demás para luego ordenar sus piezas en un motivo simétrico alrededor del cuadrado central entero.

Al-Buzjani ofreció principios generales además de soluciones detalladas de tales procesos para cinco, ocho, diez o trece pequeños cuadrados. Fue en este contexto en el que alguno de los artesanos pidió una manera de combinar tres cuadrados en uno más grande. Al-Buzjani, reproduciendo una discusión real en su libro, recordó que un geómetra podía hallar fácilmente el tamaño del cuadrado más grande, pero los artesanos no quedaron satisfechos con este elemento de conocimiento geométrico; querían una solución real para recortar y reordenar que pudieran utilizar en su trabajo con los mosaicos.

Partición de un cuadrado.

De hecho, los artesanos tenían varias propuestas, pero a los geómetras no les convencían por considerarlas inexactas. Las soluciones imprecisas creaban lo que parecía, superficialmente, un cuadrado entero, pero en realidad tenía lados dentados o piezas que sobresalían por los vértices. Al-Buzjani tumbó dos de esas soluciones antes de pasar a describir una mejor, probablemente creación suya. La idea básica era familiar: dejar uno de los cuadrados entero y cortar los otros en triángulos, que luego podían redistribuirse de manera simétrica alrededor de los lados del primero. El resultado tenía huecos y protuberancias en comparación con el verdadero cuadrado más grande que se deseaba, pero tales huecos y protuberancias eran del mismo tamaño y forma, lo que significaba que al-Buzjani podía cortar uno para rellenar el otro. El resultado era un cuadrado perfecto formado con piezas de los tres más pequeños; una elaboración matemática notable y elegante y un motivo hermoso de auténtica valía en decoración. De hecho, sigue siendo empleado por albañiles desde Anatolia hasta Marruecos.

El libro de al-Buzjani tuvo mucha difusión y se tradujo al persa dos veces, a partir del original árabe; otros autores posteriores llevaron la división y el entrelazamiento de figuras mucho más allá. Así y todo, los matemáticos que enseñaban geometría a los artesanos seguían quejándose de la ignorancia de estos seis siglos más tarde.

Resulta difícil evaluar el impacto que tuvieron los libros y las reuniones en los artesanos, porque su libro es casi la única prueba de que disponemos de la exposición de los artesanos a la geometría teórica en esta época. En cualquier caso, pocas dudas hay de que el encuentro de los *Elementos* de Euclides con las artes decorativas persas e islámicas fue trascendental. Algunos de los motivos descritos por al-Buzjani ofrecían pocas posibilidades de generar resultados estéticos, pero su patrón de cinco cuadrados y su ampliación a una versión con nueve cuadrados se aprovechó profusamente, y se puede apreciar en muros, portales, minaretes, puertas y arcones de todo el mundo islámico medieval. El ejemplo más antiguo conservado es una puerta de madera de inicios del siglo XII, en la mezquita del imán Ibrahim en Mosul; seis siglos después se seguía empleando, incorporado en la teselación de la mezquita del viernes en Isfahán.

Señora Geometría

Las artes liberales

Chartres, Francia, hacia el año 1150. Entre las famosas esculturas de piedra de la fachada occidental de la catedral, podemos apreciar una mujer sentada que escribe, con una tablilla sobre las rodillas. Está cubierta con ropajes, así como también sus cabellos. Sus angulosos rasgos miran hacia el exterior, no a su trabajo, sino a algo a media distancia, fuera del marco y fuera de la catedral. No sonríe, pero tampoco frunce el ceño.

Su nombre es Geometría, y bajo sus pies hay otra figura de piedra, uno de sus devotos, parecería. La tradición dice que es Euclides, y probablemente sea cierto.

Euclides (si es que es él) también va vestido, pero su pelo y su barba no están cubiertos. Para trabajar, sostiene en su regazo un pupitre portátil; sus dos manos reposan sobre él. Un tintero apunta a la posibilidad de que esté escribiendo algo, pero al igual que Geometría, parece mirar fijamente hacia fuera, emparejando su línea de visión con su expresión distante y pensativa.

Geometría y Euclides en la catedral de Chartres.

Hoy en día, tras casi mil años, Euclides y Geometría se nos muestran desgastados y cuesta apreciarlos bien. El brazo derecho de Geometría ha desaparecido y, con él, es posible que también algún instrumento de dibujo o de escritura. Los rasgos de ambas figuras se ven algo borrosos. Sin embargo, las esculturas de Chartres son, por lo que parece, la más antigua representación de Euclides que se ha conservado y la primera versión escultórica de las siete artes liberales, de las cuales Geometría forma parte.

La catedral de Chartres se alza majestuosa en la llanura de Beauce, entre el Sena y el Loira, cual artefacto de otro mundo suspendido entre el cielo y la tierra. Visible a un día de camino en cualquier dirección, era un lugar de peregrinación, de los más populares en la Cristiandad occidental. La iglesia románica de 1020 quedó destruida por un par de incendios en 1134 y 1194 y el nuevo edificio, el actual, fue el resultado de un siglo de reconstrucción y decoración entre 1140 y 1230, un edificio que resultaría enormemente influyente como cima del arte y la arquitectura góticas.

La fachada occidental de Chartres fue proyectada con tres puertas ricamente talladas, que representan la Encarnación, la Ascensión y la Segunda Llegada de Cristo, decoradas con un conjunto nunca visto de figuras y escenas bíblicas y seculares. La puerta meridional, a la derecha, muestra al niño Jesús en el regazo de María, sentada en un trono, en una postura que a veces se denomina *sedes sapientae*, ‘trono de la sabiduría’. Dos ángeles la flanquean y a su alrededor hay dos filas de arquivoltas, la primera con más ángeles y la segunda con una personificación de las artes liberales y sus representantes. Era la primera vez que se utilizaban personificaciones y practicantes de conocimientos seculares para enmarcar una escena teológica, e identifican a Cristo y a su madre como la Sabiduría, cuyos hijos eran, tradicionalmente, las artes liberales.

La sucesión de artes en esta segunda arquivolta empieza, abajo a la derecha, con Gramática, que está enseñando a dos niños (o lo intenta); uno se ha despojado de su ropa y estira el pelo del otro, mientras que Gramática lleva una vara, o quizá un látigo. No es un inicio prometedor, pero al menos las seis artes restantes parecen desempeñarse bastante mejor. Lógica sostiene los símbolos del Bien y el Mal: una flor y un monstruo; Retórica habla, Geometría escribe o dibuja y la hoy dañada Aritmética cuenta, quizá con sus dedos. Astronomía mira hacia el cielo y Música toca un conjunto de campanas.

Cada arte tiene un acompañante, una persona histórica real que había escrito sobre el tema. No llevan ningún nombre, de modo que algunos de los que se han asignado tradicionalmente pueden ser suposiciones erróneas: Donato, Aristóteles, Cicerón, Euclides, Pitágoras, Ptolomeo y Boecio. Todos están escribiendo o pensando, la acción queda reservada a las propias artes.

¿Por qué las siete artes liberales? Y ¿por qué aquí? Uno de los sabios más famosos asociados con la ciudad de Chartres, Thierry o Teodorico de Chartres, finalizó su libro sobre las siete artes, titulado *Heptateuchon*, por los mismos años en que se estaba tallando la fachada occidental. Las enseñanzas de Thierry subrayaban, en lo que se ha considerado una especie de Renacimiento *avant la lettre*, que los conocimientos seculares e incluso paganos estaban inspirados por la Sabiduría divina y podían ser un camino por el que los sabios se aproximaran a esa sabiduría. Fue su hermano Bernard, otro autor, quien afirmó que los sabios modernos eran como enanos sentados sobre los hombros de los gigantes de la Antigüedad. Así pues, las artes liberales eran el medio por el cual uno se podía preparar para lograr la comprensión de las verdades morales y teológicas; cual evangelistas seculares, recibían inspiración de Dios y la pasaban a los seres humanos.

En la disposición de las esculturas en Chartres, Geometría y Aritmética están situadas en lo alto de la arquivolta, lo más cerca de los cielos, lo que tal vez sea una indicación de la idea habitual de que la matemática estaba muy relacionada con la filosofía o la teología. Sin embargo, para su geometría Thierry se basó en una mezcla de Euclides y material de origen práctico; su *Heptateuchon* se basaba en la versión latina de los *Elementos* editada por Adelardo, pero también, y no poco, en el *Corpus agrimensorum*, del que cita cinco de sus autores y aprovecha buena parte de su versión truncada de Euclides.

Señora Geometría y las siete artes liberales no eran, de hecho, algo nuevo en las artes decorativas en la época en que se edificó Chartres, si bien nunca se habían representado como esculturas. Había precedentes en dos dimensiones, entre los cuales es posible que se hallara el palacio de Carlomagno, mosaicos de iglesias e incluso el dormitorio de Adela, condesa de Chartres, hacia 1100. Pero nunca fueron un motivo habitual en comparación con otros temas decorativos, como podían ser las Virtudes y los Vicios o las personificaciones de los meses del año. La primera imagen conocida de Geometría se halla en un manuscrito de la *Aritmética* de Boecio, confeccionado hacia 840 en Tours para Carlos el Calvo. En esta representación, Geometría sostiene un palo en la mano derecha y está de pie ante una superficie elevada en la cual se han trazado figuras geométricas; quizá se trate de un tablero de dibujo o, con más probabilidad, de un cajón de arena, el «ábaco polvoriento» citado por Marciano Capella en su descripción de las artes y sus accesorios.

Geometría enseñando.

Más adelante, encontramos un goteo de otras descripciones: un manuscrito suabo de Isidoro de Sevilla, vitrales en Laon y tratados sobre las artes y el conocimiento durante los siglos XIII y XIV. En una copia del siglo XIV de la versión de Adelardo de los *Elementos*, algunas iniciales están iluminadas, y la P al principio de la primera definición muestra no solo a Geometría (de nuevo, trazando formas en una mesa elevada), sino también a una pequeña multitud de sus ansiosos discípulos. El fresco del *Triunfo de Santo Tomás de Aquino* en la iglesia de Santa María Novella, en Florencia, muestra a las artes liberales; así como también, ya en el siglo siguiente, los vitrales de la biblioteca capitular de Chartres.

Las artes personificadas solían ser mujeres (aunque no siempre), en parte por la simple razón de que la palabra *ars*, 'arte', es femenina en latín. Sus atributos, es decir, los instrumentos y equipo de trabajo con el que se representan, tardaron un cierto tiempo en afianzarse en un conjunto fijado. En el caso de Geometría, solía ser una vara, podemos suponer que para medir, y que recuerda en algunos casos la vara con la que san Juan mide el templo y el ángel mide la Nueva Jerusalén en el libro del Apocalipsis; a veces dignificada como una «vara geométrica» especial, en general se nos muestra como un simple palo. En ocasiones, Geometría sostiene un diagrama, casi siempre el de la primera proposición de los *Elementos*; con más frecuencia aparece trazando figuras simples como círculos y triángulos para el espectador o, como en el libro iluminado de Boecio, para sus estudiantes. Con diferencia, el atributo más habitual es un compás y, finalmente se llegó a una imagen bastante asentada de Geometría: en lugar de sostenerlo o de agitarlo sin más, se inclina hacia delante para trazar un círculo en el suelo. Para que esta representación funcionara, o bien el compás tenía que ser enorme o bien Geometría tenía que encorvarse por completo, pero en cualquier caso, el compás se mostraba en acción y se recuperó la antigua imagen del geómetra trazando figuras en el polvo (y continúa siendo una manera habitual de representar a la geometría en acción: la monumental escultura de Isaac Newton en el exterior de la Biblioteca Británica en Londres, erigida en 1995, adopta la misma postura).

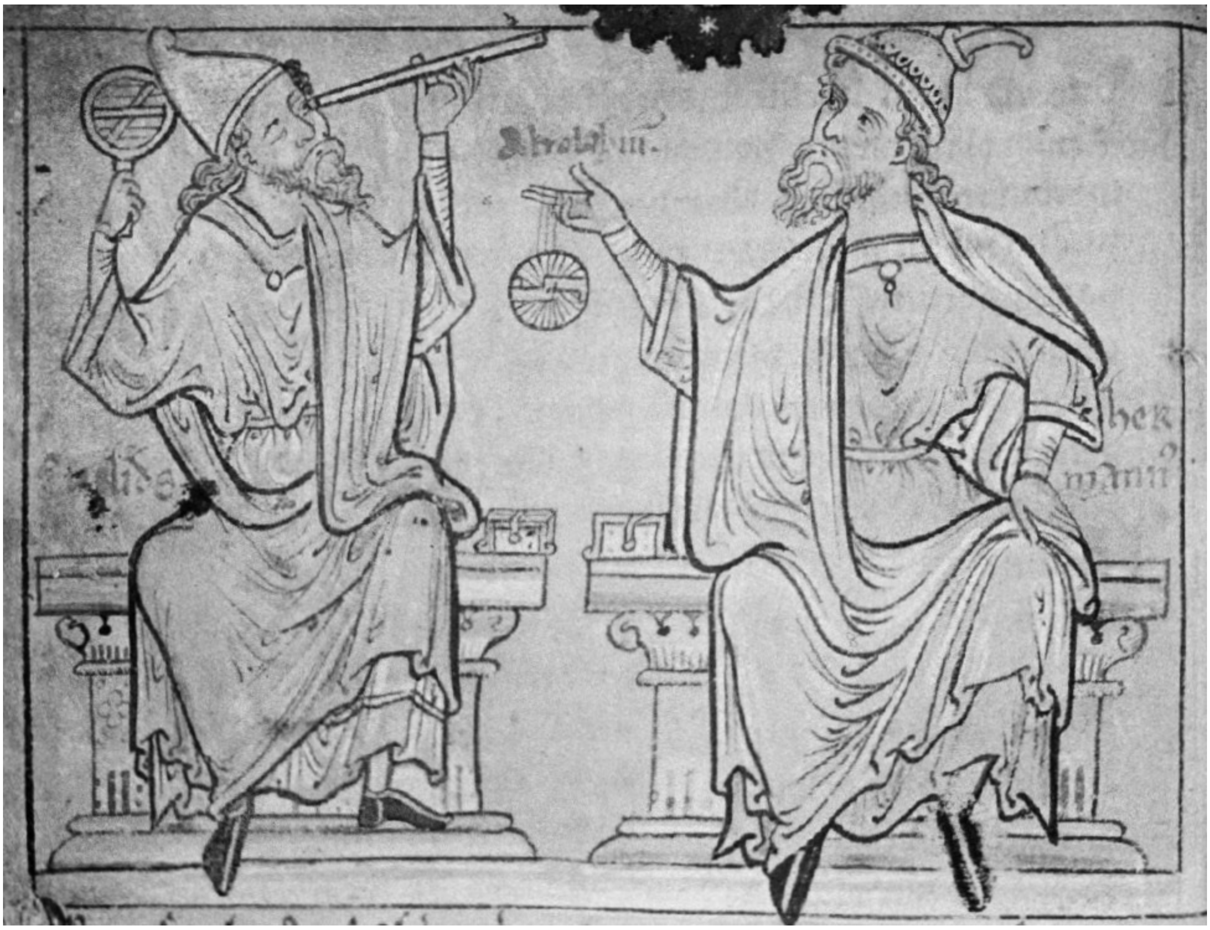
En muchos casos, los accesorios de las artes liberales no solo incluían objetos, sino también personas: representantes o practicantes de esas artes. En este caso no se afianzó ningún ciclo concreto de personajes, y los acompañantes de las artes eran diferentes cada vez; no obstante, en el caso de Geometría, casi siempre se trataba de Euclides. Una alternativa era presentar a las artes con ayudantes, practicantes de esas artes, alejando así la práctica del arte de su personificación e incorporándola en el mundo humano; en el caso de la geometría corresponde a Geometría flanqueada por carpinteros o agrimensores. En algunas versiones, el arte y el practicante se fusionan, o también se combinan el representante y el practicante. En ocasiones, una tradición poco habitual de representar un ciclo de «artes prácticas» además de las artes liberales, complica aún más la situación, y asigna a la carpintería o la agrimensura personificaciones propias, con sus correspondientes atributos.


Las siete artes liberales.

En un manuscrito del siglo XV del *Reloj de la sabiduría* aparece una representación particularmente llamativa de las artes liberales, con una imagen que muestra una escuela idealizada de teología y las artes liberales en un espacio para ellas. Las siete damas disponen de una especie de biblioteca y han dejado unos cuantos libros en un atril central. Están de pie o sentadas leyendo o trabajando; calculan, observan y sostienen un astrolabio. Gramática enseña a cuatro hombres diminutos que se apiñan a sus pies. A través de una bóveda pueden verse estrellas. Geometría trabaja en el suelo con su habitual vara y compás, pero a su lado también tiene un ejemplo del tradicional instrumento romano de agrimensura, el *groma*.

Lo mismo pasó con Euclides; a lo largo del tiempo, sus representaciones vacilaron entre el sabio despistado y el profesional práctico. Un manuscrito alemán del siglo XV lo muestra como albañil; otro parece mostrarlo trabajando en un banco de carpintero, con ayudantes que sostienen una vara y una plomada. En el pie de la figura se puede leer: «Midiendo y pesando por medio de triángulos y otros, aquí se practica geometría».

Otra representación temprana de Euclides lo transforma en otro tipo de profesional: astrónomo. Un manuscrito que se conserva en la Biblioteca Bodleiana de Oxford fue copiado hacia 1230 o 1240 por el famoso escriba y sabio Mateo de París en el monasterio de Saint Albans. Se trata de un códice en pergamino de setenta y pico hojas y contiene una miscelánea de textos sobre predicciones y adivinación del tipo llamado *sortes*, que utilizaba procesos aleatorios para responder a las preguntas de alguien. En general, había una tabla con las preguntas disponibles y otra tabla con las posibles respuestas; el cliente escogía una pregunta y el profesional lanzaba los dados, echaba las suertes o clavaba una aguja en un libro para iniciar un procedimiento aleatorio que seleccionaría una de las respuestas.



Euclides y Hermann.

En el conocido pariente de este método llamado *sortes Biblicae* (en el que se escogía al azar un pasaje de la Biblia) se suponía que la providencia divina determinaba la elección. En situaciones más seculares, se suponía que el resultado lo decidían otros poderes espirituales, como los planetas o las estrellas, de modo que algunas *sortes* se caracterizaban como astrológicas, si bien no era necesario conocer en absoluto los movimientos de los cuerpos celestes.

Las diversas *sortes* del manuscrito bodleiano se presentan con retratos de sus supuestos creadores, con los correspondientes atributos. Podemos ver a Sócrates y a Platón; tenemos a Pitágoras y media página con los doce patriarcas bíblicos; en otras ornamentaciones hay pájaros y otros animales, flores y frutas. En cualquier caso, el volumen empieza con una imagen a media página de dos hombres sentados y etiquetados como «Euclides» y «Hermann».

Hermann era el presunto colaborador de uno de los textos del volumen, Hermann el Cojo o Hermann de Reichenau, del siglo XI, recordado hoy en día sobre todo como autor de himnos pero más famoso en la Edad Media por su tratado sobre el astrolabio, entre otras cosas (sin duda, el mundo era un pañuelo, pues Hermann dedicó una obra precisamente a Thierry de Chartres). En cambio, para Euclides no hay ninguna conexión parecida con el contenido del texto; ni es mencionado en las *sortes* ni nunca se dice que sea su autor. Una razón para representarlo podría ser que el inicio del primer texto recuerda vagamente el inicio de los *Elementos*: «Sea una línea, al azar, formada por una cierta cantidad de puntos». Otra razón podría ser el estilo astrológico o astronómico de parte del material; como Euclides había escrito sobre astronomía, el escriba tal vez consideró que sería un personaje tan bueno como cualquier otro para representar a la distinguida historia de autores astronómicos.

Fueran cuales fuesen las razones, ahí está. A Hermann se le muestra ofreciendo un astrolabio a Euclides, mientras que este hace lo que acostumbra a representarse como actividad de los astrónomos: observar las estrellas. Y Euclides observa ayudándose de una vara o un tubo; algunos lo han considerado una dioptra, el instrumento griego de observación y medición equivalente, funcionalmente, al *groma* romano, pero no está claro que no sea una simple vara. En la otra mano, la derecha, sostiene un objeto redondo, que puede ser un modelo esférico de los cielos, una pequeña esfera armilar. Su pelo y barba rizados y su gorro frigio lo señalan como vagamente «oriental» (en el arte medieval estos rasgos se asociaban sobre todo con esos otros sabios de Oriente, los tres Magos del evangelio de Mateo).

Euclides y su imagen se iban transformando en patrimonio común, en un símbolo genérico de conocimiento y trabajo matemático adecuado para los más variados contextos. Ataviado con elegancia y con herramientas e instrumentos, en muchos casos parece haberse convertido en una especie de héroe para los geómetras y para los que enseñaban esta disciplina; un personaje venerado pero acaso malinterpretado.

Piero della Francesca

Cuestión de perspectiva

Un tipo barbudo al lado de una columna, con el torso desnudo ante los látigos de dos soldados. Un hombre ataviado con ricas vestimentas observa la escena, sentado a un lado; otro observador está de pie. Fuera del edificio, más cerca del espectador, otros tres hombres conversan, al parecer ajenos a lo que sucede a sus espaldas, aunque la forma en que están agrupados parece reflejar la posición de los soldados y su víctima; la fabulosa variedad de sus ropajes también parece reflejar una variedad similar en la escena principal.

A pesar de la violencia de los sucesos, la escena transmite una calma sobrenatural. La luz define las figuras, pero es difícil de identificar; tal vez haya una lámpara en algún sitio que el espectador no puede ver. El orden y el caos están equilibrados de una manera que cuesta apreciar, y seguro que los dos grupos de figuras tienen alguna relación entre ellos, pero ¿cuál?

La flagelación de Cristo, pintado por Piero della Francesca posiblemente hacia 1450 o 1460, está a años luz de las representaciones medievales de la geometría y de Euclides y, sin embargo, tiene unas cualidades geométricas que lo vinculan estrechamente con Euclides y su obra.

La flagelación de Cristo, de Piero della Francesca.

Siguiendo la estela de la *Óptica* de Euclides, había una rica tradición de textos sobre cuestiones ópticas, en griego, árabe y latín, y hacia el siglo XV, los artistas ya utilizaban líneas de horizonte y puntos de fuga para proporcionar una cierta ilusión de la posición del observador respecto al espacio representado: arriba o abajo, a izquierda o derecha. Hasta ese momento, el término latino *perspectiva* solo se refería a la ciencia de la óptica, pero durante el Renacimiento pasó a significar la ciencia de la pintura ilusionista. Se atribuye a Filippo Brunelleschi, el artista y arquitecto que diseñó la cúpula de la catedral de Florencia, la invención de una regla que ayudaba a situar el ojo en la tercera dimensión, aunque no está claro cómo era realmente tal regla.

Leon Battista Alberti, otro arquitecto, incluyó unas páginas sobre perspectiva en su tratado de pintura (dedicado a Brunelleschi) en la década de 1430, pero era un libro ambicioso que abarcaba muchos temas, destinado a entendidos, no a la enseñanza de artistas; además, desde el punto de visto técnico, su exposición es confusa y, tal como admite el propio Alberti, incompleta. Su punto de vista, como el de muchos de sus contemporáneos italianos, era que la geometría y su estudio de las proporciones podían dar a la descripción de la belleza una base racional y que la armonía geométrica era la respuesta a la mayoría de las cuestiones relevantes en las artes. Ahora bien, ¿cómo podían pasar los artistas de las formas puras de la geometría a las desarregladas formas de la experiencia real? Alberti dejó la pregunta sin responder.

En este momento entra en escena Piero della Francesca. Su *Flagelación* es uno de los clásicos de los primeros tiempos de la perspectiva, pero es en verdad enigmático en todos los aspectos en que puede serlo un cuadro. Se ha datado de 1445 a 1475, lo que lo convierte o bien en una de las primeras obras de Della Francesca o en una de las últimas, o también en cualquier cosa intermedia. Por lo que respecta a su tamaño, con unos sesenta por setenta y cinco centímetros, es pequeño para ser un retablo pero demasiado grande para ser una predela. El detalle con el que está pintado exige una observación cercana (podemos imaginarnos a un experto sosteniéndolo ante sus ojos para examinarlo), pero en cambio la perspectiva está construida de manera que solo se ve correctamente desde casi dos metros.

La composición no es menos misteriosa, muy diferente de otras representaciones contemporáneas de la flagelación de Cristo. La parte izquierda de la imagen es un grupo bastante tradicional, con Cristo, la columna y dos soldados con sus látigos; la figura sentada se identifica, lógicamente, con Poncio Pilato, pero el otro observador es difícil de identificar. El otro grupo equivalente (¿es realmente equivalente?) a la derecha, en cambio, parece una escena independiente por completo, quizá de un lugar o momento diferente. Se ha planteado que el cuadro es una historia de dos voces en una sola imagen, de dos narrativas que atraen la mirada del espectador hacia lugares diferentes. Las dos escenas se sitúan a distancias muy desiguales respecto al ojo del espectador, de manera que las figuras en primer plano, a la derecha, dominan la composición por su propio tamaño y dan a la flagelación el aire de algo distante, como si lo observáramos a través de una ventana.

Por último, la iluminación también es un enigma. Della Francesca era de lo más habilidoso en el tratamiento de la luz y el juego de colores, y en este caso estamos ante un cuadro en verdad hermoso. No obstante, las dos escenas están iluminadas de modo desigual: el primer plano recibe luz solar de la parte superior izquierda, mientras que el fondo parece tener una fuente de luz diferente, situada entre dos de las columnas, tal vez justo donde está mirando Cristo.

Han abundado los intentos de interpretar todos estos elementos y darles sentido. Hay relaciones entre los tamaños de los objetos representados en el cuadro, como los cuadrados del suelo y el techo; también hay relaciones entre sus distancias hasta el ojo del espectador: por ejemplo, el observador de espaldas y con turbante parece estar exactamente al doble de distancia del espectador que las tres figuras del primer plano. Lo cierto es que es difícil determinar cuántas de todas estas conexiones son construcciones deliberadas por parte del artista. El motivo cuadrado del suelo en el que está Cristo queda interrumpido por un círculo, que podría ser solo un guiño a la complejidad e irracionalidad matemática, ausente del suelo más simple del primer plano. Ahora bien, puede tener asimismo una relación con las descripciones que los peregrinos hacían de Tierra Santa: las cuatro columnas, el suelo de mármol y el disco central son todos elementos que se pueden hallar en las descripciones de las ubicaciones de la Pasión.

Por su parte, las tres figuras del primer plano se han intentado identificar casi tan a menudo como textos se han escrito sobre el cuadro (un artículo reciente da una lista de veintinueve identificaciones publicadas de esas figuras, ninguna coincidente). Su mezcla de vestimentas griegas, italianas y clásicas (o supuestamente clásicas) ha llevado a lecturas tanto históricas como simbólicas: el papa, el emperador bizantino, el duque de Urbino, un joven milagrosamente resucitado por santa Helena, representaciones genéricas (teólogos, astrólogos, campesinos, mercaderes), etc. Si el pintor tenía alguna intención específica, se antoja casi imposible recuperarla con alguna certeza.

Con tantos misterios en una única tabla, es todo un descanso ocuparse de la perspectiva empleada. Tal como afirma un historiador, no se trata de un ejemplo de perspectiva de ese período, sino de *el ejemplo*. Para la generación de Della Francesca, la perspectiva era un método bien establecido y está claro que su comprensión del tema iba mucho más allá de lo que pudiera leerse en el libro de Alberti. Las líneas que tienen que verse como perpendiculares al plano del dibujo convergen todas en un único punto detrás del salón donde se está produciendo la flagelación; el plano y el alzado de la escena se pueden reconstruir con todo detalle a partir del cuadro, y Della Francesca seguro que dibujó un plano y un alzado como referencia antes de pintarla. El detallado motivo del suelo, con cuadrados divididos en más cuadrados, sin duda se diseñó sobre un plano antes de pasarlo a perspectiva.

La sensación de calma que muchos autores han hallado en las pinturas de Della Francesca, y en esta en particular (una calma que contrasta con viveza con la violencia que en ella se representa), tal vez tenga algo que ver con esta atención a la perspectiva. Desde el punto de vista ideal, el espectador puede captar toda la escena de una sola vez, sin necesidad de ir a tientas ni de irse moviendo para ajustarse a varios puntos de fuga. Es rarísimo (acaso único) que el arte del siglo XV logre tal grado de corrección.

Y, sin embargo, el cuadro no es un diagrama geométrico. Los pequeños cuadrados tienen anchuras algo diferentes; las vigas del techo no son exactamente paralelas y los soportes no son del todo verticales. La trayectoria que viene a cortar el plano del cuadro es más estrecha que las otras de la imagen. Se trata de una casa real, no la idealización de un arquitecto.

Piero della Francesca procedía de un pueblecito en el valle alto del Tíber. Hacia 1430 trabajaba de pintor en su Sansepolcro natal, y en 1439 en Florencia. En esa época, los pintores de Italia eran artesanos y recibían una educación acorde: aprendían matemática básica y a leer y escribir en su lengua vernácula en las escuelas locales. Della Francesca sin duda tenía aptitudes para la matemática y también una capacidad extraordinaria para visualizar y representar escenas en dos y tres dimensiones. Durante su vida logró un conocimiento profundo de los *Elementos* y de la *Óptica* de Euclides; el interés en estas obras era habitual, tradicional incluso, para un artista, pero la intensidad con la que Della Francesca se lanzó a su estudio tal vez no lo fuera tanto.

Tampoco era habitual el hecho de que escribiera acerca de temas de matemáticas. Se han conservado tres de sus tratados sobre esta disciplina. El primero, seguramente bastante primerizo (aunque las fechas propuestas abarcan un período de treinta años), era un «libro de ábaco», el *Trattato d'Abaco*. Era el tipo de libro de texto que podían usar los estudiantes locales y trataba temas de aritmética, álgebra (en palabras) y geometría. Consistía en largas series de problemas de tipo «práctico»; de estos, algunos eran realmente prácticos, pero otros eran bastante artificiosos para que los números salieran bien o para mostrar algún aspecto matemático. Había que repartir herencias, llenar cisternas de agua, apoyar escaleras contra paredes y medir campos, todos ellos elementos de una recargada tradición que en Italia se remontaba al *Liber abaci* de Fibonacci, de 1202, que a su vez se basaba en modelos árabes.

El *Trattato d'Abaco* contenía más geometría que la mayoría, y pronto deja de lado problemas prácticos de medición a favor de cuestiones bastante abstractas sobre polígonos y poliedros, que sin duda interesaban a Della Francesca. Por ejemplo, tienes un triángulo cuyos lados miden trece, catorce y quince unidades y quieres trazar el mayor círculo posible en su interior; ¿qué tamaño tiene este círculo? El libro avanza a través de cuestiones sobre cuadrados, rectángulos, pentágonos, hexágonos y octágonos, e incluso discute los sólidos regulares, algo único entre los libros de ábaco de su época (y acaso una alusión deliberada a la culminación de los *Elementos* de Euclides con los mismos sólidos). Tienes una esfera cuyo diámetro es de siete unidades y quieres colocar en su interior una figura cuyas caras sean cuatro triángulos equiláteros, de modo que sus vértices toquen la esfera; ¿qué longitud tendrán los lados de esta figura?

Era una obra parecida a los *Elementos* y, a la vez, muy diferente. Della Francesca no hizo solo un refrito de ideas tradicionales, sino que se muestra como un matemático innovador. En el *Trattato* hay problemas que quizá hayan sido creados por él, y en el caso de los sólidos tridimensionales introdujo dos figuras interesantes que al parecer (re)inventó él mismo: una con ocho caras (cuatro triángulos y cuatro hexágonos) y una con catorce caras (seis cuadrados y ocho triángulos).

Della Francesca se labró así una bien merecida reputación de matemático capaz, y no es ninguna sorpresa descubrir que aprovechó sus habilidades en una descripción por escrito de la teoría de la perspectiva; de hecho, es la primera descripción sustancial de este tipo. Como antes, las fechas no están claras, pero lo más probable es que la composición se remonte a 1460, más o menos. Este libro fue traducido al latín veinte años después para entregarlo a la biblioteca ducal de Urbino. Por desgracia, el original italiano se ha perdido.

El libro, en latín titulado *De prospectiva pingendi*, tal vez fuera el resultado de peticiones de explicación del tema por parte de contemporáneos de Della Francesca, pero no está nada claro cuántos pintores lo habrían podido entender. En comparación con el tratado general de pintura de Alberti, se trata de un libro muy diferente, centrado en la perspectiva y en sus aspectos técnicos. La primera parte ofrece una preparación teórica y se ocupa de la perspectiva de puntos, líneas y superficies. El resto del libro proporciona métodos prácticos para hacer dibujos en perspectiva. En líneas generales, el estilo es el mismo que el del *Trattato d'Abaco*, con detallados ejemplos presentados como instrucciones paso a paso para el lector, al que tutea con familiaridad y está claro que de él espera que vaya siguiendo las explicaciones con instrumentos de dibujo en mano. Se guía al lector muy de cerca a través de cada paso necesario para construir los diagramas de apoyo, de una manera que sin duda deriva de las instrucciones orales que se daban a los aprendices en el taller de un pintor; así el aprendizaje de la perspectiva se reduce a copiar un conjunto dado de imágenes. Aun así, el libro combina este modo práctico con el de Euclides.

Efectivamente, el libro está estructurado en una serie de «proposiciones», varias de las cuales (las primeras) están tomadas directamente de la *Óptica* de Euclides. Por ejemplo, si dos objetos son de igual tamaño, el más cercano al ojo aparecerá más grande. Della Francesca supera a Euclides pensando, de manera sistemática, en términos de una «pantalla» colocada entre el ojo y el objeto observado, sobre la cual se supone proyectada la imagen. De esta manera, la pregunta ya no es «¿qué ángulos formarán estos objetos en el ojo?», sino «¿qué es lo que, dibujado sobre esta pantalla, tendrá el mismo aspecto para el ojo que los objetos reales?». Las relaciones entre las formas y los tamaños en esta pantalla eran geométricas, y podían estudiarse y determinarse mediante métodos euclidianos. Della Francesca definió la pintura como una rama de la geometría y la perspectiva como una ciencia de la medición, una forma de ver que era superior a la simple visión natural, siguiendo aquí el entusiasmo de Alberti por la armonía geométrica y la proporción.

Así pues, Della Francesca se sitúa en la intersección de dos tradiciones, vinculando los mundos de los artesanos y de los académicos. A diferencia de al-Buzjani, no era un erudito en diálogo con los artesanos; él mismo era ambas cosas, un pintor que a la vez era artesano y erudito. Con él no solo puedes descubrir la proporción en que objetos distantes disminuyen de tamaño a la vista, sino también cómo dibujar una casa, una columna o un pozo con la perspectiva correcta. No solo muestra cómo reducir un cuadrado en una determinada proporción o cómo colocar encima un cubo con la perspectiva adecuada, sino que también explica cómo mantener las proporciones de iglesias, templos, ventanas redondas o incluso cabezas humanas cuando se desplazan y se sitúan en orientaciones diversas en una pintura.

Está claro que los cuadros de Della Francesca fueron una fuente para su propia *De prospectiva*. El diagrama clave de la primera parte del libro muestra un gran cuadrado con varios cuadrados más pequeños en su interior que retroceden hacia un punto de fuga, con un observador esquemático que mira la escena desde un lado; se trata casi de una imagen especular de algunos elementos presentes en la *Flagelación*. En *De prospectiva* también aparecen, algo modificados, los motivos cuadrados del suelo y el techo de la *Flagelación*, así como las franjas de mármol blanco del suelo. Incluso los pedestales, las columnas y los capiteles del cuadro tienen equivalentes muy parecidos en el libro. Asimismo podemos hallar elementos de otros cuadros de Della Francesca, subrayando, para todos aquellos que sabían dónde mirar, la unidad de su arte y su matemática.

Della Francesca aún no había acabado con sus textos matemáticos. Hacia el final de su vida, quizá en la década de 1480, redactó otro tratado, esta vez sobre los cinco sólidos regulares. Dedicado al nuevo duque de Urbino, y traducido diligentemente al latín, nos muestra que Della Francesca continuó navegando por los materiales euclidianos tras finalizar su *De prospectiva*.

El libro (*Libellus de quinque corporibus regularibus*) copiaba o reelaboraba material ya contenido en el *Trattato d’Abaco* y pasaba a ocuparse de los sólidos con más detalle, en el fondo reproduciendo el contenido de los libros XIII y XV de los *Elementos*. Comenta cómo colocar un poliedro dentro de otro y qué relaciones se darían entre los lados de sus caras. Como en el *Trattato* y en *De prospectiva*, todo se presenta en ejemplos concretos, con números específicos para los tamaños de los poliedros en lugar de las longitudes abstractas de Euclides: hallar el diámetro de una esfera que contiene un tetraedro regular de cuatro brazos de lado; hallar la base de un icosaedro cuyo volumen es cuatrocientos.

También como el *Trattato*, este libro presenta algunos sólidos irregulares que parecen haber sido (re)descubrimiento suyo. Della Francesca se ocupa de cinco, incluyendo cuatro nuevos respecto al *Trattato*; el más espectacular tiene setenta y dos caras: veinticuatro triángulos y cuarenta y ocho cuadrados. Su método era empezar con un sólido regular y cortar («truncar») sus vértices de modo que, por ejemplo, una cara triangular se convirtiera en hexagonal, o una cara cuadrada pasara a ser octagonal. Si se hacía del modo correcto, las caras resultantes serían polígonos regulares y, por lo tanto, el sólido resultante sería «semirregular», con el mismo conjunto de caras poligonales dispuestas alrededor de cada vértice. Este método de truncamiento parece haber sido otra de las invenciones de Della Francesca.

El *Libellus* finaliza con una serie de acotaciones, entre las cuales se encuentra el sorprendente problema práctico de hallar el volumen de un objeto irregular sumergiéndolo en un cilindro graduado, un buen truco arquimediano y que subrayaba que este tratado no era el texto puramente euclidiano que su título podría dar a entender. Como el *De prospectiva*, en cierto sentido era una obra euclidiana, pero en otro no lo era; parece que Della Francesca había decidido seguir con el legado de Euclides a su propia manera.

Piero della Francesca murió en 1492 y sus libros no se publicaron en vida. Sin embargo, parece que el *Libellus* sobre los sólidos regulares se leyó bastante, y los tres libros resultaron influyentes gracias a su reutilización (por decirlo suavemente) por parte del matemático Luca Pacioli, de la siguiente generación. La larga carrera de Pacioli por Italia lo puso en contacto con Alberti y Della Francesca, entre muchos otros, y junto con este último, gozó del mecenazgo del duque de Urbino. Tras la muerte de Della Francesca, parece que adquirió sus manuscritos y luego el autor del siglo XVI Giorgio

Vasari lo vituperó por la publicación y uso de los textos de Della Francesca sin concederle el crédito debido.

El libro de Pacioli sobre aritmética aprovechaba problemas procedentes del *Trattato d'Abaco* así como su tratamiento de los sólidos y material del *De prospectiva*; Pacioli atribuye a Della Francesca el hecho de asentar la perspectiva sobre fundamentos geométricos, pero nada más. Su *Divina proportione* incluye una versión italiana del *Libellus* sobre sólidos regulares, en la que tampoco da crédito a Della Francesca. Pacioli hizo mucho para poner de moda el estudio de los cuerpos geométricos, y se le representó en un famoso cuadro enseñando al duque de Urbino con dos sólidos geométricos (uno de madera, otro de vidrio), uno sobre la mesa y otro en el fondo. El retrato muestra claramente a Pacioli como experto en Euclides, con los *Elementos* abiertos por una página anotada del libro XIII y un conjunto de instrumentos de dibujo ante el observador, como si aceptara el reto que representaba el libro.

Otro amigo famoso de Pacioli era Leonardo da Vinci (compartieron una casa en Milán), quien proporcionó ilustraciones de los sólidos para el *Divina proportione*, ni más ni menos que cincuenta y nueve xilografías a página completa cuando se publicó el libro. Mientras que Della Francesca había ofrecido esquemas lineales sencillos en sus manuscritos, Leonardo proporcionó imágenes muy realistas, incluso táctiles, de los cuerpos representados, con iluminación y sombras. También proporcionó una versión «esquelética» de cada uno, con los lados reducidos a palos gruesos, de modo que los lectores pudieran ver a través de los sólidos, como si fueran transparentes, y apreciar mejor su construcción. En algunos casos, la ilustración da bastante más información sobre el cuerpo que el texto de Pacioli. Sin embargo, ni Della Francesca ni Leonardo lograron una perspectiva totalmente correcta de los sólidos.

A través de Pacioli, el estudio de los sólidos fue retomado en otros lugares, con figuras como Alberto Durero y Wenzel Jamnitzer en Alemania. Durero describió siete sólidos irregulares, de los cuales cinco ya habían aparecido en las obras de Pacioli y dos eran nuevos; y en lugar de mostrar ilustraciones, ofreció patrones, desarrollos a partir de los cuales el lector podía construir un modelo tridimensional con papel. Este era tal vez el siguiente paso lógico en la fusión que hizo Della Francesca de la geometría euclidiana y la práctica manual.

La obra de Jamnitzer *Perspectiva corporum regularium* ('La perspectiva de los sólidos regulares'), publicada en Núremberg en 1568, fue una especie de culminación. Presentaba ilustraciones en perspectiva de unos ciento cincuenta sólidos diferentes, todos derivados a partir de los cinco regulares: los truncó, los «estrelló» añadiendo una pirámide en cada cara, derivó nuevos sólidos a partir de otros sin ningún proceso muy sistemático, y con poco texto de soporte, resulta difícil seguir sus argumentaciones. No da instrucciones para dibujar o construir los sólidos, solo una serie casi inacabable de dibujos. Dedicó un capítulo a cada uno de los sólidos platónicos y sus derivados, y cada uno se presentaba con una ilustración del elemento al que correspondía ese sólido en la antigua cosmología de Platón.

Es posible que el objetivo del libro de Jamnitzer fuera impresionar, y no transmitir ninguna información muy específica. Si queremos ser más amables, podemos verlo como un libro de motivos para uso de artistas y artesanos. Los cuerpos sólidos geométricos, y su representación en perspectiva, se habían convertido en un tema común, parte de la imagen general que tenían los artistas y los intelectuales de ellos mismos. Había una tendencia a mostrarlos (en retratos, marquetería, tableros de juego o relojes de sol) para señalar que el propietario era docto y experto, para demostrar un ingenio capaz y una mente elevada; también se puso de moda utilizarlos como motivo decorativo en tumbas.

La fusión del saber geométrico euclidiano con las capacidades prácticas artesanales se habían vuelto parte del panorama europeo (gracias en buena medida a Piero della Francesca). La profesión de los llamados *practicantes de matemáticas*, hábiles con la mente y con las manos, se afianzaría cada vez más durante los siglos XVI y XVII. Por lo que respecta al arte, la técnica de la perspectiva pasó a ser un elemento básico de la formación de los pintores, un prerrequisito para incluso el artista menos ambicioso. Aunque el libro de Piero della Francesca sobre el tema había desaparecido de la vista, casi todos los demás tratados de perspectiva adoptaron diligentemente su conjunto de ejemplos desarrollados para enseñar cómo debían construirse las perspectivas.

Euclid Speidell

Enseñar y aprender

Londres, década de 1680. Nathaniel Denew consigue alojamiento en una casa familiar de Whitechapel. Su casero resulta ser un practicante de matemáticas, y Denew decide recibir lecciones de él durante un tiempo. Aprende aritmética: la manipulación de los números, de los pesos y las medidas y, sobre todo, del dinero, en los complejos sistemas de unidades que se utilizaban en Inglaterra en esa época.

El maestro y casero obtiene buena parte de sus ingresos midiendo y estimando volúmenes y cantidades de productos por cuestiones impositivas, pero también se aventura en la docencia de las matemáticas en tabernas y casas de huéspedes, como la de King’s Head en Threadneedle Street. Más adelante publica unos pocos libros de matemáticas. Su nombre es Euclid Speidell.

¿Qué le debía de parecer a Denew (seguramente un joven, recién llegado a Londres) aprender matemáticas de la mano de «Euclides»? Es posible que se dirigiera a su maestro como «señor Speidell», pero aun así, debía de ser emocionante. Imaginaos aprender filosofía de un maestro que se llamara Platón.

La matemática práctica formaba parte de la cultura europea de los siglos XVI y XVII. Los practicantes de matemáticas hacían un poco de todo, desde obras de alcantarillado hasta tasaciones impositivas, fuegos artificiales, fortificaciones o relojes de sol; enseñaban, escribían, publicaban, vendían libros y ejercían sus habilidades matemáticas de cualquier manera en que consideraran que la gente podría pagar por ellas. Muchos de ellos adoptaron la costumbre de Piero della Francesca de usar ideas y métodos euclidianos, y de este modo dieron una nueva visibilidad y una nueva envergadura a Euclides y sus *Elementos*, pues estos practicantes generaron una enorme cantidad de material impreso, cada uno como respuesta a diferentes combinaciones de situaciones y problemáticas locales.

Si la matemática era un remanso de orden en un mundo caótico, ¿qué mejor que recurrir al tipo particular de certeza y verdad que algunos filósofos asignaban a los métodos euclidianos de demostración? Si tu identidad como matemático práctico dependía de la autoridad de las matemáticas, ¿qué mejor manera de afianzar esa autoridad que apelar a la grandeza de los venerables *Elementos*, disponibles ahora en ediciones impresas adaptadas a todas las necesidades? Y si tus ingresos dependían de la enseñanza de métodos matemáticos, ¿qué mejor modo de parecer competente y atrayente que adoptar la estructura de conocimiento implícita en la sistemática ordenación de los *Elementos* de Euclides?

Tal como afirma un historiador, las personas implicadas eran «un nuevo tipo de intelectual», que se movían por «talleres, universidades y cortes» y «construían sus identidades alrededor de prácticas matemáticas, como el trazado de planos arquitectónicos, la calibración de horóscopos, la agrimensura, la fabricación de instrumentos, la realización de observaciones y la docencia a estudiantes».

Los libros que escribieron cubrían todos estos temas y muchos más, de modo que las definiciones de Euclides, sus métodos y algunas de sus proposiciones (o referencias a estas) se introdujeron en toda una gama de libros prácticos: manuales de perspectiva, obras populares sobre astronomía, textos sobre agrimensura y medición. La hidráulica, la arquitectura e incluso la esgrima, la danza y la costura tuvieron sus presentaciones sistemáticas y «geométricas» en libros en inglés, francés, neerlandés, italiano, alemán y español, asegurando que se basaban en Euclides pero ofreciendo resultados prácticos reales. Se vendieron, se reimprimieron, se emplearon en el aula y en el taller y, efectivamente, se utilizaron de un modo práctico. Una *Young Mathematician's Guide* ('Guía para el joven matemático') del siglo XVIII aún tiene serrín entre sus páginas.

Euclid Speidell vivió entre 1631 y 1702, más o menos, y ejemplifica el practicante de matemáticas de clase media, al cual pertenecían ahora las ideas euclidianas. Además de las ocasionales referencias de sus contemporáneos y de los libros que publicó, disponemos de un manuscrito de su autobiografía: dieciséis páginas que nos permiten acercarnos a su vida con gran detalle.

Su familia era alemana; el abuelo de Euclid se había mudado a Inglaterra durante el reinado de Isabel I y trabajaba en la ceca real. Su padre, John, fue un practicante de matemáticas de éxito, que publicó varios libros sobre temas como la aritmética y los logaritmos; inventó una vara para determinar cuánto líquido contenía un barril. Durante la primera mitad del siglo XVII, John enseñó y publicó sobre temas de matemáticas y ofrecía clases en su hogar «en los campos entre la calle Princes y el Cockpit», tal como también haría luego su hijo Euclid. Enseñaba en francés, latín o neerlandés, según las necesidades, y publicitaba sus lecciones en aritmética, álgebra, geometría, astronomía, navegación, fortificación, construcción de relojes de sol, trigonometría y uso de logaritmos. Por si acaso, también vendía a sus estudiantes copias de sus libros y «el mejor texto de matemáticas». Durante la primera guerra civil inglesa, la práctica de John Speidell se resintió, y murió en 1649, con seis hijos vivos.

John Speidell era el tipo de practicante de matemáticas que citaba a Euclides con frecuencia y que adoptaba métodos euclidianos o cuasi euclidianos en sus textos; dos libros de problemas matemáticos que publicó tienen un sabor euclidiano inconfundible. De todos modos, la decisión de bautizar a su hijo con el nombre del gran matemático griego era muy poco habitual, y tampoco está claro si el joven recibió este nombre al nacer o lo adoptó más tarde como etiqueta profesional. Euclid alternó períodos de educación en la escuela con etapas de formación en casa. Pasó un tiempo en la Westminster School, con el famoso director Richard Busby, que había ofrecido al joven clases gratuitas; de este lugar, Euclid recordaba sobre todo el aprendizaje de la gramática latina y la composición poética, y en su autobiografía podemos notar una sensación de alivio cuando pudo volver a casa y aprender más aritmética y agrimensura con su padre. En 1648, emprendió una medición de los bosques de Eltham, en Kent.

A los trece años enseñaba aritmética a otros niños, pero su padre murió cuando tenía dieciocho años y en los años siguientes su vida se volvió peripatética. Se formó y trabajó como asistente jurídico, luego se hizo a la mar durante dos años, seguramente como ayudante del capitán. Harto de naufragios y batallas navales durante la guerra anglo-neerlandesa, regresó a tierra y trabajó como administrador. Enseñó matemáticas y por fin pudo emprender una carrera como practicante de matemáticas. Más adelante se le encomendó la tarea de compilar un registro de embarcaciones, quizá una indicación del tipo de trabajo que mejor se le daba.

Euclid Speidell tenía un círculo muy amplio de conocidos versados en matemáticas, con nombres tan famosos como Edmond Halley. Hacia la década de 1660, al principio de su madurez, se hallaba en posición de avalar la competencia de otros aspirantes a practicantes. En resumen, Euclid era un miembro activo y respetado de la red de practicantes de matemáticas que se extendía por las islas británicas (y más allá) durante esta época. En su carrera, pudo apoyarse en la tradición de docencia matemática de su familia y, así, empleó el libro de texto de su padre, *An Arithmeticall Extraction*, para enseñar a Nathaniel Denew en la década de 1680. En ese momento no había copias disponibles para comprar, y Denew tuvo que copiar el libro a mano: casi ochocientos problemas y respuestas. La experiencia impulsó a Euclid a reimprimir el libro, cosa que aprovechó para añadir algunas notas sobre el método docente de su padre, tal vez con la esperanza de mantener viva la manera de hacer las cosas típica de su familia.

También mantuvo vivo su nombre, pues Euclid Speidell se casó dos veces y tuvo, por lo menos, diez hijos; dos recibieron el nombre de Euclid, aunque el primero murió durante la infancia. En la siguiente generación, uno de los nietos de Euclid fue bautizado como Euclid en noviembre de 1695. Sin embargo, a pesar de todos estos esfuerzos, la marca «Euclid Speidell» no sobrevivió a la muerte de su primer portador y las obras matemáticas de John Speidell y su hijo Euclid cayeron en el olvido.

En cualquier caso, la actividad de la familia Speidell ilustra el hecho de que, gracias a varias generaciones de editores y practicantes, «Euclides» se iba convirtiendo en una especie de traje que casi cualquiera podía llevar puesto. Lejos de ser propiedad exclusiva de doctos eruditos, editores o filósofos, ahora el personaje de Euclides podía ser representado incluso por practicantes de matemáticas de tres al cuarto en el Londres de la Restauración, que escribían en inglés y trabajaban como maestros, topógrafos y autores de poca monta.

Isaac Newton

Principios matemáticos

Biblioteca del Trinity College, Cambridge; el hermoso edificio de Christopher Wren domina el río Cam. Se alza sobre pilastras para protegerse de posibles inundaciones y la luz lo baña por la mañana y por la tarde. En un apartado en el extremo meridional de la sala de lectura están más o menos la mitad de los libros que un día pertenecieron a Isaac Newton, el miembro más famoso de la ya de por sí famosa prole del Trinity.

Uno de estos libros es una copia de los *Elementos* de Euclides, impresa en Cambridge en 1655. Es pequeña y más bien ligera, de unos quince por diez centímetros. Los exlibris de las primeras páginas nos revelan los propietarios del libro posteriores a Newton. Algunos borrones y pequeñas correcciones indican que el libro se utilizó, y no siempre con el debido cuidado; en muchos márgenes podemos ver la pulcra y pequeña caligrafía de Newton: docenas de páginas contienen las notas que dejó mientras leía a Euclides.

Varios libros de Newton tienen notas al margen de su puño y letra, aunque pocos contienen tantas como este. Lo más probable es que las escribiera durante la década de 1660, cuando se empezó a interesar profundamente por la matemática y por la filosofía natural. Este interés empezó en 1663, cuando a los veinte años acudió a la feria de Stourbridge y compró un libro de astrología, curioso por saber acerca del tema. Tras diversos sinsentidos y un poco (quizá) de sentido común, logró construirse lo que se llamaba una *figura* de los cielos y descubrió que no podía comprender su explicación. Compró pues un libro de trigonometría, con la esperanza de que le ayudara, pero no fue así, porque el libro presuponía un cierto conocimiento de geometría. Así, Newton se dirigió a un librero y compró varios libros de geometría.

Si hemos de creer sus memorias posteriores, una primera ojeada a los *Elementos* de Euclides le persuadieron de que el libro solo contenía trivialidades, proposiciones demasiado simples para necesitar demostración alguna; de hecho, no era el primero en emitir esta valoración de las primeras proposiciones de los *Elementos*. Lo dejó de lado y se puso con las obras de Descartes, que tenía una reputación de geometría moderna, atractiva y difícil. Descartes había aplicado métodos algebraicos a la geometría, de manera que describía las curvas mediante ecuaciones y resolvía problemas geométricos transformándolos primero en sus equivalentes algebraicos.

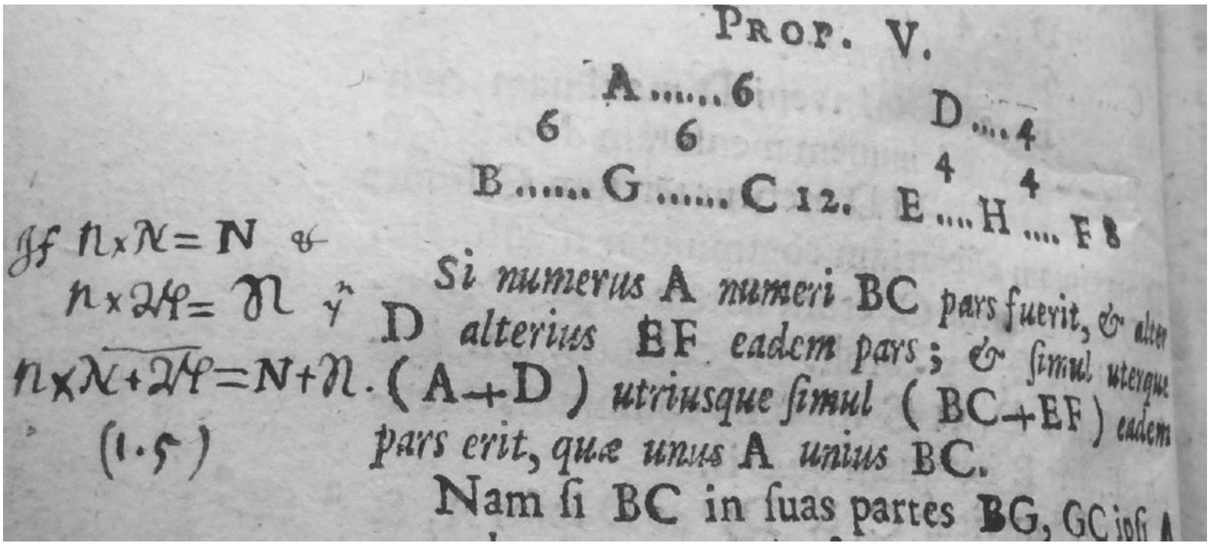
Newton absorbió estos conocimientos con rapidez, tanto a partir de los textos de Descartes como de los de sus seguidores y, en el proceso, escogió una peculiar notación algebraica inglesa a partir de otros libros. En varios de sus libros de álgebra dejó notas al margen con el progreso de sus pensamientos. Todo esto sucedía en su pueblo natal de Woolsthorpe durante 1665-1667, mientras la Universidad de Cambridge había quedado cerrada a causa de una epidemia.

Finalmente, regresó a los *Elementos* de Euclides y se hizo con una copia de la versión editada por Isaac Barrow, también del Trinity College y profesor lucasiano de matemáticas. Barrow era un matemático conservador, que no quería «redactar unos elementos de geometría a discreción mía, sino mostrar a Euclides, y todo lo que hay de él». Era reacio a la revolución de Descartes y su práctica de transformar la geometría en álgebra como un todo; ahora bien, en aras de la concisión, estaba dispuesto a emplear algunos símbolos algebraicos. En lugar de escribir «es igual a» utilizó un símbolo de igualdad, y lo mismo hizo con la suma, la resta y otras operaciones matemáticas. En un prefacio se jactó de que nadie podía haber expresado las demostraciones de una manera más concisa que él. El resultado fue una edición de los *Elementos* que no se parecía mucho a ninguna de las anteriores; también era mucho más corta, con los quince libros completos en menos de trescientas cincuenta pequeñas páginas.

Ahora, Newton se tomó los *Elementos* mucho más en serio que la primera vez, y fue añadiendo notas detalladas por todo el libro. Su método preferido era el algebraico: traducía una proposición tras otra del lenguaje híbrido de Barrow a términos totalmente algebraicos. Allí donde Barrow (y Euclides) hablaban de puntos y líneas, Newton utilizaba números y variables, como x e y.

Newton se centró sobre todo en cuatro libros de los *Elementos*, con temas de geometría y de teoría de las proporciones. Sus notas de cada libro ofrecen concisos equivalentes algebraicos de las formulaciones todavía bastante verbales de Barrow. Para la segunda proposición del libro II, Barrow presenta una explicación verbal acerca de la división de una recta dada en dos partes y de la construcción de rectángulos y cuadrados a partir de esas partes; Newton se limitó a escribir «Si $a = b + c$, entonces $aa = ab + ac$».

Podemos encontrar docenas de casos similares, pues Newton iba afianzando su comprensión de Euclides y, a la vez, su destreza con el lenguaje algebraico. En las últimas partes de los *Elementos*, el álgebra equivalente llega a una complejidad extraordinaria, con varias líneas de símbolos, raíces cuadradas y paréntesis, además de notaciones que Newton parece haber creado sobre la marcha para algunos tipos de relaciones entre proporciones. Para Newton, era evidente que el lenguaje algebraico era mucho más claro y simple que cualquier cosa que pudiera ofrecer Barrow (o Euclides).



Anotaciones de Newton en su libro de Euclides.

Era muy habitual que los lectores de libros matemáticos garabatearan en ellos, y también que afianzaran su comprensión del contenido elaborando una versión propia de la obra, ya fuera una copia literal, un conjunto de ejemplos detallados o una traducción en términos diferentes o en maneras diferentes de expresarlo. En las bibliotecas hay miles de ejemplares de los *Elementos* con notas de estos tipos de los lectores: márgenes llenos de copias más o menos elegantes del material impreso en las propias páginas, o traducciones de este material de palabras a diagramas, de diagramas a palabras o, como en el caso de Newton, de palabras a álgebra.

Pero Newton trabajaba con una competencia extraordinaria. Es casi inquietante la precisión con la que sus anotaciones transforman prolijas afirmaciones verbales en sucintos equivalentes algebraicos. Y en muchos casos, estos suelen ser mucho más fáciles de comprender para un lector actual, a pesar de que Newton estaba trabajando con un lenguaje matemático novedoso que había aprendido por sí mismo como estudiante. Sus anotaciones son la muestra de una mente extraordinaria en pleno trabajo.

Newton rememoró sus desarrollos matemáticos, y su lectura de Euclides, en unos textos autobiográficos y memorias treinta años después. La sucesión exacta de los hechos no está del todo clara, y parece que alguna información acabó filtrada por las preconcepciones de amigos y admiradores bien dispuestos a impresionarse por cualquier fragmento de información que saliera de los labios del gran sabio. La obra de Newton durante esos años se ha convertido casi en leyenda, y su heroísmo intelectual al sumergirse en Descartes, Euclides y otros textos matemáticos en solitario ha pasado a formar parte del mito que lo rodea. En realidad, ni tan solo está claro el año en que anotó la edición de los *Elementos* de Barrow, pero sus anotaciones están bien claras, y el libro sigue en su venerable *college* de Cambridge.

Después de esto, Newton se adentró muchísimo más en los océanos del pensamiento. Fue durante esos mismos años de mediados de la década de 1660 cuando inventó el análisis matemático; luego, en las décadas siguientes trabajó en problemas de óptica y del movimiento de los planetas, aprovechando su inteligencia matemática para hallar soluciones que en algunos casos perdurarían durante siglos. Sus *Principia Mathematica* de 1687 son una de las cimas del estilo de teorema y demostración; el libro presenta una apariencia superficialmente «euclidiana», en la que cada idea se presenta implacablemente mediante una deducción rigurosa con puntos, líneas y proporciones. Así pues, en apariencia el libro no se diferencia mucho del estilo geométrico que muchos textos tenían desde hacía dos mil años, con diagramas y prolijas demostraciones verbales que remitían a esos diagramas. Cada teorema tiene su demostración; muchos tienen corolarios o escolios que añaden o explican detalles diversos, del mismo modo que los textos de los geómetras griegos.

Como otros, Newton vio que haciendo que una construcción geométrica fuera análoga (precisa y cuantitativamente análoga) a algo del mundo real, se podía estudiar ese mundo real por medio de la construcción geométrica. He aquí un diagrama geométrico; he aquí cómo se corresponde con lo que pasa en el sistema solar; he aquí, pues, cómo funciona el sistema solar. Se trata de un paso fundamental para que la geometría (o el álgebra) remitan al mundo real y se conviertan en herramientas para leer el libro de la naturaleza. La profundidad con la que él utilizó este método y la amplitud con la que fue aplicado por sus seguidores lo convirtieron en *la* técnica de la filosofía natural newtoniana del siglo XVIII. Todo, desde las mareas hasta la afinación de los tubos de un órgano, desde la determinación de la masa de la Tierra hasta la evaluación de testimonios en apoyo de la teología cristiana, acabaría más pronto o más tarde sujeto a un enfoque newtoniano. Tal vez sea este el último fruto, y el más importante, de la unión de la geometría y las disciplinas prácticas (la «matemática práctica») que había ido ganando impulso desde el siglo XV.

La matemática real de la obra de Newton era revolucionaria de otra manera, e iba mucho más allá que nada que uno pudiera encontrar en los

Elementos. Se ocupaba de cantidades que empiezan finitas pero que se van haciendo infinitamente pequeñas hasta llegar finalmente a cero; se ocupaba de proporciones de dos de estas magnitudes a medida que ambas tienden a cero. La matemática de Newton proviene de la de Euclides, pero es una matemática que Euclides no hubiera identificado ni reconocido.

Interludio

En el siglo XVIII, la gente hacía ya dos mil años que leía a Euclides. Lo leían, lo estudiaban, lo copiaban, lo parafraseaban o lo reescribían; lo traducían a diferentes idiomas o con diferentes notaciones. Lo admiraban, lo veneraban, intentaban limpiarlo y purificarlo. Lo ampliaban, lo usaban como acicate de su propia matemática, intentaban mejorarlo, miraban de rellenar sus lagunas. Usaban su estructura como modelo de conocimiento y sus argumentaciones y objetos como inspiración para la filosofía. Lo utilizaban para mejorar y entrenar sus intelectos, para mejorar su estatus social o su identidad. Empleaban sus métodos y sus conclusiones como herramientas prácticas; combinaban su texto y sus métodos con los de la agrimensura y la matemática práctica en general. Lo llevaban al escenario y lo convertían en arte y diseño.

La longevidad de los *Elementos* es resultado de la diversidad de formas en que se puede leer. A diferencia de casi cualquier otro libro, no tiene instrucciones acerca de qué hacer con él. No hay ninguna manera «correcta» de leer los *Elementos*, ninguna interpretación ortodoxa. Una generación tras otra de lectores han llegado al texto y han hecho algo con él, algo que era significativo para ellos; Euclides era un autor, un sabio y un héroe, antiguo pero siempre nuevo, inteligente y poderoso.

Pero luego las cosas empezaron a ir mal.

IV

LA SOMBRA Y LA MÁSCARA

Mary Fairfax

Euclides y la camisa de fuerza

Burntisland, Escocia, hacia 1795.

> Tenía que ocuparme de asuntos domésticos y confeccionar y remendar mi propia ropa. Me levantaba temprano, tocaba el piano y pintaba durante el tiempo que podía dedicar mientras había luz, pero me sentaba a leer a Euclides hasta muy tarde. Sin embargo, los criados le comentaron a mi madre: «No es sorprendente que se agoten tan rápido las velas, porque la señorita Mary se sienta a leer hasta altas horas de la noche»; por tal razón, se dio la orden de quitarme mi candelero en cuanto me retirara a mi habitación. Aun así, ya había acabado los seis primeros libros de Euclides y ahora me ejercitaba de memoria, empezando por el primer libro y demostrando de cabeza varios problemas cada noche, hasta que podía casi completarlos todos. Mi padre vino a casa durante unos días y, al descubrir de un modo u otro lo que me ocupaba, le dijo a mi madre: «Peg, debemos parar esto o al final tendremos que poner a Mary una camisa de fuerza. Recuerda a X., ¡loco de remate con la longitud!».

El prestigio cultural de Euclides estaba en lo más alto en la Inglaterra de finales del siglo XVIII, cuando Mary Fairfax, la hija adolescente de una poco cultivada familia de tradición marinera, intentó con toda su valentía autoformarse en el tema. Ahora bien, en un lugar y una época en que la educación femenina era controvertida y para muchos incluso absurda o aberrante, no resulta sorprendente que sus intentos generaran oposición y acabaran con castigos paternos. Lo que sí es sorprendente es la forma particular en que se expresaron tales objeciones: que el estudio de Euclides le dañaría la mente y acabaría metida en una «camisa de fuerza».

La idea opuesta todavía tenía muchos partidarios; de hecho es muy probable que fuera la posición dominante: que el estudio de la geometría mejoraba, ordenaba y embellecía la mente, amueblándola para otros estudios y equilibrando la tendencia de los jóvenes a la falta de atención y a las veleidades. El neoplatónico inglés Thomas Taylor (1758-1835) estaba visibilizando, gracias a su programa de traducción y redacción, la idea de que la geometría era un medio privilegiado de entrar en contacto con lo divino y lo eterno; en 1788-1789 publicó su traducción de los comentarios de Proclo a los *Elementos* de Euclides. Los poetas románticos Blake, Shelley y Wordsworth, entre muchos otros, eran admiradores suyos; se dice que Blake había estudiado Euclides con el propio Taylor. Uno de los resultados de esta tendencia fue un famoso fragmento de *El preludio* de Wordsworth en que se festeja la capacidad de los estudios geométricos para vencer sentimientos tristes o molestos; en primer lugar, el poeta explica el cuento de un náufrago que había logrado salvar un libro de geometría del naufragio y

> […] Solía alejarse de los otros con su libro […]
> a algún lugar remoto, y trazar diagramas
> en la arena con un palo, y así
> no pocas veces engañaba a la tristeza.

A continuación, Wordsworth afirma que él también había hallado un solaz parecido en el estudio de la geometría:

> […] Fuerte es el hechizo
> de tales abstracciones para mente que acosan
> las imágenes y que es de sí tortura;
> grata en especial me resultaba
> aquella síntesis pulida armada en las alturas,
> tan clara y elegante […]
> en verdad un mundo independiente,
> creado a partir de intelecto puro.

Y, sin embargo, para muchos, la experiencia real de estudiar Euclides se parecía más a una tortura: los estudiantes lo encontraban difícil, repetitivo, repelente y con poca relevancia clara para otros temas académicos o para la vida real. Un epigrama de 1780 bromeaba sobre la proposición euclidiana llamada tradicionalmente *pons asinorum*, 'el puente de los asnos': «Si este puente se llama de los asnos con razón / el loco es quien lo cruza, no quien da el tropezón». Al otro lado del mar del Norte, el poeta y compositor sueco Carl Mikael Bellman remarcó en sus memorias que «mi cerebro todavía se retuerce de dolor cuando pienso en Euclides». Por mucho que la ciencia euclidiana hubiera conquistado buena parte de la naturaleza, el espíritu humano mostraba una pertinaz tendencia a resistirse a ella.

Es evidente que en el siglo XVIII, como en cualquier otro, no era nada nuevo que los alumnos se quejaran de que sus lecciones eran aburridas e inútiles. Tampoco eran novedad los avisos de los docentes acerca de los peligros de un programa educativo desequilibrado. Lo que empezó a proliferar en las décadas alrededor de 1800 fue la afirmación específica de que demasiadas matemáticas podían volver loca a una persona. Varios comentaristas razonaban que el estudio de la matemática era una droga poderosa: administrada correctamente sin duda podía mejorar la mente e incluso curar ciertos tipos de turbaciones mentales, pero consumida sin cuidado o en exceso podía llevar a un comportamiento antisocial o, en definitiva, demencial. Este tema se remontaba por lo menos hasta el Renacimiento, cuando el famoso grabado de Durero *Melancolía* aprovechó la iconografía tradicional de la geometría (el compás, el poliedro, el libro) y la convirtió en un símbolo del fracaso personal y social y de su concomitante malestar mental. La cháchara del siglo XVII atribuyó la temprana muerte de Blaise Pascal a un estudio excesivo de la geometría.

Las quejas tenían tres aspectos. En primer lugar, que el estudio de la matemática hacía volver a uno antisocial. «Si en un baile, una cena o una fiesta un hombre se pone a resolver, de cabeza, un problema de Euclides, sería una muy mala compañía y se quedaría fatal a su lado»; esto es lo que decía lord Chesterfield a su hijo hacia 1740.

En segundo lugar, que la matemática, por su abstracción y falta de practicidad aislaría a uno de los sentimientos humanos, puesto que «las verdades primitivas, las que se aprehenden por medio del sentimiento y del espíritu, no son susceptibles de demostración alguna», en palabras de Madame de Staël. En el mundo de la literatura romántica, un exceso de reflexión y una falta de sentimientos eran casi como un pecado imperdonable, y el propio William Blake había declarado que aplicar leyes matemáticas al mundo era obra no de un filósofo inspirado, sino de un demiurgo malvado. Precisamente, el amortiguamiento de las emociones que convertía las matemáticas en un escape de la imaginación desbocada de un Wordsworth las hacía peligrosas y dañinas para muchas otras personas.

En tercer lugar, demasiada matemática podía desequilibrar la mente. William Paley, que se situó en el primer puesto en los exámenes de matemáticas en Cambridge en 1763 y luego fue un influyente filósofo, dijo, al parecer, que el sistema de Cambridge «quiebra a dos o tres» cada año, «algunos se vuelven locos; otros quedan reducidos a tal estado de debilidad, en cuerpo y alma, que son incapaces de hacer nada el resto de sus vidas». Durante el siglo XIX, se hace referencia de vez en cuando a crisis bien documentadas producidas por las matemáticas, como la de Francis Galton en la década de 1840 o la de James Maurice Wilson en 1859; ambos se recuperaron y prosiguieron con unas carreras profesionales distinguidas. Un artículo de 1825 sobre las quejas de un exalumno de Cambridge ofrecía el testimonio de una persona que había quedado reducida a una total «incapacitación social, baja autoestima, desencanto e insensibilidad emocional» como resultado de su formación matemática en esa universidad. Esta persona también se recuperó, pero mantuvo su convicción de que era un error considerar la matemática como la única forma, o la mejor, de razonamiento.

Así pues, los padres de Mary Fairfax no eran unos excéntricos por creer que una excesiva dedicación a las matemáticas podía dañar la salud mental de su hija con efectos que tal vez serían irreversibles, ni tan solo podemos decir que estuvieran equivocados. La historia de Mary no es inusual. Era hija de un oficial naval y su infancia estuvo dominada por la tranquila villa portuaria de Burntisland, al otro lado del Forth, frente a Edimburgo. Su madre «apenas leía otra cosa que la Biblia, sermones y el periódico», y en general a Mary se la disuadía de aprender nada más que el catecismo. Los desacertados intentos de su padre de orientar sus lecturas fueron tan poco fructíferos como un breve curso escolar en un internado, y a partir del inicio de la adolescencia, su educación fue autodidacta.

Mary se entregaba a la historia natural, a coleccionar conchas y flores y a observar las estrellas, y se dedicó al máximo a un curso de lectura que encontró descrito en el libro de Hester Capone *Letters on the Improvement of the Mind* (‘Cartas sobre la mejora del intelecto’). «No era la preferida de mi familia en esa época de mi vida», escribió, «porque era reservada y poco sociable, como consecuencia del silencio que me veía obligada a guardar sobre los temas que me interesaban». El maestro del pueblo le enseñó algo de astronomía; un tío le enseñó latín; recibió lecciones de piano, de costura, de danza y de aritmética.

Mary estaba irritada por la escasa actividad intelectual que se le ofrecía, pero un día, durante una visita, una amiga le mostró

> una revista mensual con láminas a color de vestidos de damas, acertijos y rompecabezas. Al final de una página leí lo que me parecía simplemente una cuestión aritmética, pero al girar la página me sorprendió ver líneas de extraño aspecto mezcladas con letras, sobre todo equis e yes, y pregunté «¿qué es eso?». «Oh», dijo la señorita

> Ogilvie, «es un tipo de aritmética, le llaman álgebra, pero no te puedo explicar nada sobre ella».

Otro encuentro fortuito (una conversación oída durante una clase de pintura) le hizo saber que los *Elementos* de Euclides eran la lectura recomendada para «los fundamentos no solo de la perspectiva, sino también de la astronomía y de todas las ciencias mecánicas». Que Mary fuera a una librería y pidiera el libro de Euclides se antojaba imposible a todas luces, pero el tutor de su hermano estaba dispuesto a comprarle libros elementales de geometría y álgebra en Edimburgo; así, regresó con un ejemplar de los *Elementos* y una copia de la *Introducción al álgebra* (1782) del maestro inglés John Bonnycastle. Por este tortuoso camino, Mary Fairfax logró entrar en contacto con la matemática que deseaba.

La vida de Mary y sus esfuerzos por acceder a la educación seguirían siendo, durante años, los de una mujer de su clase y su época. Pasaba los inviernos en Edimburgo, pero el resto del año en Burntisland o visitando a amigos y familiares por Escocia. En 1804, a los veinticuatro años, se casó con su primo Samuel Grieg, un oficial naval y diplomático afincado en Londres. En la capital, Mary pudo proseguir sus estudios de matemáticas y de francés, pero no recibió ningún apoyo de su marido.

La temprana muerte de Grieg, tres años después del matrimonio, fue una liberación por lo que respecta al intelecto de Mary, y la dejó con una pequeña herencia y suficientes contactos familiares para entrar en el mundo de la correspondencia y la educación matemáticas con mayores posibilidades de éxito. Los académicos de la Universidad de Edimburgo fueron muy serviciales, así como también su segundo esposo, William Sommerville, un médico del ejército que la animó con sus estudios. Se dedicó a todas las ciencias, pero su tema favorito continuó siendo la matemática, y pronto dejó atrás a Euclides para avanzar con el álgebra y el análisis modernos.

Mary Fairfax.

Los siguientes cincuenta años de la carrera de Mary Sommerville fueron notables, primero en Londres y luego en Italia, con publicaciones científicas y obras de divulgación. Tocó multitud de temas: astronomía, física, meteorología y geografía; sus libros de texto tuvieron un gran éxito y se tradujeron al francés, al alemán y al italiano, además de ser adoptados en varias universidades. Recibió honores y homenajes de más de una docena de sociedades científicas. A su muerte, en 1872, el *Morning Post* de Londres remarcó que «por muchas dificultades que podamos tener a mediados de este siglo para escoger a un rey de la ciencia, no tendremos ninguna duda para saber quién es la reina de la ciencia». Está claro que el estudio de Euclides no le hizo ningún daño.

François Peyrard

El manuscrito 190

Estamos en 1808, más o menos, y François Peyrard acaba de ser despedido de su trabajo en la Escuela Politécnica de París (que había contribuido a fundar); pronto será despedido también de su trabajo en el Liceo Bonaparte. En su persona se unen el agitador, el revolucionario, el académico y el maestro; incluso había sido arrestado por sospechas de terrorismo. Pero no todas sus actividades son tan espectaculares; ahora está examinando unos manuscritos llegados a París desde Roma, tras las campañas de Napoleón; de hecho, manuscritos de los *Elementos* de Euclides, de los cuales él mismo es autor de una traducción bien considerada.

La mayoría de los manuscritos contienen lo que espera que contengan; dispone de veintidós, cerca de la mitad de todo el material euclidiano del mundo. Pero hay un caso particular. En comparación con el texto normal, le faltan palabras, sintagmas y frases completas; no contiene tampoco el añadido que Teón de Alejandría incorporó al libro y, además, el escriba que lo redactó anotó que la «antigua versión» del libro dice esto y aquello pero que la nueva versión dice otra cosa. El sorprendido Peyrard se queda muy extrañado por esta insospechada diversidad del texto de Euclides.

François Peyrard tuvo una vida digna de una novela de aventuras. Nació en 1759 o 1760 en lo que hoy día es el departamento del Alto Loira, un territorio que, tal como a veces se ha señalado, es tan volcánico como el propio Peyrard. Huérfano durante sus años escolares, se enroló en el Régiment des Gardes françaises, con lo que escapó de la amenaza familiar de enviarlo al seminario y logró una posición en París; no es accidental que escogiera un regimiento famoso en esos años por su apertura de miras y luego alardeó de haber pasado mucho tiempo dedicado al estudio, eximido de sus deberes y sin tan siquiera estar obligado a llevar el uniforme. Asistió a clases, escarbó por librerías y se codeó con los sabios de la ciudad. Estudió las lenguas clásicas y se interesó en particular por la geometría y la matemática. A finales de la década de 1780 daba clases privadas de matemáticas y se casó en 1787.

Al parecer, prosperó durante los convulsos años siguientes. Pronto se entusiasmó con el republicanismo y la Revolución, y se hizo miembro de la Sociedad de Amigos de la Constitución (luego Club de los Jacobinos, cuyo famoso lema era «vive libre o muere»). Tal vez continuó enseñando y, de hecho, publicó algunas obras breves sobre filosofía e historia y en 1792 ostentaba un cargo administrativo en París. Participó en experimentos para determinar la mejor forma de los proyectiles y en la supervisión de minas y la fabricación de armas en nombre del Comité de Salvación Pública.

En 1793, fue uno de los autores de un proyecto para la reforma de la educación pública. Su sabiduría y su capacidad de dialogar parecen haber impresionado a las personas adecuadas y así pasó a formar parte del grupo que fundó las Grandes Écoles, entre las cuales la famosa École Polytechnique, la Escuela Politécnica, y contrató a sus primeros maestros. Un breve revés en 1795 no fue suficiente para detener su ascenso: tras las revueltas jacobinas, él y otros fueron detenidos por «terroristas», pero, según su propio relato, «lloró amargamente por los crímenes cometidos en nombre de la libertad» y se aseguró su liberación.

Poco después ejercía ya de maestro en la Escuela Politécnica, editaba su revista y supervisaba la biblioteca. Publicó traducciones del erudito renacentista Heinrich Cornelius Agrippa y del poeta romano Horacio (incluyendo los fragmentos obscenos eliminados en versiones anteriores) y logró ampliar la biblioteca de la Escuela de sus pocos cientos de volúmenes iniciales a más de diez mil, convirtiéndola así en un importante centro de referencia para la investigación. Durante esta época, Peyrard elaboró una primera versión de los *Elementos* en francés. Si bien el sistema educativo francés, y la Escuela Politécnica en particular, eran un ejemplo de la matemática y los métodos modernos, Euclides seguía teniendo a sus defensores en cuanto fundamento necesario. En un prefacio, Peyrard cita al historiador de la matemática Jean-Étienne Montucla, cuyo punto de vista era que aunque muchos habían intentado mejorar a Euclides, muchos habían fracasado.

Peyrard dedica unas duras palabras a otros editores y traductores, considerando que las recientes versiones inglesas de los *Elementos* contenían errores graves y que las versiones francesas en circulación se alejaban del texto de Euclides por todas partes. Su propia traducción contenía siete libros: la selección tradicional para escuelas y universidades menos una parte de la teoría de proporciones. Era una versión fiel, literal e incluso traducida palabra por palabra siempre que pudo. Como tantos otros editores, complementó los *Elementos* con un anexo en el que incluyó material sobre el círculo, el cilindro, el cono y la esfera y sobre las áreas de superficies y los volúmenes de cuerpos sólidos, material procedente, en último término, de Arquímedes. Los ciudadanos Lagrange y Delambre autorizaron el libro el año 12 de la Revolución (1803/1804) en nombre de la clase de ciencias físicas y matemáticas del Institut National; se imprimió y fue adoptado para la docencia en la Escuela Politécnica y en otras partes.

Llegados a este punto, el trabajo de Peyrard sobre Euclides podía haber acabado aquí. No era una persona fácil y de hecho, cuando salió publicado su libro, ya había sido expulsado de la Escuela Politécnica. Se las había ingeniado para pelearse con sus estudiantes, sus ayudantes y algunos de sus colegas; además, el director de la Escuela se había visto obligado a reprenderle por su poco convencional comportamiento doméstico (parece que las quejas se referían a ruidosas peleas con su mujer y a la presencia no disimulada de otra mujer en las estancias de Peyrard). Se le obligó a dejar sus aposentos en julio de 1803 y luego, a finales del año siguiente, con la Escuela ya bajo jurisdicción militar en el régimen napoleónico, tuvo que abandonarla. Buena parte de lo que sabemos de su vida procede de unas prolijas memorias que escribió Peyrard en esa época como intento de justificarse (intento fracasado, todo sea dicho). Luego fue nombrado profesor en el Liceo Bonaparte, también en París, donde prosiguió su problemática conducta pero también sus trabajos sobre geometría griega.

Tradujo obras de Arquímedes, para su publicación en 1807, y tenía planeado trabajar con Apolonio y Diofanto. Sin embargo, el texto de Euclides continuaba acaparando su atención y se convenció de que en la vieja edición de Oxford del texto griego, que había empleado como base para su traducción, se habían recortado o alterado algunos fragmentos respecto al supuesto original de Euclides.

La cronología exacta no queda clara en el relato de Peyrard, pero no hay duda de que el geómetra francés Gaspard Monge viajó a Italia con el ejército de Napoleón y pudo enviar manuscritos a París «prestados» por las principales bibliotecas italianas (Napoleón se proclamó presidente de la llamada República Italiana, que incluía básicamente la Lombardía y la Romaña, a partir de 1802, y luego rey del Reino de Italia, que incorporaba también Saboya y el Véneto, a partir de 1805; los Estados Pontificios, con Roma, se anexaron en 1809). De este modo, Peyrard pudo consultar hasta veintitrés manuscritos de los *Elementos*, desde el siglo IX hasta el XVI.

Pronto le quedó claro que ninguno de estos manuscritos formaba la base exacta de las dos ediciones impresas de todo el texto griego: la bastante defectuosa impresión de 1533 en Basilea y la edición de Gregory de 1703 en Oxford. En cualquier caso, la mayoría de los manuscritos coincidían bastante bien entre ellos y con las versiones impresas; uno de ellos, sin embargo, era diferente, el manuscrito de la Biblioteca Vaticana catalogado con el número 190 entre los manuscritos griegos. Era un manuscrito del siglo IX (hoy datado hacia 830-850, lo que lo hace anterior a la copia que hizo Esteban para Aretas de Patras, si bien Peyrard lo situó más hacia finales de siglo), nunca antes usado para una edición impresa; en él estaban los libros I a XIII de los *Elementos*, los *Datos* de Euclides y luego los libros XIV y XV de los *Elementos*.

El texto no era muy diferente del de los demás manuscritos, pero era notable por el hecho de que le faltaban algunas frases explicativas y aclaraciones y adiciones diversas. Y era sorprendente que careciera también del final adicional de la proposición 26 del libro VI, la adición hecha por Teón; además, en el margen del manuscrito una mano diferente que la del escriba original había añadido más tarde ese pequeño fragmento de texto. Otras notas al margen señalaban que una proposición del libro XIII estaba ausente de la mayoría de las copias «de la nueva edición pero se halla en las de la vieja»; y lo contrario sucedía con una proposición del libro XI.

Peyrard estaba emocionado, y creía que ante él tenía «el texto puro de Euclides», que tenía que compararse y preferirse a la edición de Teón, que él suponía que estaba representada en todas las otras fuentes. Trabajó a fondo con el manuscrito y fue anotando una copia de la edición de Gregory con los cambios que detectaba. Luego comparó otros manuscritos y valoró la calidad de cada una de las variaciones, dando preferencia al manuscrito 190 siempre que podía. De este modo empezó a purgar el texto euclidiano de lo que estaba convencido que eran añadidos injustificados: demostraciones alternativas, corolarios, lemas y escolios.

Su trabajo no es siempre coherente al cien por cien, y su fe en el texto del manuscrito 190 (o de cualquier manuscrito, de hecho) parece flaquear de vez en cuando; para algunas proposiciones siguió las ediciones impresas, a pesar de la falta de pruebas en cualquier manuscrito, como es el caso de una proposición del libro X que no se halla en el manuscrito 190 pero que Peyrard no quería eliminar, pues al hacerlo se alteraría la numeración del resto del libro. En otros lugares dejó que su propio juicio sobre la corrección y completitud matemáticas pasara por encima del manuscrito y, así, en su edición conservó una buena cantidad de lemas y demostraciones alternativas que están ausentes en el manuscrito 190. En ocasiones corrigió directamente el texto original si hallaba aspectos en que ni los manuscritos ni las ediciones existentes ofrecían una versión que él considerara correcta.

En otoño de 1809, Peyrard ya estaba en disposición de presentar el trabajo a sus colegas para su aprobación. Envió el manuscrito 190 y su copia anotada de la edición de Oxford a un comité formado por los famosos matemáticos Delambre, Lagrange y Legendre. Dicho comité certificó la corrección de su interpretación y le animó a completar el trabajo. Más adelante, Delambre y Gaspard Prony (que había visto el mismo material) informaron a la Academia de Ciencias de que el nuevo texto les parecía más puro, claro e inteligible que el antiguo; sin embargo, en su informe señalan que el uso que hacía Peyrard de los manuscritos se estaba volviendo algo ecléctico, y pedían que si no era posible tener una edición podada de todos los errores que los manuscritos pudieran enmendar y enriquecida con todas las adiciones que pudieran aportar, al menos Peyrard debería aportar una lista de todas las variantes y lecturas alternativas en un anexo de su edición.

A partir del texto griego que había preparado, Peyrard hizo una traducción al latín (de una notable torpeza en su estilo totalmente literal) y también anotó su versión francesa de los *Elementos* con los cambios obligados por el nuevo texto griego. Todo esto requería su tiempo y recibió permiso directo del ministro del Interior para conservar el manuscrito 190 hasta la publicación de la edición completa (en esta época se estaban empezando a devolver manuscritos italianos a sus propietarios). La publicación se inició en 1814, después de que la Academia hubiera encargado informes sobre el libro tanto a su comité de ciencias como a su comité de historia y literatura antigua. La valoración del primero fue bastante favorable, pero el segundo parecía menos convencido de que la nueva edición fuera una mejora real respecto a las anteriores; en cualquier caso, la Academia dio su aprobación y se inició la impresión. Los tres volúmenes aparecieron en 1814, 1816 y 1818. La caída de Napoleón y la restauración de la monarquía borbónica llevó a Peyrard (que ya había recibido con creces su dosis de cambios de régimen) a dedicar el segundo y tercer volúmenes al nuevo rey.

El resultado es impresionante, se mire como se mire. Más de mil seiscientas páginas en griego y latín, en dos columnas paralelas, y una traducción al francés a pie de página, además de todo un aparato crítico en el que se enumeran las diferencias entre el texto impreso, el manuscrito 190 y la edición de Oxford, así como notas sobre los errores de la edición de Basilea de 1533.

Entretanto, la vida personal de Peyrard siguió plagada de dificultades: en sus memorias y en los prefacios de sus libros encontramos, a trompicones, un lúgubre relato de muertes de hijos y, por lo menos de un nieto, así como la huida de una de sus hijas. En algún momento dejó el Liceo Bonaparte (o lo expulsaron de ahí), es probable que antes de completar su edición de Euclides. En 1810 aparece como miembro del personal del ministro de la Guerra encargado de la artillería; en 1816 hace referencia (en el prefacio del volumen final de los *Elementos*) a dieciséis años de «calumnias» y «persecuciones», lo que sugiere que trabajar con él no se había vuelto más sencillo. Es asombroso que en estas condiciones pudiera completar su detallado trabajo textual, y aunque planeaba seguir su proyecto euclidiano con ediciones críticas trilingües de Arquímedes y Apolonio (esta última parece haber llegado a recibir la aprobación de la Academia de Ciencias), no es sorprendente que tales proyectos no vieran nunca la luz del día.

François Peyrard murió en 1822, a principios de su sesentena, en el Hospital de San Luis de París. Este lugar nos sugiere una situación de indigencia, pues estaba reservado a los más necesitados, y parece, pues, que el gran superviviente no logró sobrevivir a la restauración borbónica todo lo bien que había planeado.

El descubrimiento de Peyrard había puesto sobre la mesa la terrible posibilidad de que el texto euclidiano, tal como se conocía, fuera engañoso, aunque ello apenas sirvió para hacer más hincapié en la necesidad de ser especialmente respetuosos con los términos exactos de sus demostraciones en escuelas, universidades y otros lugares. También planteó la posibilidad de un Euclides más puro, mejor, prístino incluso, que podía atisbarse en parte gracias al manuscrito 190 y que quién sabe si podía aparecer en algún archivo inexplorado o si podía recuperarse con un estudio lo bastante cuidadoso de los manuscritos ya conocidos.

Estamos en una época en que se levantan sospechas parecidas acerca de otros textos antiguos. Los académicos homéricos (antes y después de la publicación de los famosos *Prolegomena ad Homerum* de Friedrich August Wolf en 1795) se afanaban en separar la *Ilíada* y la *Odisea* en sus supuestos componentes y en asignar una fecha y un lugar a tales partes; se llegaba a poner en duda la propia existencia de Homero e, incluso si fuera cierta su existencia, muchos estudiosos le otorgaban poco más que una función de compilador. Lo mismo se aplicaba al Antiguo Testamento, sobre el cual acabó llegándose a un consenso académico acerca de cuatro autores diferentes, o escuelas de autores, para las diversas partes del texto, con una voz que cambiaba de capítulo a capítulo e incluso de verso a verso. Para el Nuevo Testamento, una nueva atención a las pruebas manuscritas estaba dando lugar a un cambio gradual respecto al texto impreso heredado desde el siglo XVI (derivado de fuentes bizantinas bastante tardías) y hacia una nueva reconstrucción académica basada en fuentes más tempranas y con menos influencia bizantina.

Resulta imposible resumir en pocas palabras la historia del texto euclidiano después de Peyrard, lo que demuestra el grado de angustia, sospecha e incluso desesperanza que había creado. La edición del filólogo danés Johan Ludvig Heiberg en la década de 1880 intentó emprender un enfoque como el de Peyrard pero más coherente, identificando las diferencias entre el manuscrito 190 y el resto de los manuscritos griegos de los *Elementos*, por un lado, y las diferencias entre las versiones del texto preteonianas y las posteonianas, por otro. De esta manera, Heiberg creía que podría identificar con detalle los cambios realizados por Teón y valorarlos adecuadamente. Estudió una gran parte de los testimonios griegos conservados (hoy en día, se han catalogado unos ochenta manuscritos con todo el texto de los *Elementos* o partes de él, de los cuales unos treinta son anteriores al siglo XV), pero no todos los eruditos consideraron convincentes sus conclusiones.

Otros historiadores señalaron que también hay variaciones considerables entre los textos griegos, considerados globalmente, y las versiones árabes y latinas de los *Elementos* compiladas en la Edad Media; algunos académicos insistieron en que estas diferencias reflejaban, en último término, las que había entre las versiones preteonianas y las posteonianas, a partir de la suposición de que las primeras traducciones árabes se basaban en manuscritos griegos hoy perdidos (algo muy factible, teniendo en cuenta su fecha de composición). Desde este punto de vista, eran las traducciones árabes y latinas las que habían mantenido el texto lo más parecido posible a las palabras reales de Euclides, algo que se había ido perdiendo en las versiones griegas a lo largo de los siglos. De hecho, se descubrió que un manuscrito de Bolonia contenía, en partes de los libros XI y XII, una versión griega de los *Elementos* muy cercana a algunas versiones árabes.

El problema fundamental era que habían pasado mil doscientos años entre la redacción de los *Elementos* y la primera versión completa del texto que había sobrevivido hasta época moderna. El descubrimiento de Peyrard mostró que hacia el final de ese largo período circulaban dos versiones del texto, como mínimo, pero que era extraordinariamente difícil remontarse más allá y deducir lo que había sucedido con el texto: las pruebas griegas correspondientes a ese intervalo de mil doscientos años se limitaban a un palimpsesto fragmentario del siglo VII u VIII, a unos pocos fragmentos de papiro y a un conjunto de óstracos con un texto tan libre que ni tan solo estaba claro que fuera relevante para la historia de la transmisión del texto; además, se sabía que Teón preparó una edición y se conocía su afirmación de que había añadido un fragmento concreto al texto. Por último, había también citas en los primeros comentarios sobre los *Elementos*, algunas conservadas en traducciones árabes.

En la segunda mitad del siglo XX, un estudio renovado de las versiones árabes y latinas dejó claro que estas versiones presentaban variaciones considerables en los libros I a X (mientras que los libros XI a XIII, en cambio, muestran un texto muy fijado), más grandes que las variaciones observadas entre los textos griegos conservados; y esto a pesar de que estaba claro que los traductores árabes se esforzaron por consultar múltiples manuscritos griegos y no equivocarse en ningún detalle. Está claro que la mejora deliberada del texto prosiguió en griego, latín y árabe durante al menos un milenio y medio, lo que es testimonio del éxito del libro y hace que en cualquier momento de la historia haya muchas versiones diferentes en circulación, desde breves epítomes hasta libros de texto ampliados con demostraciones alternativas, proposiciones adicionales y explicaciones y observaciones de todo tipo. Parte de lo que hay en los manuscritos griegos, sin duda, no es auténtico, y hay lugares en que las versiones árabes y latinas muestran una forma más antigua del texto, pero las diferentes versiones se han contaminado mutuamente una y otra vez, lo que hace que sea casi imposible conseguir algo de certeza; incluso el patrón cambia de un libro a otro en una misma versión de los *Elementos*.

Con tantas variaciones y sin testimonios griegos conocidos que puedan determinar con certeza cuándo surge cada una de estas variaciones, se antoja poco probable que algún día se pueda reconstruir por completo la historia detallada del texto. El estudio más reciente y exhaustivo afirma específicamente que en este momento no tendría sentido elaborar una nueva edición crítica, mientras que un estudioso de los *Elementos* árabes ha señalado con tino que todavía no ha llegado el momento de la síntesis y la certeza.

Nikolái Ivánovich Lobachevski

Paralelas

Rusia, reinado del zar Nicolás I; 23 de febrero de 1826 en Kazán, a orillas del Volga.

Un profesor de matemáticas intenta una revolución, una revolución muy particular. ¿Qué pasaría si algunas de las suposiciones de Euclides fueran falsas? ¿Qué sucedería si pudiera crearse una nueva geometría? ¿Qué pasaría si el espacio no fuera lo que siempre hemos considerado que es?

Se toma buena nota de su conferencia, pero sus colegas no parecen interesados en absoluto.

La saga del «postulado de las paralelas» de Euclides, esa suposición complicada y en absoluto evidente sobre líneas paralelas que Leví ben Gershom, entre otros, había intentado demostrar a partir de principios más simples, había seguido su curso de manera incansable. Matemáticos de la Antigüedad, la Edad Media y el Renacimiento habían intentado sustituirla o demostrarla, pero todos habían fracasado. En los siglos XVI y XVII, cuando se prestaba mucha atención a limpiar los aspectos fundamentales de los *Elementos*, aparecieron varias alternativas al postulado de las paralelas, planteadas en diversas ediciones. Ninguna tuvo éxito; o bien resultaban más débiles y menos útiles que el postulado de las paralelas o bien no eran lo bastante intuitivas para ser satisfactorias como suposición básica en un libro de geometría.

Así pues, llegados al siglo XVIII, el postulado de las paralelas se había convertido en un problema consolidado en el estatus de los *Elementos* de Euclides en cuanto tratamiento lógico y axiomático de la geometría y el espacio. La dependencia de Newton de la geometría euclidiana implicaba que ahora buena parte de la filosofía natural encarnaba todo aquello que implicaban las suposiciones básicas de Euclides, lo que contribuía a su plausibilidad como descripción del espacio pero también añadía las preocupaciones planteadas por los matemáticos. Apenas pasaba un año sin que se publicara un nuevo intento de demostración del postulado de las paralelas; los catálogos de autores y obras enumeran cientos de ellas, desde pobres panfletos hasta las trescientas páginas del *Euclides ab omni naevo vindicatus* (‘Euclides liberado de toda mácula’), de Giovanni Girolamo Saccheri, una rigurosa elaboración de todas las consecuencias que tendría el hecho de que el postulado de las paralelas *no* se asumiera como cierto. Saccheri pensaba que esas consecuencias eran evidentemente absurdas, pero otros no quedaron muy convencidos, como era habitual. A finales del siglo XVIII se empezaba a aceptar que tal vez el postulado de las paralelas no podía demostrarse y que este, o un equivalente, tenía que aceptarse sin demostración.

Nikolái Ivánovich Lobachevski era hijo de un funcionario; es posible que sus padres fueran de origen polaco. Nacido en Nizhni Nóvgorod en 1792, entró en el instituto de secundaria de Kazán hacia 1802, con una beca pública. Lobachevski pasaría la mayor parte de su vida en Kazán, una ciudad de unos cuarenta mil habitantes en la confluencia del Volga y el Kazanka. En sentido estricto, la ciudad pertenece a la Rusia «europea», pero se halla a casi ochocientos kilómetros al este de Moscú, bien alejada de la órbita de la mayoría de los intelectuales europeos de entonces.

Por suerte para Lobachevski, pocos años después de su llegada se fundó una universidad en la ciudad; de hecho el instituto de secundaria databa solo de 1798. La Universidad de Kazán, inicialmente administrada como adjunta al instituto, abrió en 1805, y se convirtió en la tercera de Rusia, después de las de San Petersburgo y Moscú. Cubría las necesidades de los vastos territorios de Rusia oriental: el Volga, los Urales, Siberia y el Cáucaso. Algunos la llamaron *ultima Musarum Thule*, ‘la última Tule de las musas’.

Lobachevski entró en la universidad a los catorce años y su beca le obligaba a impartir clases allí durante por lo menos seis años tras la graduación. Tuvo suerte con sus profesores, entre los cuales había cuatro distinguidos maestros de Alemania. El profesor de matemática pura, Johann Christian Martin Bartels había enseñado a Carl Friedrich Gauss, el más grande matemático vivo en esos años. Lobachevski se granjeó una cierta reputación de rebeldía en la universidad, y Bartels tuvo que convencer a los demás profesores de que pasaran por alto su mala conducta y, así, pudiera obtener el título. En 1812 enseñaba matemáticas y en 1814 obtuvo el título de profesor. Hizo observaciones astronómicas y siguió estudiando con Bartels.

Su carrera prosiguió con trabajos en diversas comisiones, el decanato de su departamento y, a partir de 1827, el rectorado de la universidad. Lobachevski no se había desmoronado durante el antiintelectualismo oficial de principios de la década de 1820 y se implicó a fondo en obras de construcción, la reforma de la biblioteca y la creación de la revista científica de la universidad. Se casó en 1832, pero poco sabemos de su vida privada; de hecho, los datos sobre sus hijos varían de siete a quince o incluso dieciocho. En 1840 fue nombrado consejero de Estado.

Tras su jubilación en 1846, vino un período de mala salud y una difícil situación económica; al parecer gestionó mal la herencia de su esposa. Se dedicó a trabajar una pequeña finca Volga arriba, con ovejas y un molino de agua. Más adelante perdió la vista. Plantó un bosquecillo de nogales pero no vivió para recoger sus frutos; murió en febrero de 1856.

Nikolái Ivánovich Lobachevski es recordado no por su prolongado servicio en la Universidad de Kazán, ni por sus esfuerzos con las ovejas merinas y los nogales, tampoco por sus pocas publicaciones sobre análisis matemático y trigonometría o su participación ocasional en trabajos astronómicos. No, su nombre estará asociado para siempre al postulado de las paralelas y a sus trabajos en geometría desde 1815 hasta su muerte.

Como muchos otros, quiso demostrar el postulado de las paralelas; de hecho, sus notas docentes de 1815-1817 contienen varios intentos. Sin embargo, como todos los demás, fracasó, y se convenció de que el postulado no era ninguna consecuencia de los otros, sino que tenía que considerarse como una suposición independiente. Así, tal como lo expresó él mismo, la teoría de las líneas paralelas contenía una «laguna crucial», era «incompleta» e «imperfecta». En consecuencia, decidió construir una nueva geometría sin este postulado: la primera nueva geometría desde la Antigüedad, un nuevo candidato para la verdadera descripción del espacio físico.

Equivalente al postulado de las paralelas es la suposición de que a través de un punto dado solo puede trazarse una recta que sea paralela a otra recta dada. Lobachevski empezó su geometría revolucionaria con la suposición contraria; que siempre se puede trazar más de una línea así. De esta manera surgió su alucinante definición de *paralelas*. Tomemos un punto y una línea; todas las líneas que pasan por ese punto se pueden dividir en dos clases; las que cortan la línea dada inicialmente y las que no; las líneas situadas en la frontera entre estas dos clases son las que llamaremos *paralelas* a la línea dada.

Tal vez no parezca gran cosa, pero esta definición abre todo un mundo de novedades antiintuitivas. Con esta nueva geometría, las primeras veintiocho proposiciones de los *Elementos*, que no dependen del postulado de las paralelas, se pueden demostrar igual que antes, pero después ya todo resulta diferente. Lobachevski se encontró de repente en un mundo en que los ángulos de un triángulo sumaban menos que dos rectos y su suma dependía del tamaño del triángulo; de hecho, la diferencia variaba con el área de este. Las líneas paralelas no eran equidistantes; podían irse acercando, pero cada vez más lentamente, de manera que nunca llegaban a encontrarse. Dos triángulos con el mismo conjunto de ángulos eran obligatoriamente del mismo tamaño. Era posible escoger tres puntos sin que estuvieran los tres sobre una línea recta o un círculo.

Lobachevski trabajó empleando no los métodos de la geometría euclidiana sino los de la trigonometría. Para los triángulos en el plano en un espacio normal euclidiano, hay fórmulas que relacionan las longitudes de los lados con los ángulos que forman por medio de las funciones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente. Hay también fórmulas equivalentes para describir triángulos en la superficie de una esfera, y estas (las fórmulas de la trigonometría esférica) eran bien conocidas por navegantes y cartógrafos, cuyo trabajo se desarrollaba sobre la superficie esférica de la Tierra. Lobachevski logró hallar otras fórmulas equivalentes para triángulos en su nueva geometría «imaginaria»; eran parecidas a las esféricas, pero con cambios sistemáticos que reflejaban el hecho de que su espacio estaba curvado de otra manera. Estar en un espacio de Lobachevski es más parecido a estar en la superficie de una silla de montar que en la de una esfera, aunque de hecho no hay ninguna superficie del espacio euclidiano que tenga las características exactas de la geometría de Lobachevski.

Lobachevski no halló ninguna contradicción en las reglas de su nuevo y extraño mundo, y el hecho de que pudiera hallar un conjunto coherente de fórmulas análogas a las de la trigonometría era un buen indicador de que su geometría era en verdad coherente y consistente. Estaba convencido de que era tan válida como la de Euclides, pero diferente.

En consecuencia, su nueva geometría era un candidato tan bueno como la geometría euclidiana para ser la verdadera descripción del espacio. ¿Cuál era la correcta? La respuesta tendría que hallarse no mediante la intuición ni mediante el razonamiento puro sino, tal como creían muchos, por medio de la experimentación. La influyente filosofía de Immanuel Kant afirmaba que las ideas acerca del espacio eran innatas: eran intuiciones objetivamente correctas, no derivadas de la experiencia. Lobachevski, quien es muy posible que conociera las obras de Kant, aseveraba lo opuesto: afirmaba que había «oscuridad» en las ideas fundamentales sobre geometría y remarcaba que los conceptos básicos de las matemáticas se obtenían del mundo externo por medio de los sentidos. Así, el postulado de las paralelas, o la alternativa de Lobachevski, sería a todos los efectos una ley física, y él propuso comprobarla mediante experimentos.

Pero los experimentos fracasaron. A pequeñas escalas era imposible determinar la diferencia entre la geometría de Euclides y la de Lobachevski, del mismo modo que nadie puede discernir si la Tierra es curva o plana midiendo un pequeño jardín. La idea de Lobachevski era medir el paralaje de las estrellas, es decir, el cambio aparente de su posición a medida que la Tierra se desplaza de un extremo a otro de su órbita. Si el espacio era lobachevskiano, el paralaje no podía estar por debajo de un cierto umbral ni tan solo para las estrellas más lejanas. Por desgracia, el inevitable error instrumental hizo que los resultados no fueran concluyentes. Lo mejor que pudo decir Lobachevski es que «en los triángulos que podemos someter a nuestra medición, la suma de los tres ángulos no es diferente a dos ángulos rectos en una centésima parte de un segundo de arco» (en un grado hay tres mil seiscientos segundos de arco). A escalas más grandes y con instrumentos más precisos continuaba siendo posible que Lobachevski estuviera en lo cierto por lo que respecta a la verdadera descripción del espacio.

Lobachevski fue uno de los pocos auténticos revolucionarios de la matemática, una persona para la cual el gran clásico que eran los *Elementos* no era más que una pista para llegar a algo diferente por completo. Su geometría era novedosa y sus ideas en verdad extraordinarias. Parece que fue un buen profesor, convincente y persuasivo, pero por desgracia, cuando trató de expresar por escrito sus ideas geométricas fue menos categórico y su vida pasó a ser un triste relato puntuado por repetidos fracasos a la hora de convencer a sus colegas de que se tomaran en serio su obra geométrica (y tal vez he aquí parte de la razón de su desmoralización tras la jubilación).

Al principio publicó en el *Mensajero de Kazán*, una revista que no es que fuera muy leída. Tras anunciar su nueva geometría en una conferencia en 1826, de la cual no se ha conservado el texto ni las reacciones de sus colegas, publicó cuatro artículos sobre el tema durante la siguiente década, sin que generaran reacción alguna. Hasta ese momento todo lo había publicado en ruso, pero en 1837 se pasó al francés y publicó en una conocida revista europea de matemáticas, pero su artículo estaba atiborrado de fórmulas y además asumía, erróneamente, que sus lectores ya conocían sus trabajos en ruso; en consecuencia, también pasó sin pena ni gloria. Un libro en alemán publicado en 1840 y su última obra, titulada *Pangéometrie* y publicada en ruso y en francés en 1855-1856, no tuvieron mejor suerte. Un crítico de las

Academia de Ciencias de San Petersburgo ridiculizó las ideas de Lobachevski. Asimismo, la elevada consideración en que se tenía a Kant y Euclides, a lo que se añadía el hecho de que todo el tema de demostrar el postulado de las paralelas se estaba volviendo, igual que la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo, terreno abonado para los excéntricos, sin duda tuvo su papel.

Por si esto fuera poco, Lobachevski nunca visitó instituciones europeas ni se carteó con matemáticos fuera de Rusia y ningún estudiante prosiguió con sus ideas. De este modo, el hombre que había creado un nuevo mundo no recibió casi ningún reconocimiento durante su vida. La única excepción fue su membresía correspondiente de la Sociedad de Ciencias de Gotinga, aprobada por Gauss en 1842. Gauss era una de las pocas personas que había leído su obra y la comprendía (de hecho, aprendió ruso para hacerlo) e incluso había especulado también acerca de geometrías no euclidianas, pero no había ido más allá ni había publicado nada sobre el tema.

En realidad, a principios del siglo XIX había todo un puñado de matemáticos que estaban trabajando en las mismas ideas que Lobachevski. Tanto la colaboración entre tío y sobrino de F. K. Schweikart y Franz Taurinus en Alemania como la de los dos Bolyai, padre e hijo, en Hungría, llevaron a la construcción de nuevas geometrías hacia la década de 1820, y en ambos casos se cartearon con Gauss acerca del tema. El trabajo de los Bolyai era el más exhaustivo, pero no llegaron tan lejos como Lobachevski; en cualquier caso, su trabajo, al igual que el del matemático ruso, pasó casi desapercibido en su momento.

No fue hasta después de la muerte de Lobachevski cuando otros matemáticos retomaron la geometría no euclidiana. En 1858, un estudio italiano reformuló las ideas de Lobachevski en un lenguaje aún más algebraico que el del ruso; hacia 1870 se organizó un seminario sobre geometría de Lobachevski en la Universidad de Berlín. Bernhard Riemann, a partir de 1860, se dedicó a estudiar espacios curvos en general, de los cuales las geometrías de Lobachevski y Euclides eran casos particulares; de este modo inauguró un período en que se empezó a diferenciar el estudio de las geometrías en cuanto sistemas matemáticos de la geometría como estudio del espacio físico real. El tema se fue combinando con el estudio de otros tipos de abstracciones matemáticas que empezaban a surgir en esos mismos años y se unió a la perenne afirmación de que la matemática debería fundamentarse solamente en definiciones abstractas y demostraciones, dejando de lado intuiciones basadas en el sentido común acerca de los números, el espacio y las líneas. El quinto postulado de Euclides se había convertido en una suposición no demostrable que definía las características de un tipo concreto y particular de espacio: tal vez el espacio real, tal vez no.

Y luego llegó Albert Einstein. Las nuevas geometrías estudiadas en el siglo XIX tenían el mismo grado de curvatura en todas partes (como en una esfera). En la teoría general de la relatividad de Einstein, el espacio se curva en cantidades diferentes en puntos diferentes, en función de la presencia de masas. En esta aproximación, el espacio es no euclidiano; de hecho no solo se renuncia al quinto postulado de Euclides, sino también al cuarto, que afirma que los ángulos rectos son iguales en todas partes. Cuando la relatividad general superó una serie de comprobaciones experimentales cruciales a principios del siglo XX, ya no hubo forma de negar que la geometría del mundo era diferente de la de Euclides. Los *Elementos* de Euclides resultaron ser solo una solución temporal, si bien muy duradera, al problema de describir el espacio real.

Nikolái Ivánovich Lobachevski acabó siendo reconocido como un pionero; un historiador ruso, al escribir con motivo de su bicentenario, dijo que «hay una clara línea de desarrollo entre la geometría de Lobachevski (una geometría de curvatura negativa constante) y la geometría de la teoría general de la relatividad (una geometría no euclidiana de curvatura variable)». Se tradujeron sus obras, se compilaron, se reeditaron y las ideas no euclidianas empezaron a aparecer en el arte y la literatura. Jeremy Gray, historiador de la matemática moderna, subraya que «es poco probable que los matemáticos hayan agotado ya la riqueza del mundo que descubrió Lobachevski en su relativo aislamiento de Kazán».

Maggie y Tom

La tortura de la mente

El aula de King’s Lorton, hacia 1830:

> —Me parece que no estoy muy bien, padre. Desearía que le dijera al señor Stelling que no me hiciera hacer Euclides: creo que me da dolor de muelas —dijo Tom, acordándose del único mal que había padecido en su vida.
>
> —Así que Euclides… ¿Y eso qué es? —preguntó el señor Tulliver.
>
> —Oh, no lo sé: trata de definiciones, axiomas, triángulos y esas cosas. Tengo que aprenderlo en un libro y no tiene ningún sentido.
>
> —¡Vamos, vamos! —le respondió el señor Tulliver—. No debes decir eso. Tienes que aprender lo que te diga tu maestro, él sabe lo que te conviene saber.

Tom y Maggie Tulliver crecieron en Dorlcote Mill, en Lincolnshire, hijos de Jeremy Tulliver, el molinero. Ambos tenían aptitudes para las matemáticas, pero tal como era costumbre en la Inglaterra de su época, la educación de cada hermano fue muy diferente.


Tom y Maggie.

Tom era ágil con las cosas prácticas: gusanos, peces, pájaros; puertas, manillas y candados. Podía dibujar un cuadrado casi perfecto sin medirlo y podía estimar con bastante confianza y exactitud la cantidad de caballos o la longitud de un patio. Tenía facilidad para captar correctamente cosas concretas a primera vista.

Su padre veía la educación sobre todo en términos de beneficios y ventajas prácticas: «No quiero que sea abogado, pues sentiría que se convirtiera en un bribón, sino algo así como un ingeniero, un *inspetor*, un subastador o un tasador, como Riley o uno de esos hombres de negocios que no obtienen más que beneficios sin otro gasto que una gruesa cadena en el reloj y un taburete alto». Colocó a Tom como pupilo de un tal señor Stelling, un graduado de Oxford poco imaginativo; su enfoque inflexible de la docencia consistía básicamente en gramática latina y Euclides, que debían memorizarse sin demasiado hincapié en su comprensión. Había un poco de historia, redacción y aritmética. La metáfora favorita de Stelling para la mente era de corte agrícola, siendo los clásicos y la geometría el terreno abonado para recibir luego casi cualquier tipo de cultivo.

Esta manera de hacer, sin embargo, no encajaba con la forma de pensar de Tom. Si se le mostraban dos triángulos, podía captar al momento si eran iguales o no, pero la demostración euclidiana de tal hecho se le escapaba por completo. Sus ruegos y conversaciones con su padre empezaron a incluir peticiones de «no más Euclides», un tema al que Tom cogió verdadera manía. Un intento de iniciarse en el álgebra también tuvo que abandonarse. Mientras, los encuentros con otros chavales resultaban desmoralizadores; un compañero de escuela, llamado Philip, aceptaba que «todos los caballeros aprenden las mismas cosas» y estaba satisfecho sabiendo lo que sabía todo el mundo: latín, Euclides y «todas esas cosas».

La educación clásica tampoco resultó del agrado de las necesidades prácticas de Tom. Su padre el molinero cayó en bancarrota y Tom, al regresar a casa desde la de Stelling, descubrió que ahora tenía que desaprender lo poco que había logrado asumir de latín y de Euclides para prepararse para un trabajo. «No me gustan el latín ni esas cosas», se lamentaba. «No sé para qué me servirían, como no sea para hacer de profesor ayudante en un colegio y, ni siquiera las conozco lo bastante bien para ello: además, antes preferiría ser chico de los recados, no me gusta convertirme en esa clase de persona. Me gustaría entrar en un negocio en el que pudiera progresar, un trabajo de hombres en el que tuviera que cuidar cosas y labrarme una reputación».

Pocas cosas resultan más claras que el ejemplo de Tom del fracaso de una educación euclidiana en el siglo XIX, o por lo menos del fracaso de esa educación cuando se desvinculaba de la humanidad y, en el fondo, del sentido común acerca de las necesidades de los diversos estudiantes y de las particulares diferencias entre ellos.

Por el contrario, la hermana de Tom, Maggie, no fue expuesta a los clásicos matemáticos ni literarios, y eso a pesar de que, irónicamente, mostraba más aptitudes para estos temas que su hermano. El acceso a todas estas cosas (al menos en la visión del mundo que tenía el maestro Stelling) dependía del sexo, y cuando Maggie le preguntó si le podría dar las mismas lecciones que a Tom, la ninguneó sin miramientos. Stelling insistía en que las chicas «poseen una gran capacidad superficial, pero no pueden profundizar en nada. Son rápidas y banales». Durante su visita a la escuela de Tom, Maggie descubrió que su texto de latín era atractivo e intrigante, mientras que Euclides no le gustó nada. Un vistazo al libro la convenció de que no servía para nada: «¡Qué tonterías! […] Y qué feo es esto, nadie necesita entenderlo», si bien estaba convencida de que podría superarlo si tuviera la oportunidad de aprenderlo de manera sistemática.

Más adelante, tras el naufragio económico del padre, Maggie pudo comprobar si estaba en lo cierto. Los libros de texto de Tom estaban ahora en casa: el diccionario, la gramática y los textos de latín, un libro de lógica y el desesperante Euclides. Juzgó que «[s]in duda, el latín, Euclides y la lógica serían escalones fundamentales en la sabiduría masculina, en el conocimiento que hacía que a los hombres la vida les pareciera satisfactoria e incluso alegre» y soñaba con verse admirada por sus logros intelectuales. Ocupó sus horas con el estudio y estaba satisfecha de descubrir que, durante un tiempo, pudo aprender lo que se había dicho que eran materias exclusivamente masculinas.

Y, sin embargo, encontró que lo que estudiaba resultaba soso y árido, que los frutos del conocimiento no solo tenían una piel dura sino que además eran amargos. Maggie derivaba con facilidad de las abstracciones del latín y la geometría hacia el mundo de lo físico y lo real, como su hermano. Con el tiempo, dejó los libros de texto a un lado y se dedicó a otros asuntos.

Los encuentros de Maggie y Tom con Euclides revelaron sus diferencias a la vez que la manera en que la educación que recibía cada uno era incapaz de conectar con sus aptitudes. El dominio de Euclides en la educación matemática británica estaba en su punto álgido en la época victoriana, desde las universidades y las academias disconformes hasta las escuelas, grandes y pequeñas, y los tutores como Stelling. En los primeros años de la Inglaterra victoriana, a pesar de crecientes dudas sobre sus resultados, la mayoría de los docentes estaban de acuerdo y repetían como un solo hombre lo que ya eran viejos argumentos acerca del uso de Euclides en la formación de la mente y en el dominio del intelecto. En una época en que todo lo que pareciera entusiasmo se veía con desconfianza, la insulsa instrucción basada en proposiciones geométricas (como la de la gramática latina) podía tener un buen efecto en el control de los jóvenes.

Esta situación contrastaba con lo que se daba en otras tradiciones nacionales. En Francia, Alemania e Italia, por ejemplo, el abanico de libros de texto geométricos era mucho más amplio, y no parece que Euclides se estudiara mucho en escuelas y universidades durante los siglos XVIII y XIX. En cambio, en Gran Bretaña Euclides era ya una especie de viejo amigo, los nombres de algunas proposiciones eran como personajes famosos (el puente de los asnos, el molino, etc.). Autores de otras ciencias continuaban apelando a su nombre y sus métodos cuando querían reclamar algo de su prestigio. El poeta Samuel Taylor Coleridge, al componer sus *Ayudas a la reflexión* en la década de 1820, afirmó que sus argumentos morales tenían la solidez de la geometría: «Al igual que en la geometría, hemos empezado definiendo nuestros Términos; ahora proseguimos, como los geómetras, estableciendo nuestros POSTULADOS; la diferencia es que mientras que nadie puede negar los Postulados de la Geometría, los de la Ciencia Moral son tales que ningún buen hombre los negará». En 1838, el científico William Whewell redactó un libro de texto de mecánica e hidrostática que también empleaba la estructura de definiciones axiomas y postulados para dar una apariencia de certeza en lo que él denominó su *Euclides mecánico*: «He intentado crear un sistema de razonamiento tan coherente como el que se ha convertido en sinónimo del nombre de Euclides».

El hecho de que no hubiera ningún «Camino Real» hacia la geometría también la convertía en un nivelador social, para algunos opinadores. No obstante, los valores de la abstracción, la pureza y la certeza apolítica no tenían una relevancia evidente para todos aquellos que pasarían sus vidas ejerciendo una profesión. Algunos maestros y libros de texto, siguiendo la tradición de la matemática práctica, intentaban desmitificar a Euclides, intentaban enseñar geometría haciendo hincapié en sus aplicaciones prácticas y empleando ejemplos y explicaciones cotidianos. Aquí teníamos a Euclides el ingeniero en lugar de Euclides el filósofo, con unos valores de facilidad, rapidez y utilitarismo. Otros, como Stelling, se mantenían en una orientación más austera, independientemente de lo que quisieran o necesitaran sus estudiantes.

Poco a poco, Euclides también se iba haciendo más accesible a las mujeres, dejando de lado el mundo de autodidactas como Mary Fairfax. Aunque los libros de texto de geometría no estaban dirigidos a mujeres ni (con rarísimas excepciones) consideraban que las mujeres pudieran ser sus lectoras, a mediados de siglo se ofrecían lecciones de matemáticas para mujeres, en instituciones como el Ladies’ College de Londres o el Queen’s College de Harley Street. Una de las asistentes fue Marian Evans, la creadora de los personajes de ficción Tom y Maggie Tulliver.

Evans era hija de una familia de clase media de provincias, como muchos de los personajes de sus novelas, nacida y criada en Warwickshire. Inteligente, aguda e imaginativa, abandonó la educación formal a los diecisiete años, tras la muerte de su madre, para llevar la casa y ocuparse de su padre. Cuando este murió en 1849, quedó libre, con veintinueve años, y tras una etapa en Ginebra, se asentó en Londres como periodista.

En la escuela había mostrado interés por las matemáticas, y cuando estaba en Ginebra había escrito a algunos amigos que tenía la costumbre de «tomar una dosis de matemáticas cada día para evitar que se ablande mi cerebro»; las matemáticas eran, pues, una suerte de medicación contra la tristeza; otros amigos y correspondientes subrayarían su conocimiento del análisis matemático y de la geometría de las secciones cónicas. Trabó amistad con Sofía Kovalévskaya, profesora de matemáticas en la Universidad de Estocolmo. Estudió libros de álgebra y recibió clases particulares, y en su primer año en Londres (1851) asistió al curso de lecciones del Ladies' College los lunes y los jueves, sobre el que bromeaba que tenía que ahorrar en guantes blancos y cuellos limpios para pagar la matrícula. Como a Maggie Tulliver, le atraía el fruto de piel dura de las matemáticas, pero a diferencia de aquella, no abandonó.

El profesor, Francis Newman (hermano menor del futuro cardenal John Henry), era de la escuela progresista de enseñanza de la geometría. Aunque estaba de acuerdo en que la geometría era un valioso ejercicio para la mente, pues enseñaba a pensar con lógica y transmitía una apreciación y una capacidad para el pensamiento lúcido, también consideraba que las obras de los geómetras griegos no eran adecuadas para los estudiantes modernos. Newman ofrecía una geometría actualizada y reordenada que él pensaba que era más sencilla y que resultaba más atractiva a los estudiantes, con una mejor fundamentación de la matemática moderna a la vez que mantenía las ventajas del método de axiomas y deducción.

Pocos años después, en 1859, Marian Evans saltó a la fama con la publicación de su primera novela, *Adam Bede*, bajo el seudónimo de George Eliot; *El molino del Floss* fue su segunda novela. La reina Victoria fue admiradora suya, y con la publicación de *Middlemarch* en 1871-1872, Evans fue saludada como el más grande novelista en vida de su país. En varias de sus novelas muestra su interés por la geometría, así como en general por la educación y sus fracasos. El personaje de Adam Bede, por ejemplo, era un carpintero con inclinaciones matemáticas, especialmente ducho en calcular cantidades de madera y hacer estimaciones de longitud (algo que remite al propio padre de Evans).

El molino del Floss, donde Maggie Tulliver comparte algunos rasgos de Evans, aprovecha la enseñanza de la geometría para explorar la manera en que puede fallar la educación: puede fracasar en su objetivo victoriano de mejora (de las personas y la sociedad), puede fallar a la hora de superar el carácter y las circunstancias, puede fallar ante las necesidades individuales de cada uno. Desdeñosa de la manera tradicional de enseñar Euclides y los clásicos, Evans mostró que la ignorancia y la mala suerte dieron forma a la educación recibida por Tom y Maggie, una ignorancia de la cual no podían escapar, al menos dentro de los confines de la novela. Evans sí que pudo escapar e ir más allá. Cada vez más escéptica sobre supuestas verdades incuestionables del tipo que fueran, Evans veía en las matemáticas no una manera de zanjar dificultades, sino de abrirlas y de articular una búsqueda de respuestas acerca de la sociedad, el conocimiento y la ignorancia.

En el último año de su vida, Evans confesó a un amigo que estudiaba las secciones cónicas cada mañana «porque no quería perder la capacidad de aprender». En su última novela, *Daniel Deronda*, presentaba a un estudiante de matemáticas en Cambridge que encontraba mejores cosas que hacer con las matemáticas que seguir un currículo académico pasado de moda centrado en la superación de exámenes. Es la misma línea de pensamiento que encontramos en *El molino del Floss*, pero en una forma mucho más madura y amplia. Evans escribe: «Los hombres pueden soñar con demostraciones y extraer un mundo ilusorio en forma de axiomas, definiciones y proposiciones, con una omisión de los hechos final firmada QED»; sin embargo, «ninguna fórmula del pensamiento salvará a los mortales de los errores en nuestra apreciación imperfecta de los temas sobre los que hay que reflexionar».

Marian Evans murió en 1880, a consecuencia de una combinación de infección de garganta y problemas renales. Tom y Maggie habían llegado a su fin en la década de 1840. Tom había logrado un cierto éxito y se había recuperado de la bancarrota de su padre; Maggie había hecho un cambio radical de vida hacia una intensa espiritualidad, un amor prohibido y una fuga truncada. La solución llegó de forma inesperada, con una inundación del río Floss; los hermanos, reconciliados desde hacía poco, se ahogaron tras volcarse su barca. La sed de Maggie por el conocimiento, que la había llevado a su encuentro con Euclides, en el aula de su hermano y en sus libros, quedó sin saciar hasta el final.

Simson en urdú

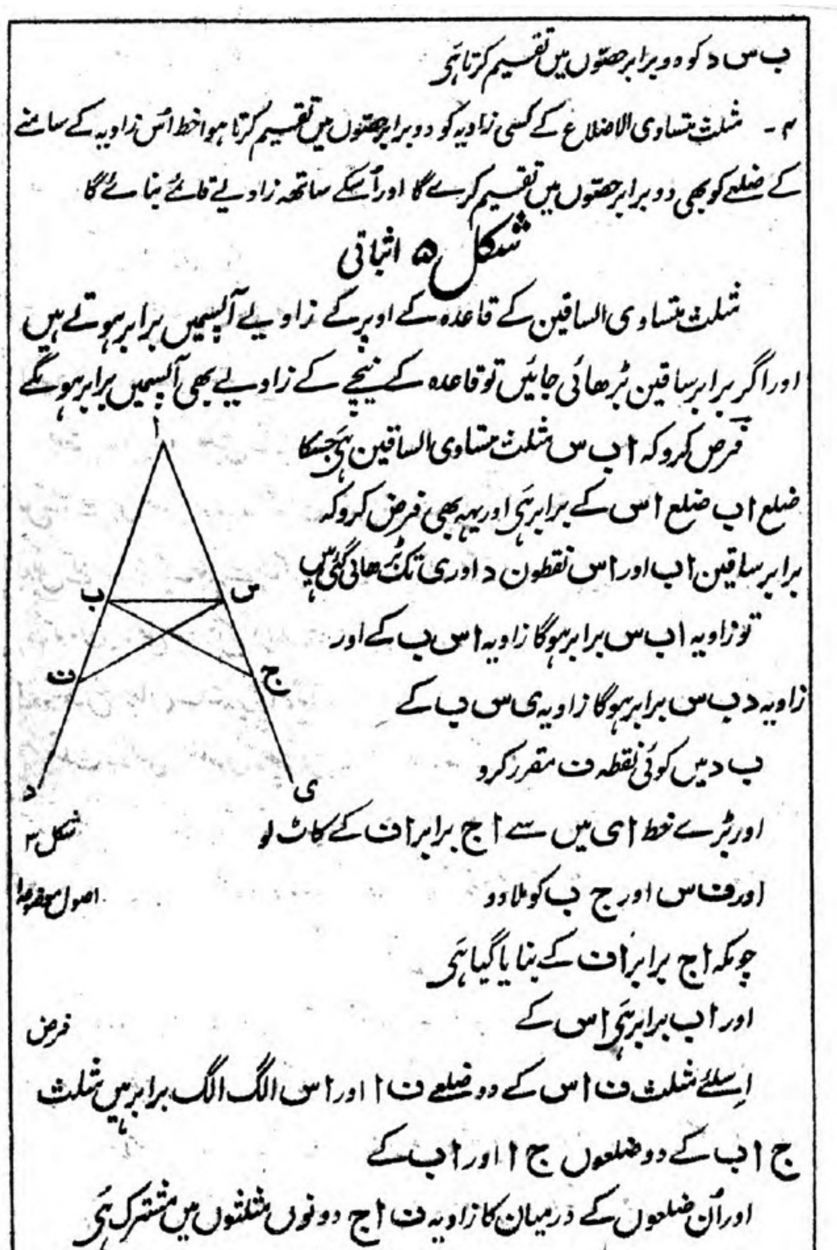
El imperio euclidiano

En 1884 se publicó un compendio de los *Elementos* de Euclides con 275 proposiciones. En apariencia, no difiere de tantos otros; contiene doscientas doce páginas, de unos veintidós centímetros de altura.

El libro está casi por completo en urdú. Fue impreso en Mathura, en Uttar Pradesh, y según su prefacio en inglés, fue elaborado para los que estudiaban para el Certificado de Escuela Normal y los Exámenes Vernáculos de Clase Media en las Provincias Noroccidentales y Oudh.

El prefacio también explica el uso de Euclides para tal propósito:

> Apenas es necesario defender la elección de los *Elementos* de Euclides como base de la obra […] A pesar de los numerosos intentos realizados por nuestros mejores geómetras modernos de hallar un sustituto adecuado, los *Elementos* de Euclides siempre ha tenido un lugar preponderante en nuestras universidades y facultades, y es probable que nunca sea desbancado.



ب س د کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتا ہی

۴ - مثلث متساوی الاضلاع کے کسی زاویہ کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرتا ہوا خط اُس زاویہ کے سامنے
کے ضلعے کو بھی دو برابر حصّوں میں تقسیم کرے گا اور اُسکے ساتھ زاویے قائمے بنائے گا

شکل ۵ اثباتی

مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے اوپر کے زاویے آپسمیں برابر ہوتے ہیں
اور اگر برابر ساقین بڑھائی جائیں تو قاعدہ کے نیچے کے زاویے بھی آپسمیں برابر ہونگے

فرض کرو کہ ا ب س مثلث متساوی الساقین ہی جسکا
ضلع ا ب ضلع ا س کے برابر ہی اور یہہ بھی فرض کرو کہ
برابر ساقین ا ب اور ا س نقطوں د اور ی تک بڑھائی گئی ہیں
تو زاویہ ا ب س برابر ہوگا زاویہ ا س ب کے اور
زاویہ د ب س برابر ہوگا زاویہ ی س ب کے
ب د میں کوئی نقطہ ف مقرر کرو
شکل ۳ اور بڑے خط ا ی میں سے ا ج برابر ا ف کے کاٹ لو
اصول موضوعہ ۱ اور ف س اور ج ب کو ملا دو
چونکہ ا ج برابر ا ف کے بنایا گیا ہی
فرض اور ا ب برابر ہی ا س کے
اسلئے مثلث ف ا س کے دو ضلعے ف ا اور ا س الگ الگ برابر ہیں مثلث
ج ا ب کے دو ضلعوں ج ا اور ا ب کے
اور اُن ضلعوں کے درمیان کا زاویہ ف ا ج دونوں مثلثوں میں مشترک ہی
اسلئے قاعدہ ف س برابر ہی قاعدہ ج ب کے اور مثلث ف ا س برابر ہی مثلث
ج ا ب کے اور باقی زاویے اُن مثلثوں کے جنکے سامنے برابر ضلعے ہیں الگ الگ برابر

Euclides en urdú.

En la Gran Bretaña del siglo XIX, *Euclides* se refería sobre todo (aunque no de manera exclusiva) a la edición popular en inglés de Robert Simson (1756), catedrático de matemáticas en Glasgow, así como a sus diversas imitaciones y reelaboraciones. Eran ediciones «docentes» de los *Elementos*, que hacían hincapié en la pedagogía, tal como se entendía entonces, por encima de la fidelidad textual. Omitían partes, reordenaban el texto y, en ocasiones, lo parafraseaban; comentaban, añadían referencias internas y explicaban, seleccionando material explicativo de la larga tradición de comentarios euclidianos, algunos de los cuales se remontaban a los primeros siglos griegos y otros procedían de las fases árabe y latina del largo viaje del texto. De los trece libros auténticos de los *Elementos,* Simson solo incluyó ocho: los que presentan la geometría en el plano y en el espacio y los que explican las proporciones; el tratamiento de los números se omitió por completo, así como la discusión acerca de los sólidos regulares.

Esta edición tuvo éxito y se generalizó; los *Elementos* de Simson vieron treinta ediciones, con cambios en su contenido, su tamaño y su precio. En 1845, un admirador escribió que «ningún rival ha logrado nunca disputar al Euclides de Simson el dominio de las escuelas». Dos versiones populares posteriores de los *Elementos* (de John Playfair en 1795 y de Isaac Todhunter en 1862) se basaron claramente en la de Simson. Y no fueron solo los británicos como Anne Lister, Mary Fairfax o Tom y Maggie Tulliver los que leyeron estas versiones de los *Elementos*.

Cuando a partir de 1750 la Compañía Británica de las Indias Orientales empezó a ocupar tierras indias y a obtener beneficios de ellas, y se dispuso a gobernar todo un continente, se encontró con muchas cosas. Una de ellas fue una tradición intelectual bien establecida, con un floreciente patrocinio de la ciencia y la tecnología por parte de los emperadores mogoles. La presencia británica implicaba una considerable cantidad de ingenieros militares y topógrafos con formación matemática, algunos de los cuales mostraron un interés real, si bien algo ingenuo, en la ciencia, matemática y astronomía indias; de ello resultó un intento de acercar y relacionar las artes y las ciencias indias con sus equivalentes occidentales. La incomprensión y la condescendencia no estuvieron ausentes, como era de esperar, y, en general, los británicos se convencieron de que, sin rasgos evidentes de razonamiento euclidiano y deductivo, la matemática y la astronomía indias no eran, en el fondo, unas verdaderas matemática y astronomía.

Esta conclusión resulta irónica por todos lados; a menudo, los británicos se las ingeniaron para malinterpretar la Antigüedad y el contenido de los documentos, objetos y tradiciones con las que se topaban en la matemática y la astronomía india, así como para obviar por completo el hecho de que la cultura islámica había llevado la matemática euclidiana al subcontinente indio desde la Edad Media. Por ejemplo, en un momento tan reciente como 1720, Jagannatha Samrat había elaborado una versión en sánscrito de los *Elementos,* a partir del compendio de Euclides en árabe de Násir al-Din al-Tusí. También había traducciones árabes y persas de los *Elementos* por todas partes, además de comentarios y resúmenes, pero al parecer los británicos no se dieron cuenta.

En consecuencia, los pedagogos británicos consideraron la introducción de la matemática euclidiana en la India como una parte, si bien pequeña, de su misión colonial, y al redactar los planes de estudio de las escuelas indias incluyeron de manera regular los *Elementos*. Solo en la década de 1820, disponemos de documentos que nos muestran que Euclides se estudiaba en escuelas de Calcuta, Delhi, Agra y Benarés, con resultados que iban desde un somero conocimiento del libro I hasta alumnos que habían estudiado los primeros seis libros (y, por lo tanto, tenían una base euclidiana tan buena como cualquier otro alumno del mundo).

En los círculos británicos había un largo debate sobre el uso del inglés o de las lenguas vernáculas en la docencia; en la práctica, se utilizaban ambos, con consecuencias para la disponibilidad de libros de texto. Los libros en inglés se podían importar de Gran Bretaña; los libros en lenguas locales solían traducirse e imprimirse en la India. En 1824, el Comité General de Instrucción Pública de Calcuta creó un comité para traducir libros ingleses de matemáticas al árabe, persa, urdú e hindi, por ejemplo; a finales del siglo XIX, se habían publicado muchos miles de copias de estos libros. Sabemos que los *Elementos* se tradujeron al marati, al gujarati, al sánscrito, al urdú, al hindi, al árabe y al oriya. Sus fuentes eran versiones inglesas populares de los *Elementos*, a veces completas, a veces resumidas, seleccionadas o combinadas de maneras diversas. Los primeros tres libros del Euclides de Playfair se incluyeron enteros en la *Encyclopaedia Bengalensis* de 1846, con una traducción en bengalí en páginas enfrentadas, además de otras añadiduras. Una versión en urdú, publicada en torno a 1880, cita como fuentes libros de texto sobre Euclides de como mínimo seis autores británicos.

Es desesperante la dificultad para encontrar reacciones indias o la experiencia de los estudiantes indios con Euclides, pero de vez en cuando, registros escolares, informes y programas de estudio nos dan algunas pistas. En 1844, en el departamento de inglés de la madraza de Calcuta podemos descubrir que:

> En el examen para la obtención de becas preuniversitarias, Abdul Lutif, en concreto, lo superó con un resultado encomiable. Demostró con exactitud dos proposiciones del tercer libro de Euclides y dedujo dos más de dificultad moderada, además de responder correctamente a varias preguntas de ecuaciones simples de álgebra y de fracciones y proporciones de aritmética.

Las universidades indias también enseñaban Euclides de manera rutinaria, y exigían un conocimiento de los primeros libros de los *Elementos* en sus exámenes de admisión. En un examen de 1855 elaborado por la Universidad de Bengala, de nueve preguntas de matemática pura, tres eran sobre Euclides (las otras se centraban en álgebra y trigonometría plana). Las preguntas euclidianas se referían a la construcción de figuras similares entre sí, a los ángulos en una red de líneas que se intersecaban y a los ángulos formados por la intersección de planos en el espacio. En el examen de admisión de la Universidad de Calcuta, se requerían conocimientos de los primeros tres libros de los *Elementos*; «al estudiante se le permite dar sus respuestas en cualquiera de los idiomas hablados en que se le examina».

Mientras tanto, en Inglaterra, el matemático J. J. Sylvester afirmaría, en un contexto algo polémico, que «algunos sitúan a Euclides solo por detrás de la Biblia en cuanto texto sagrado, y como una de las avanzadillas de la Constitución británica»; y de hecho era así. A mediados de siglo, Gran Bretaña había exportado a Euclides no solo a la India, sino por todo el planeta, una manifestación de potencia cultural y de autoconfianza por parte de una sociedad que se veía a sí misma como heredera de todo lo antiguo y griego (el hecho de que los *Elementos* fueran de origen norteafricano no parece haber sido apreciado). En Australia, África y Asia, desde Ciudad del Cabo hasta Cook's Creek y Calcuta, el rigor lógico de los *Elementos* se utilizaba para disciplinar las mentes, de la misma manera que el ejército y los censos disciplinaban los cuerpos y las mediciones topográficas disciplinaban el territorio.

Los imperios crecen y desaparecen. El historiador Rimi Chatterjee ha escrito evocadoramente acerca de los desperdicios dejados por la educación británica en la India: «En Calcuta hay una calle que conecta las más antiguas y venerables instituciones educativas de la ciudad y de sur a norte bordea el lago llamado Gol Dighi». Está flanqueada por facultades y *colleges* (el Scottish Church College, el Bethune College para Señoritas, el Sanskrit College, el Presidency College, la David Hare School) y recibe el nombre de College Street. En esta calle:

> No puedes andar ni cinco metros sin que te aborde algún vendedor de libros. Hay muy pocas librerías en College Street; en cambio, está lleno del tipo de paradas y puestecitos que dieron al mundo el término *stationer*[5].

A primera vista, las carretas de las paradas de papelería parecen estar repletas de exámenes, cuadernos, guías «y demás elementos necesarios para el delicado proceso de superar un examen», pero también hay una posibilidad nada desdeñable de hallar algún viejo libro de texto: una gramática de 1810, por ejemplo, o una edición de Shelley de 1850; ¿quizá también una vieja y maltrecha copia de Euclides? Chatterjee no lo menciona, pero está claro que Euclides tiene su lugar allí «donde se venden y compran los desperdicios del Raj junto con otros chismes de épocas posteriores».

Los libros euclidianos publicados para la India británica resultan bastante misteriosos hoy en día. De los miles que se imprimieron pocos sobreviven y los que han llegado hasta la actualidad son, a menudo, copias donadas a las bibliotecas (la Británica, tal vez, o la Bodleiana) poco después de su publicación y, en consecuencia, no muestran signos de haber sido usadas. Sin duda se debieron de utilizar muchas otras copias, pero exactamente por quién, para qué y en qué circunstancias sigue estando poco claro. Apenas se ha iniciado la investigación detallada del tema y seguro que pasarán muchos años antes de que podamos explicarla con detalle.

Sus rivales modernos

Un estudio de un *college* de Oxford, 1879.

MINOS durmiendo. Se le aparece el fantasma de Euclides. Minos abre los ojos y lo mira con una expresión vacía y fría, sin demostrar la más mínima sorpresa ni interés.

EUCLIDES: ¿Qué es esto de que necesitas un Manual de Geometría?

MINOS: Perdona, pero, con el debido respeto a una sombra cuyo nombre he venerado desde mi infancia, ¿no es esta una manera algo brusca de iniciar una conversación? Recuerda, nos separan veinte siglos y, por lo tanto, nunca hemos tenido una charla personal hasta ahora. Sin duda, unas pocas frases de cortesía…

EUCLIDES: Los siglos son largos, mi buen señor, pero mi tiempo esta noche es breve, y nunca he sido un hombre de muchas palabras. Déjate de tantas ceremonias y responde a mi pregunta.

Ninguna tradición dura para siempre. Los *Elementos* habían recibido críticas por volver locos a los estudiantes, por torturar la mente y, cada vez más, por su absoluta irrelevancia para la matemática moderna. Una cultura que ahora sospechaba de los textos antiguos y de las figuras de autoridad sin duda empezó a sospechar también de Euclides. Las voces en su contra se volvieron ensordecedoras en las últimas décadas del siglo XIX.

La enorme popularidad de Euclides en el mundo británico se había vuelto un problema, pues provocaba la proliferación de diferentes versiones de los *Elementos*, cada una con sus particularidades en cuanto a ordenación, presentación y notación; incluso las diferencias entre varias reimpresiones de las versiones populares podían llevar a confusiones. Ninguna edición inglesa en circulación ofrecía un «Euclides puro y simple»; pocas incorporaban los libros sobre teoría de números o los sólidos regulares; muchas modificaban el contenido eliminando partes difíciles o añadiendo extras sobre temas como la trigonometría. Si el objetivo era asegurarse de que todo el mundo aprendía lo mismo en el mismo orden a partir de un libro de texto estándar, el resultado fue un claro fracaso.

Tampoco ayudaba el hecho de que el siglo XIX fue una época de angustia para los matemáticos británicos, que notaban que se habían quedado atrás respecto a sus colegas continentales a causa de una excesiva dependencia de los métodos y la notación de Newton. Un grupo que se dio a sí mismo el nombre de Analytical Society, además de otros, presionó con fuerza para una reforma de la docencia universitaria y de los programas de investigación en matemáticas a partir de 1800. Parte del problema era, sin duda, el omnipresente Euclides, y en consecuencia empezó a ser objeto de ataques.

Entre los oponentes más vehementes de Euclides se encontraba el matemático J. J. Sylvester, que se proclamó sin tapujos como «odiador de las geometría» (es decir, de Euclides). Quería que los *Elementos* «se archiven o se entierren "donde la sonda jamás llegó"**[6]**, fuera del alcance de ningún estudiante». Un informe francés muy citado sobre el sistema educativo inglés declaraba que el estudio de Euclides era poco más que aprendizaje por repetición, que privilegiaba la memoria sobre la inteligencia. Hacia 1870, en una carta en *Nature* se propuso una organización «anti-Euclides» y aunque lo que al final se creó se denominó Asociación para la Mejora de la Enseñanza Geométrica (más adelante Asociación Matemática), en sus primeros años fue en realidad un grupo de presión anti-Euclides. Publicaba informes anuales y elaboraba programas de geometría que repartía por las universidades británicas y los ministerios y departamentos gubernamentales.

Al parecer, las características tradicionales de los *Elementos* (su belleza, sabiduría y utilidad) de golpe se habían convertido en sus opuestos. De repente, parecía algo muerto, corrompido textualmente, árido, repelente y exasperante; era un texto alejado de las realidades de la pedagogía, de la matemática moderna y de las aplicaciones al mundo industrial.

Pero no solo había críticos; Euclides también reunió a varios destacados defensores entre los matemáticos británicos. Augustus De Morgan y luego Arthur Cayley, quizá el primer geómetra de relevancia internacional que había producido Inglaterra desde Newton, eran ambos fervientes partidarios de Euclides. De Morgan escribió que «nunca ha habido —y hasta que lo veamos nunca creeremos que puede haber— un sistema de geometría digno de tal nombre que se desvíe del plan establecido por Euclides (y no hablamos aquí de correcciones, ampliaciones o elaboraciones)». Otro partidario de Euclides, Lewis Carroll, presentó en su libro *Euclides y sus rivales modernos* una extensa argumentación sobre las carencias de los nuevos libros de texto, a veces francamente divertida, con un tutor de Oxford llamado Minos en diálogo con el fantasma del difunto Euclides acerca de las confusiones y absurdos que podían identificar con facilidad en los recientes rivales de este.

Los argumentos a favor de Euclides eran pragmáticos (era mejor tener un libro de texto, con una serie de proposiciones, que muchos) y se añadían al testimonio personal de maestros que habían empleado los *Elementos* con éxito. El proyecto de escribir algo mejor parecía bastante endeble, y en esta primera ronda del «debate sobre Euclides» los vencedores fueron sus defensores.

Pero las cosas no acabaron aquí. Además de la ventaja de una sola serie de proposiciones geométricas, un aspecto que se esgrimía a menudo a favor de los *Elementos* era su estatus como descripción única y correcta del mundo real, del espacio, de las líneas, de los puntos y de las formas. Durante la década de 1870, cuando se empezó a conocer en el mundo anglohablante la geometría no euclidiana de Lobachevski, este argumento ya no se pudo sostener. Tal como expresó William Kingdom Clifford en uno de sus ensayos sobre el tema, «el geómetra de hoy no sabe nada sobre la naturaleza del […] espacio a una distancia infinita. No sabe nada sobre las propiedades de este espacio presente en una eternidad pasada o futura». Ahora ya no estaba en cuestión la utilidad, sino la propia verdad del sistema de Euclides, y este hecho no le fue de ayuda, precisamente.

El siguiente golpe llegó en los años de cambio de siglo, cuando los matemáticos empezaron a interesarse en la fundamentación lógica de su campo de estudio, en un desplazamiento hacia formas basadas más en la filosofía y la lógica y una menor dependencia de la intuición. Así, se hicieron varios intentos de reformular las matemáticas sobre unas bases algebraicas y simbólicas completamente lógicas. Un producto de este proceso fueron varios intentos de evaluar los *Elementos* de Euclides mediante los estándares de la lógica moderna; como era de esperar, se los encontró deficientes. De hecho, durante milenios, los diversos comentaristas ya habían ido localizando lagunas en la estructura lógica de los *Elementos*: resultados que ya no se volvían a utilizar, definiciones ausentes, suposiciones no especificadas, etc.; ahora, de golpe, todo esto era importante. El gran lógico Bertrand Russell (1872-1979) escribió en 1902, en un artículo acerca de la adecuación de emplear Euclides en la docencia, que «sus definiciones no siempre definen, sus axiomas no siempre son indemostrables, sus demostraciones exigen muchos axiomas de los que no es consciente» y, en consecuencia, que el valor de los *Elementos* como formación en lógica se había «exagerado muchísimo». Russell consideró que una de las primeras demostraciones del libro era «tan mala que hubiera sido mejor que asumiera que esta proposición era un axioma». Las quejas no se limitan solo a esta época; no hace mucho, Ian

Mueller ha escrito acerca de la estructura lógica de los *Elementos* y ha llamado la atención una y otra vez sobre aspectos similares: «Es difícil ver que aquí haya demostración alguna», «innecesariamente complejo», «desconcertante […] desde un punto de vista lógico» o «claramente insuficiente».

De algún modo, todo esto solo demuestra que una vez que se ha decidido sospechar de un texto, es fácil encontrar cosas incorrectas en él. Sin embargo, las consecuencias para el estatus de Euclides fueron bien reales, y no hicieron ningún bien a aquellos que todavía querían considerarlo el fundamento natural de una educación matemática y de una formación completa y rigurosa en la forma correcta de pensar. Al igual que otras aseveraciones tradicionales sobre Euclides, la repetida afirmación de que los *Elementos* no eran solo un corpus de hechos, sino también un método de demostración, un estilo de pensamiento y el mejor entrenamiento posible para la mente ya no se podía sostener.

El resultado final no era ninguna certeza superior. Ningún nuevo libro de texto había conseguido suplantar a Euclides y, si bien se había transmitido una angustia considerable sobre los *Elementos* y su utilidad como libro de texto durante toda la era victoriana, se necesitaría bastante más para eliminarlo de institutos y universidades.

El golpe definitivo llegó en los años posteriores a 1901, cuando el reformador educativo John Perry planteó con claridad sus propósitos. Perry se oponía al razonamiento abstracto y, sobre todo, a su uso en la educación. Según su punto de vista y su experiencia, es solo «una mente excepcionalísima y tal vez no muy sana la que puede aprender o formarse mediante el razonamiento abstracto; y, de hecho, nunca se aprende mucho de esta manera». Razonaba con vehemencia a favor del uso de la experimentación y la intuición en el proceso de aprendizaje, métodos que había empleado con éxito en su práctica docente.

Perry podía haber quedado como un destacado excéntrico más, pero en 1901 convenció a la influyente Asociación Británica para el Avance de las Ciencias de que se ocupara de la reforma de la enseñanza de la geometría. Su informe recomendaba flexibilidad en la elección de los libros de texto y, a la vez, la introducción de los métodos favoritos de Perry en la geometría, con su trabajo práctico y experimental basado en los métodos de prueba y error y el «aprender haciendo».

A partir de aquí, la degradación oficial de Euclides se produjo con inusitada rapidez. La Universidad de Cambridge encargó un informe sobre sus exámenes de geometría; con las ideas de Perry dominando el panorama y un influyente miembro de la Asociación en el comité, era de esperar que este comité encargado del informe dictaminara contra Euclides. Recomendaba que en los exámenes universitarios se aceptara cualquier demostración sistemática, fuera euclidiana o no, para las proposiciones planteadas. Las recomendaciones fueron aceptadas por el claustro de la universidad y se aplicaron en 1904, momento en que Euclides dejó de ser obligatorio en Cambridge.

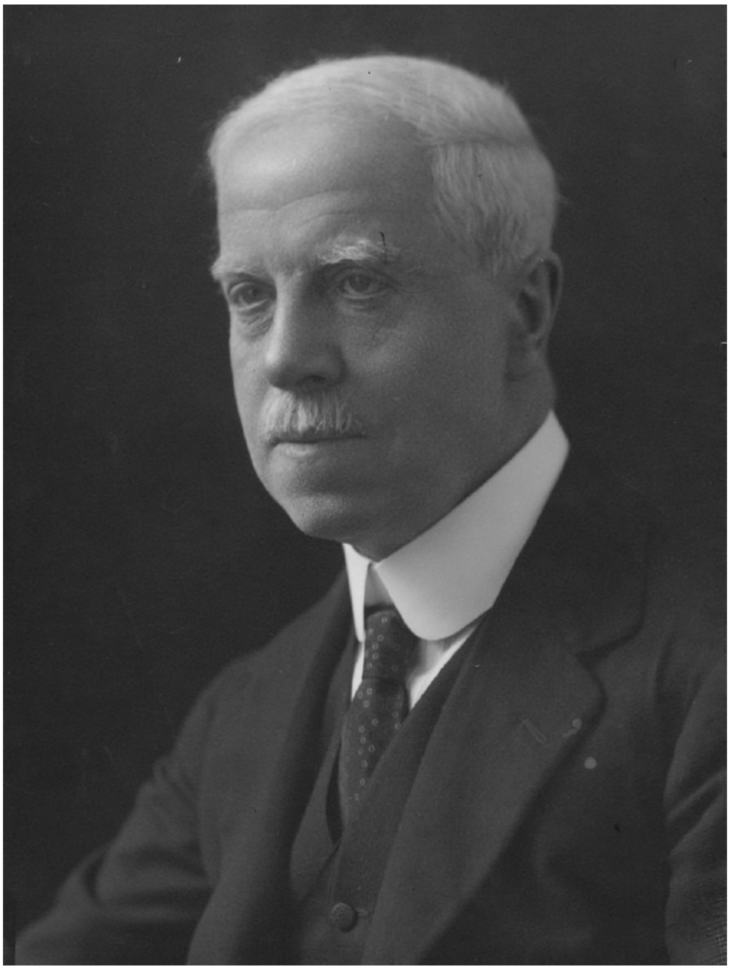
Los comités de examinación de otros lugares de Gran Bretaña siguieron el ejemplo con rapidez, así como los institutos de secundaria en el país y en las colonias de ultramar. De ser el rey de la geometría, Euclides había pasado a ser, de golpe, un ciudadano más. Se continuó enseñando los *Elementos* y los métodos euclidianos, siempre admirados, pero nunca volverían a gozar de la influencia exclusiva que hasta hacía bien poco parecía su posición natural.

Thomas Little Heath

Con verdadero amor

1908. Un funcionario de mediana edad en su casa de Londres; en un amplio salón, a la vez biblioteca y sala de música, se va moviendo del escritorio al piano y de nuevo al escritorio, una y otra vez. Escribe a mano durante horas, pero de vez en cuando se encalla en un punto que no puede superar; entonces se dirige al piano y toca (Brahms, Schubert, Bach o Beethoven) hasta que el escollo desaparece y ve con claridad cómo proseguir. Vuelve al escritorio y escribe.

Sir Thomas Little Heath (1861-1940) era un improbable héroe para la causa de Euclides y los *Elementos*. Hijo de un granjero de Lincolnshire, su primer maestro fue el hijo autodidacta de un curtidor, y pronto se comprometió con los valores del trabajo arduo y la disciplina propia. A los dieciocho años era estudiante en el Trinity College, en Cambridge, donde ni los deportes ni el club de debate le atrajeron en absoluto; su única actividad conocida aparte del estudio era la música. Además de recibir distinciones en estudios clásicos y matemáticas (de primer orden en una, en duodécimo lugar en la otra) aprendió lenguas modernas: francés, alemán, italiano y quizá otras.



Thomas Little Heath.

En 1884, recién salido de la universidad, aprobó las oposiciones a funcionario y entró en el Ministerio de Hacienda como secretario. El Ministerio de Hacienda era un entorno culto y agradable, la mayoría de cuyos empleados eran graduados de Oxford y Cambridge y sin ningún hincapié especial en las competencias técnicas económicas que luego se harían habituales. La mayor parte de su trabajo era gestionar solicitudes de otros ministerios relacionadas con gastos diversos y su tarea principal era la frugalidad. El primer ministro William Gladstone afirmó que «ahorrar en los restos de velas [es] una muy buena medida de un buen ministro de Hacienda».

La formación laboral implicaba que los funcionarios más jóvenes iban pasando por los diversos departamentos cada pocos años, para obtener una experiencia más amplia de las tareas del ministerio. Ahora bien, a pesar de la sensación general de inmovilismo, el ministerio crecía; en 1914 tenía más de treinta funcionarios superiores y empezaba a verse como el principal ministerio dentro de la función pública británica y su jefe como la máxima autoridad entre los funcionarios.

Heath prosperó en este ambiente, ascendiendo por el escalafón, y su trabajo fue recompensado con honores. En 1903 fue nombrado Compañero de la Orden del Baño y en 1909, Caballero Comendador de la misma orden. En 1913, con cincuenta y dos años, se le nombró secretario permanente conjunto, es decir, jefe conjunto del ministerio, llegando así a la cima del funcionariado británico.

Sin embargo, todo cambiaría en los cinco años siguientes. El radicalismo fiscal se convirtió en la nueva doctrina que seguir bajo el gobierno de Lloyd George, con préstamos de guerra, impuestos sobre la tierra y sobreimpuestos. El gasto público (y la deuda nacional) aumentaron muchísimo y se debilitó el control por parte del Ministerio de Hacienda: en 1916, los ministerios y departamentos asociados con la guerra gastaban unos 2,5 millones de libras al día y Gran Bretaña prestaba a sus aliados casi otro millón más cada día. El ministerio estaba saturado y las tareas de los secretarios permanentes eran enormes.

El otro secretario permanente, un hombre llamado Bradbury, se ocupaba de las finanzas (aunque era famoso por sus errores aritméticos) mientras que Heath se dedicaba a la administración y el control de los gastos. En 1916, por sus servicios, se le concedió el título de Caballero Comendador de la Real Orden Victoriana. Sin embargo, el esfuerzo empezaba a pasar factura. Heath se labró una reputación de inflexibilidad; según el líder de la oposición H. H. Asquith, era «la encarnación especial de todo aquello que resulta más resabido y anguloso». En una ocasión se opuso a la introducción de teléfonos en el ministerio arguyendo que tal cosa haría que los funcionarios descuidaran el arte de redactar con concisión.

En la posguerra, con la reorganización del ministerio, Heath perdió su puesto. Su colega Bradbury fue trasladado a la Comisión de Reparaciones y Heath, a la Oficina Nacional de Deuda, mientras que al frente del Ministerio de Hacienda se puso a una persona mucho más joven. Heath permaneció en el nuevo cargo una temporada, luego como auditor general y como secretario de la Comisión para la Reducción de la Deuda Nacional, pero al final se jubiló en 1926, a los sesenta y cinco años.

No era extraño para los trabajadores cultos del Ministerio de Hacienda dedicarse a aficiones ilustradas. Un secretario permanente anterior se había lanzado al estudio del pali; el *hobby* de Heath era la matemática griega antigua.

Se dedicó a este tema con la misma meticulosidad y trabajo persistente que le había hecho destacar en Cambridge y en el ministerio. Entre 1885 y su muerte en 1940, Heath publicó unas cinco mil páginas, incluyendo versiones inglesas de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Euclides, una historia de la matemática griega en dos volúmenes y un libro sobre la matemática en Aristóteles, además de una docena de artículos y dos breves libros de divulgación. Sus contemporáneos lo valoraron como «sensato y cuidadoso en grado sumo» y lo situaron entre la media docena de destacados historiadores de la matemática antigua en todo el mundo: «Uno de los académicos más sabios y trabajadores de nuestros tiempos». Recibió títulos honoríficos de Oxford y otras universidades y fue miembro de la Royal Society y de la British Academy.

La versión inglesa de Heath de los *Elementos* apareció en 1908. Era una traducción literal y completa, y, de hecho, la primera nueva versión en inglés de algunas partes del texto desde 1780. Su traducción seguía la edición del texto de Johan Heiberg y, en consecuencia, estaba de acuerdo con la convicción de Heiberg (y de Peyrard) de que siguiendo el ya famoso manuscrito 190 se podía llegar al «texto genuino de Euclides», en lugar de la edición de Teón. En su trabajo, Heath tuvo el soporte de las suposiciones de Heiberg acerca de los autores antiguos, y en sus decisiones a veces aplicó su propio punto de vista sobre lo que era auténtico y lo que no, y sobre cómo presentar los textos y los diagramas correspondientes. Según su enfoque, pues, Arquímedes era preciso pero difícil, Apolonio era difícil, sin más, y Euclides tenía que ser coherente, accesible e incluso sencillo. Las explicaciones quedaban relegadas a las notas y a los pies de página, en los que Heath incluyó gran cantidad de información sobre la matemática de Euclides, su historia y las ediciones previas. Por ejemplo, su nota sobre el teorema de Pitágoras son dieciocho páginas de letra pequeña en las que repasa los testimonios griegos y romanos acerca de la antigüedad y el descubrimiento del teorema, con especulaciones sobre el método de su primera demostración; discutía el concepto de *irracionalidad* y de parejas de cuadrados cuya suma era otro número elevado al cuadrado, con reglas generales para hallar estas tripletas y especulaciones acerca de cómo se descubrieron; presentaba diversas estrategias para la demostración del teorema, con ejemplos asociados procedentes de China y (muchos) de la India, y también planteaba algunas ampliaciones griegas del teorema. Además de las fuentes en griego y latín, esta nota particular citaba textos historiográficos en francés y alemán y se podía atisbar la obra que Heiberg había publicado en danés y latín. Otras observaciones en un anexo se dedicaban al nombre del teorema, con citas en varios idiomas e incluso un toque personal de una incongruencia deliciosa:

> Me atrevo a sugerir que una versión muy moderna de la «Silla de la Novia» que apareció durante la guerra o poco después en *La Vie Parisienne* podría arrojar luz sobre la cuestión. La ilustración representa la figura de Euclides para la proposición I.47 [el teorema de Pitágoras] y, sobre ella, como en un marco, un *poilu* con todo su equipo y llevando

> a cuestas su novia y sus pertenencias domésticas. Simplificando, el soldado está de pie (o andando, más bien) en medio del cuadrado más grande, su cabeza y sus hombros se tuercen a la derecha dentro del contorno de uno de los cuadrados pequeños y la dama, con un espejo y una borla de maquillaje, está sentada con su espalda contra la espalda del hombre en el ángulo recto entre los dos cuadrados más pequeños.

Hasta el momento, ha sido imposible redescubrir esta copia de *La Vie Parisienne*.

En sus notas, Heath adopta el punto de vista de que la matemática griega, en algunos casos, podría ser trasladada adecuadamente al álgebra moderna. La traducción de un lenguaje matemático a otro para ayudar a la comprensión no era algo nuevo, pues ya había numerosas glosas en los márgenes de manuscritos bizantinos y también una traducción bizantina de parte del libro II en términos aritméticos. Las ediciones impresas habían reescrito a Euclides en el lenguaje algebraico desde el siglo XVII, pero a partir de la década de 1870 había una tendencia específica a aseverar que el contenido del libro II de Euclides, pongamos por caso, era *en realidad* álgebra, oculta bajo un lenguaje geométrico. Heath adoptó esta postura con entusiasmo en sus primeros libros, aunque la moderó algo en su edición de Euclides: «Algunos editores ingleses han preferido el método algebraico al de Euclides, pero no debería imponerse en aquellos que quieren preservar los rasgos esenciales de la geometría griega tal como la presentaron sus mayores representantes o que quieren apreciar su punto de vista». El álgebra seguía estando presente, pero ahora se colocaba en las notas, no en el texto principal.

Después de más de un siglo, los *Elementos* de Heath no han caído en el olvido; hubo una segunda edición en 1926, y su texto puede obtenerse actualmente en diversas ediciones impresas, incluyendo por lo menos una de la colección Great Books[7], y también en Internet. Uno de los motivos de Heath para traducir los *Elementos* fue combatir lo que él consideraba que era el desastroso efecto del abandono de Euclides en Gran Bretaña para propósitos docentes. En 1908 escribió que esperaba que Euclides al completo pronto pudiera regresar en la docencia; luego, publicó el libro I en griego con este objetivo en mente. La segunda edición reimprimió las mismas observaciones, insistiendo en que «el corpus de doctrina contenido en los recientes libros de texto de geometría elemental no […] muestra diferencias sustanciales respecto al que se establece en los *Elementos*», y que «en los siglos que han transcurrido, no ha habido necesidad de reconstruir, y todavía menos rechazar por inadecuada, ninguna parte esencial de su doctrina». Sin embargo, en 1926, el tema era ya un caso perdido y las palabras de Heath resuenan como una petición desesperada a favor de la vieja imagen del mundo eterno e inmutable, de la certeza euclidiana: «Euclides nunca puede estar en suspensión más que de manera aparente; es inmortal». Un último ataque de Heath llegó en 1932, cuando contribuyó a un prefacio de una reimpresión de una edición victoriana: «No se ha elaborado aún ninguna alternativa a los *Elementos* que presente menos objeciones o que estas sean menos graves»; según él, los estudiantes «deben ser introducidos en Euclides en su forma original, como un antídoto a los ecos de él, más o menos débiles, que se pueden hallar en los libros de texto ordinarios sobre “geometría”».

Heath no solo creía que Euclides era fundamental en la pedagogía, sino que el logro griego era esencial para las matemáticas; que «las matemáticas, en resumen, son una ciencia griega», que «la geometría elemental es Euclides». Parece haber aceptado sin demasiada vacilación el punto de vista según el cual los logros culturales de la antigua Grecia eran, en muchos aspectos, absolutamente excepcionales, así como la idea asociada de que todas las demás tradiciones matemáticas antiguas eran inferiores, si no insignificantes. No es ninguna sorpresa que coincidiera con la opinión de Heiberg de que los testimonios árabes del texto de Euclides podían descartarse sin problemas en la mayoría de los casos, si no en todos.

Además, Heath también creía que el estudio del «genio griego» era una parte imprescindible de la cultura. «Generación tras generación de hombres y mujeres seguirán teniendo que recurrir a los griegos en la escuela para todo aquello en que son nuestros maestros; y por este motivo deben continuar aprendiendo griego». Y también: «Si uno quisiera comprender el genio griego en su totalidad, un buen plan sería empezar con su geometría». Los *Elementos*, pues, eran «uno de los más nobles monumentos de la Antigüedad»: puro, noble e inmutable. Como los que presentaban los *Elementos* en las colonias británicas, Heath asumió la geometría euclidiana como un signo de superioridad cultural, como parte de su propia identidad cultural. El trabajo de presentarlo a una nueva generación y de realizar exégesis sobre lo que él denominaba de manera persistente su «corpus de doctrina» le parecía poco menos que un deber sagrado.

Thomas Heath fue un erudito excepcional, con un dominio de la matemática griega antigua que resultaría impresionante en cualquier época, incluso en la propia Grecia de la Antigüedad. Su amor por los *Elementos* de Euclides (por una versión de los *Elementos* que, en parte, era creación suya) era sincera por completo, y le dio una perspectiva sobre el texto que acaso no se iba a repetir nunca. Una vez sugirió que «para cualquier persona inteligente con una memoria aceptable de las tareas escolares de geometría elemental […] será una lectura fácil y debería emocionarse siguiendo su desarrollo». También escribió que «me sorprendería que lectores cualificados, al conocer a Euclides por primera vez, no lo encuentren fascinante, un libro para leer en la cama o durante unas vacaciones, un libro que, una vez empezado, cuesta tanto dejarlo como una historia de detectives». Si esto pudiera parecer improbable, añade: «Sé de un caso real en que sucedió tal cosa, el de un estudiante de Cambridge al que se le presentó de golpe una copia de Euclides». Ya no podemos identificar este caso concreto, pero no es muy difícil conjeturar que este caso único podría ser el de Thomas Little Heath.

Heath vivió en una época en que el sentimiento antieuclidiano se expresaba con vehemencia y en que los *Elementos* habían perdido, aparentemente para siempre, su lugar en la educación británica. Sin duda, el hecho de haber presenciado en primera fila el debate sobre Euclides y sus efectos marcó su disposición a expresar reverencia, respeto e incluso amor por el texto. Un revisor destacó precisamente este aspecto de su obra, en relación con la dependencia tradicional y cada vez menor de Euclides en la educación británica: los *Elementos* de Heath eran «una obra que solo un inglés podía escribir con verdadero amor».

Desde siempre, muchos se habían enamorado de Euclides, y a pesar del súbito declive, muchos otros continuarían haciéndolo, como Heath. En el siglo XVII, se dice que Thomas Hobbes estaba «enamorado de la geometría», después de su encuentro casual con la proposición 47. En ese mismo siglo, George Wharton, al presentar una edición en inglés, admiró el libro y divinizó al hombre: «¡He aquí al gran Euclides! ¡Contempladlo bien! ¡Pues en él reside la Divinidad!». En los Estados Unidos de los años veinte, la autora Edna St. Vincent Millary compuso lo que quizá sea la más memorable expresión de este amor romántico en su soneto:

> Nadie miró jamás la belleza desnuda
> cual Euclides. Que callen los que hablan de belleza,
> y humillando en el polvo la vacía cabeza
> a la nada contemplen con gran mirada muda.
>
> La nada, vana urdimbre de complicados trazos,
> digna de los graznidos del ganso. El generoso
> héroe quiere saltar al aire luminoso
> librándose del polvo y sus pesados lazos.
>
> Oh, deslumbrante hora, santo, terrible día,
> cuando por primera vez la belleza relucía
> de fragmentada luz. Que Euclides elegido
>
> fue para contemplar la belleza de frente.

Dichoso el que de lejos y un instante presente
su sandalia en la piedra oyó sobrecogido.

Max Ernst

La máscara de Euclides

Mayo de 1945, 42 Este de la calle 57, Manhattan, la Galería Julien Levy. Se presenta una nueva exposición de pinturas y esculturas del artista alemán exiliado Max Ernst. Uno de los cuadros lleva por título *Euclides*.

Se trata de un óleo sobre tela casi cuadrado, de poco más de sesenta centímetros de altura y un poco menos de ancho. La firma en la esquina inferior derecha dice «max ernst 45». Es un retrato (¿seguro?) que muestra a una figura de anchos hombros del torso hacia arriba (¿seguro?), con este hacia el observador y la cabeza algo ladeada a la izquierda.

Empezando por arriba, nos encontramos con una pluma negra (o eso parece). Luego dos rosas blancas, aunque algunos ven aquí el rostro de un búho. Ambas cosas se hallan sobre un sombrero negro con cierto aire de turbante. Debajo del sombrero, una pirámide invertida; la base de la pirámide (arriba) podría ser un rectángulo estrecho, pero queda cubierta por el sombrero. En la cara frontal de la pirámide, una estilizada hoja hace el papel de nariz, lo que sugiere un rostro, con dos orificios como ojos.

Debajo de la cara hay un conjunto de ropajes negros; tal vez unas pieles o tal vez unas telas. Sobre ellas, una gardenia o acaso una pluma. Una chaqueta gris muestra un único botón y, sobre el pecho derecho, un pez, quizá cosido. Podemos ver lo que parece un brazo derecho, mientras que la mano izquierda (¿es una mano?, parece tener solo tres dedos o a lo mejor cuatro), en un guante blanco, sostiene otro pez, que no parece formar parte de la chaqueta; este se dobla alrededor de un dedo cual anillo gigante.

Euclides, de Max Ernst.

El resto del lienzo está cubierto por un patrón cuadriculado formado por líneas diagonales; ninguna es perfectamente recta ni perfectamente paralela o perpendicular a las demás; hacia la derecha forman rectángulos y cuasicuadrados, pero hacia la izquierda el patrón se altera en amplias curvas. Las formas tienen colores fríos azules, verdes, grises y un amarillo que remite a los ojos de la figura. Hay unas pocas figuras blancas y dos rojas. La cuadrícula no es exactamente un fondo, porque en tres lugares pasa por delante de la figura; una de las curvas más evidentes se forma a partir del patrón de la chaqueta y tres de las rectas prosiguen a lado y lado de la pirámide/rostro.

Max Ernst (1891-1976), nacido en Alemania, se nacionalizó estadounidense y después francés. Asumió el lenguaje visual y el espíritu de los románticos alemanes, de los expresionistas, de los primitivistas y de los dadaístas; durante una década y media se proclamó surrealista. Inventor incansable de nuevas técnicas y estilos, en su época estadounidense se estaba alejando un poco del surrealismo más estricto, por un lado con una serie de obras desesperantes que recordaban una Europa asolada por la guerra y por otro con una serie de trabajos más calmados y armoniosos del que *Euclides* forma parte. Sin embargo, como la mayoría de sus cuadros, *Euclides* se resiste a una interpretación sencilla. Si bien se le ha calificado de cima del surrealismo, a menudo ha desconcertado a sus críticos. Uno de sus primeros admiradores vio el damero de *Alicia a través del espejo* de Lewis Carroll en el fondo (de hecho, a Ernst le encantaban los libros de Alicia y más adelante ilustraría *La caza del Snark* y *El juego de la lógica*); otro comentarista se preguntó si la rosa simbolizaría la alquimia o el misticismo; también se ha sugerido que el pez crea un juego de palabras, porque «no se halla en su elemento».

Está claro que los atributos tradicionales de los retratos euclidianos están aquí ausentes. No hay compás, no hay regla, no hay libro, no hay diagramas y no hay estudiantes. Tampoco existe la más mínima indicación de la postura típica del geómetra, encorvado sobre un diagrama. Casi la única característica en común con las representaciones habituales de Euclides en la Edad Media y el Renacimiento es el turbante. El colapso del fondo de cuadrados y rectángulos en un conjunto de curvas que se intersecan también tiene un aire a geometría no euclidiana. Los arrugados ropajes son lo opuesto a un plano euclidiano, y la perspectiva poco clara, por no decir fragmentada, en que el fondo y el primer plano parecen desdibujarse y sobreponerse es también un elemento muy antieuclidiano.

Al mismo tiempo, destaca la ausencia de formas geométricas reconocibles, en contraste con buena parte del arte del siglo XX. Una excepción podría ser el pez, que puede recordar la forma de un distorsionado toro de revolución, figura que aparece en conjuntos geométricos para la enseñanza (Man Ray había publicado fotografías de estos elementos en el Instituto Henri Poincaré de París y es muy posible que Ernst las hubiera visto). Otra es la pirámide que hace el papel de rostro. Del mismo modo que el artista del siglo XVI Giuseppe Arcimboldo, a quien los surrealistas adoraban y que pintaba cabezas y figuras a partir de flores y frutas o un bibliotecario formado por libros, Ernst pintó un Euclides hecho, en parte de bagatelas: la pluma, las flores e incluso la forma retorcida cual calabaza del sombrero remiten a las pinturas de Arcimboldo.

Sin embargo, tal vez todo este análisis sea demasiado literal; Ernst, como su contemporáneo René Magritte, engañaba al espectador a ver lo que no había pintado. Las pruebas de que lo que hay tras este conjunto de objetos es una figura humana son muy débiles. La cabeza en forma de pirámide invertida parece más bien una máscara, y una máscara no tiene por qué tener un rostro detrás. Ernst mostró siempre un gran escepticismo acerca de los códigos morales y estéticos tradicionales y sus portavoces, así como acerca de la razón y la racionalidad: para él, máscaras y ropajes vacíos podían ser símbolo de la vacuidad de todas estas cosas.

Estamos también en unos años en que el propio Euclides muestra una clara tendencia a desaparecer de la historia, igual que otros autores de la Antigüedad. En 1966, el matemático francés Jean Itard, al presentar una reedición de la traducción de los *Elementos* de François Peyrard, afirmó que el libro no era obra de una sola persona, sino de un grupo de autores, una escuela, de la cual «Euclides» no era más que su nombre colectivo. Cabe remarcar que un grupo de matemáticos franceses habían estado publicando bajo el nombre colectivo de Bourbaki desde la década de 1930, lo que daba a Itard un ejemplo relevante para su aseveración.

Ahora, en el siglo XXI, todavía se dice de vez en cuando que los *Elementos* son un texto colaborativo, para el cual no se necesita citar ningún autor. Se trata de un escepticismo que no se antoja muy convincente, si bien es cierto que cuanta más atención se presta a las pruebas históricas, más elusivo se vuelve Euclides. La idea de Euclides como una especie de comité sin rostro visible, o como una figura que nos ha engañado de la manera más básica de todas, no existiendo, se empareja con la enigmática y tal vez vacía máscara del no retrato de Max Ernst.

Euclides tiene un contexto particular dentro de la abundante producción de Ernst. El lenguaje de la pintura (figuras con máscaras geométricas enigmáticas; fondos cuadriculados cuasi geométricos; una superficie pulida y técnicamente perfecta) aparece en otras obras suyas de la década de 1940, como *Leonardo da Vinci* y *Alberto Magno*. Se trata de no retratos igualmente enigmáticos de «grandes hombres» asociados con la razón y la racionalidad, tanto en sus aspectos más brillantes como en los más oscuros. La *Monja portuguesa* y el *Bebedor de cócteles*, entre otros, muestran rasgos parecidos. Estas obras tan controladas marcan lo que algunos han considerado una cima deliberada de excelencia técnica, de artesanía, en la producción de Ernst; aunque sin rostro y a veces sin cabeza (o con cabeza de animal), las apariciones eran un motivo habitual en su obra.

Que lo euclidiano y lo no euclidiano estaban presentes en la mente de Ernst durante estos años queda confirmado por el título *Joven intrigado por el vuelo de una mosca no euclidiana* (1942-1947), otra obra con un rostro triangular con apariencia de máscara, esta vez rodeado por las caóticas órbitas de la mosca del título, en realidad producidas por las oscilaciones elípticas de un bote de pintura goteando colgado sobre la tela. Esta técnica generaba resultados que se asemejaban a algo surgido de algún viejo libro de astronomía (como los *Fenómenos* euclidianos); con la misma técnica, pintó *Planeta desconcertado*. Ernst afirmaba que Jackson Pollock tomó la técnica del goteo de él, aunque no todos los historiadores del arte están convencidos de tal afirmación.

Tenemos una pintura ambivalente por completo. ¿Flores o pájaros? ¿Ramillete o pluma? ¿Hombre o mujer? El sombrero y la tela se pueden considerar como complementos femeninos, pero Euclides es un nombre masculino y el pez es un símbolo freudiano de masculinidad. ¿Fondo o primer plano? ¿Racional o irracional? ¿Figura humana o conjunto de objetos artificiales?

Por último, la máscara (o el velo) y la ropa femenina remiten a la vieja historia de Euclides de Mégara, durante mucho tiempo confundido con el geómetra, y que fue una víctima política igual que el mismo Ernst. Quizá el cuadro se refiere a este caso de identidad errónea; tal vez sea un cuadro de ambos Euclides en uno.

Diseños euclidianos

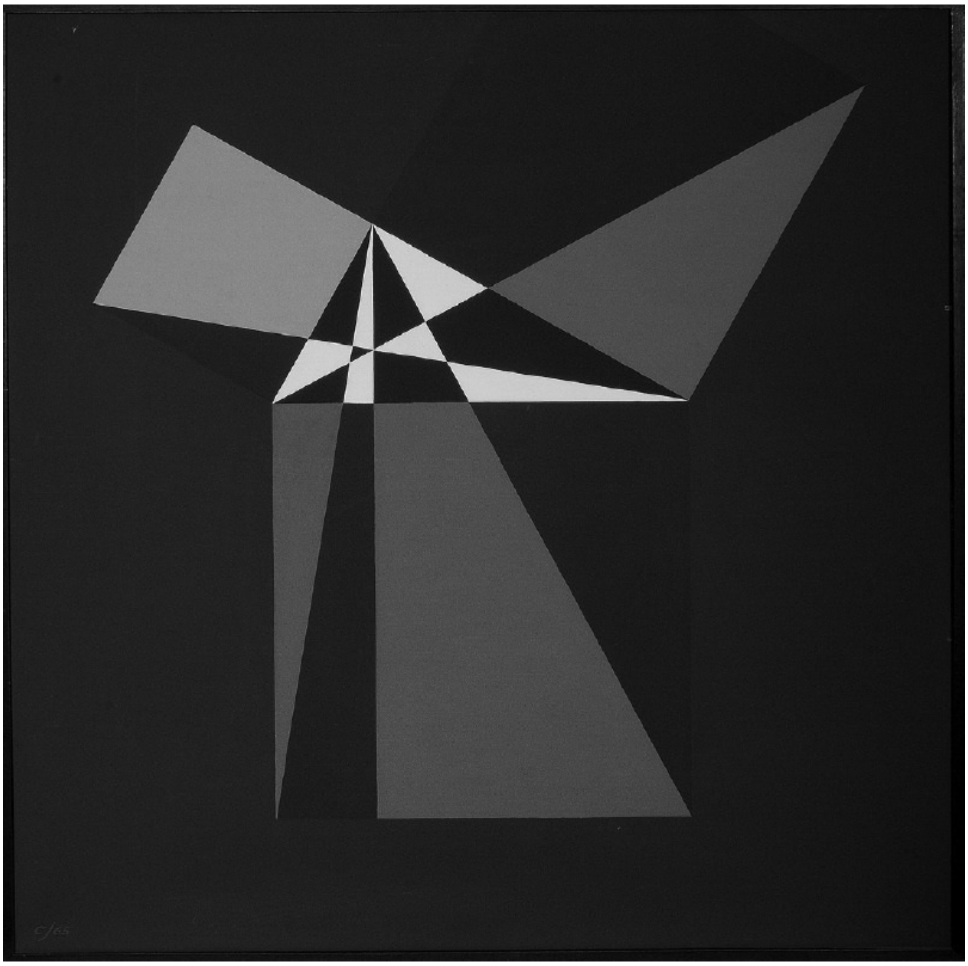
Un caricaturista retirado llena láminas de madera con diagramas pintados. Un informático entusiasta recrea *on line* un libro de texto del siglo XIX. Una sastre recibe el nombre de «Euclides de la moda». Una exiliada iraní llena hojas y hojas de papel con «variaciones sobre el hexágono». En el mundo del arte y el diseño modernos, Euclides está por todas partes y, a la vez, en ninguna.

El siglo XX ha visto gran cantidad de diseñadores, artistas, teóricos y críticos rindiendo tributo a la importancia estética de la forma geométrica. Líneas y ángulos rectos, círculos, triángulos y cuadrados convertidos una y otra vez en las formas del mundo moderno. Pero a pesar de todo esto, la relación explícita con Euclides resulta elusiva, difícil de reseguir y en muchos casos, ilusoria.

Crockett Jackson (1906-1975) tal vez sea quien ofrece el ejemplo más claro de geometría euclidiana reconvertida en arte. Caricaturista y escritor estadounidense, fue autor de conocidas y apreciadas tiras cómicas y de historias infantiles durante los años cuarenta y cincuenta del siglo pasado. Una década más tarde, cuando la reacción a sus libros empezaba a flaquear, inició una nueva carrera como pintor aficionado. En parte se inspiró en la arquitectura que había apreciado durante un viaje a Grecia y en parte por *The World of Mathematics*, una colección de ensayos de 1956 sobre la matemática y los matemáticos. Sus recursos eran poco convencionales: pintura de paredes y conglomerado de una ferretería local. Todas sus pinturas (de las que completó más de un centenar) se basaban en diagramas geométricos. Johnson no se calificaba de artista e insistía en que él «hacía diagramas».

Sus obras suelen ser de entre medio metro y un metro de lado, en las que copia un diagrama geométrico y luego colorea sus diferentes partes con distintos colores sólidos, de forma muy contrastada. Johnson no incluía etiquetas para las líneas y los puntos, pero aun así muchos de sus diagramas son reconocibles a partir de sus fuentes geométricas. Uno de los primeros que completó se basaba en el icónico diagrama del teorema de Pitágoras (la proposición 47 del primer libro de los *Elementos* de Euclides), con tres cuadrados alrededor de un triángulo. Con casi metro y medio de lado, es una de sus mayores composiciones y, de manera característica, rellenó partes diferentes con colores distintos. En un fondo marrón oscuro llenó fragmentos del triángulo con bloques de negro, amarillo, azul y rojo. Era un homenaje elocuente y completamente moderno a los valores estéticos que Crockett Johnson, como muchos otros, había hallado en la geometría euclidiana. Definió su pintura como «algo bastante imponente […] y también muy hermoso».

Johnson hizo veinticinco pinturas basadas en los diagramas de *The World of Mathematics* y luego pasó a otros libros de texto de geometría, con diagramas de matemáticos desde la antigua Grecia al siglo XX; tal como lo expresó él mismo, «una serie de tributos románticos a los grandes matemáticos geómetras a partir de Pitágoras». En sus obras posteriores se alejó un poco de sus fuentes y elaboró fantasías libres de formas geométricas, líneas y colores, aunque siempre se podía apreciar una base de diagramas geométricos concretos. En abril de 1967 se celebró una exposición de sus obras en Nueva York, bajo el título de «Abstracciones de abstracciones»; un crítico de arte reconoció en las obras «una cierta indiferencia distante» y añadió que «la pintura es una especie de estilo *Hard Edge* ligero pero vivaz en su conjunto».



Demostración del teorema de Pitágoras, de Crockett Johnson.

Sus pinturas geométricas llevaron a Johnson a interesarse por problemas geométricos. Halló una nueva aproximación geométrica para el valor de π y una nueva manera de construir un heptágono regular, ambos resultados publicados en la *Mathematical Gazette*. Sus exposiciones de 1970 y 1975 mostraron piezas artísticas basadas en este trabajo y también en enigmas geométricos clásicos, como construir un cuadrado y un círculo de la misma área o dividir un ángulo en tres partes iguales[8]. Johnson murió en 1975, y la mayor parte de su obra se puede ver actualmente en el Museo Nacional de Historia Americana de la Institución Smithsoniana; también pueden verse por Internet.

Siguiendo la misma onda (la geometría como arte) podemos considerar el reciente encumbramiento de la edición de los *Elementos* de Oliver Byrne. Byrne (1810-1880) fue un profesor irlandés de matemáticas, inventor de instrumentos científicos y autor de libros de matemáticas. Siempre falto de dinero, pasó buena parte de su vida en Londres, con un período en Nueva

York trabajando en un diccionario de ingeniería. Sus proyectos de reforma de la docencia en matemáticas no lograron convencer a sus contemporáneos y en una solicitud de apoyo económico escribió que «todos mis libros, invenciones y descubrimientos importantes solo me acarrean problemas».

Una de estas invenciones fue la «Enseñanza de la Geometría mediante diagramas en color», tal como lo bautizó en un panfleto editado a los veintiún años. Su idea, que se enmarca en el debate del siglo XIX sobre la enseñanza de la geometría y sus métodos, era sustituir el lenguaje tradicional de diagramas con letras por formas coloreadas, lo que según él facilitaría la adquisición y la memorización del conocimiento geométrico. «El uso de símbolos, signos y diagramas coloreados en la ciencia y las artes lineales hace que el proceso de razonamiento sea más preciso y los logros más ágiles». Como muchos otros entusiastas de Euclides, Byrne sin duda tenía una enorme capacidad de pensamiento visual y, al menos para él, un libro de geometría en colores resultaría «atractivo a la vista, el más sensible y exhaustivo de nuestros sentidos externos».

En su panfleto, aplicaba sus ideas al primer libro de los *Elementos*; en 1838 ya anunciaba los primeros seis libros en una edición en colores, a un coste de ocho chelines. No era fácil imprimir estos *Elementos* coloreados, y de hecho pasó toda una década antes de conseguirlo. En 1847 se publicó por fin *The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners* ('Los primeros seis libros de los *Elementos* de Euclides en que se usan diagramas en color en lugar de letras para mayor comodidad de los lectores'), al exorbitante precio de 1 libra y 5 chelines. Se imprimió en rojo, amarillo, azul y negro, cada color impreso a partir de una plancha independiente; es decir, cada hoja tenía que pasar bajo la imprenta cuatro veces y, en cada una, alinearse con suma precisión. El libro no logró encontrar muchos compradores y el impresor (un tal William Pickering, que tenía una cierta afición por proyectos caros y complejos) se declaró en bancarrota unos pocos años después. Byrne seguía promocionando el uso de colores en la enseñanza de geometría veinte años más tarde, pero en el revoltijo de nuevas versiones de los *Elementos* en la Gran Bretaña victoriana no parece haber gozado de especial preferencia por maestros o estudiantes.

Byrne negó tener motivación estética alguna: «No introduzco los colores con la intención de entretener ni divertir mediante ciertas combinaciones de tonalidades y formas, sino para ayudar a la mente en su búsqueda de la verdad, para aumentar la capacidad de instrucción y para difundir conocimiento permanente». Sin embargo, su libro se ha apreciado sobre todo como un logro estético. Se presentó en la Gran Exposición de Londres de 1851 a causa de su belleza y de la excelencia técnica de la impresión. En los años siguientes, siguió siendo mencionado de vez en cuando en trabajos sobre impresores victorianos, pero hacia el año 2000 alcanzó el estatus de un clásico, y de manera inesperada: se publicó *on line* un conjunto completo de fotografías de sus páginas, con comentarios elogiosos, mientras que otro entusiasta lo codificó en el lenguaje informático TeX para composición de textos (en inglés y ruso). Luego, el editor alemán Taschen publicó una versión facsímil en 2010.

En ese mismo año, el «diseñador, *data geek* y chiflado de los fractales» (en sus propias palabras) Nicholas Rougeux completó una obra maestra de la publicación *on line* al recrear el Euclides de Byrne en soporte web, interactivo, con todos sus colores, símbolos matemáticos inusuales y letras capitulares especialmente diseñadas. Esta vez, las formas no solo están coloreadas, sino que también se puede hacer clic en ellas e incluso se puede comprar un póster con los 269 diagramas de los libros I a VI de los *Elementos*. Y por si esto no fuera ya suficiente homenaje al Euclides de Byrne como arte, el editor Kronecker Wallis decidió en 2019 completar el libro de Byrne coloreando los trece libros de los *Elementos*.

No solo ha habido transformaciones directas de los *Elementos* de Euclides en objetos de arte; el mundo de los grandes y famosos diseñadores modernos también ha rozado, a veces tangencialmente, la geometría euclidiana, si bien la ruta desde el libro de texto hasta la obra de arte suele ser menos directa y menos evidente.

La colección de invierno de 1938-1939 de la diseñadora de moda Elsa Schiaparelli (1890-1973), titulada *Zodiac*, en ocasiones se considera que fue inspirada por los *Elementos* de Euclides. Schiaparelli era la sobrina del astrónomo Giovanni Schiaparelli (famoso por haber creído apreciar una red de canales artificiales en Marte a través de su telescopio) y fue la primera sastre en presentar colecciones completas con un tema conjunto. A partir de mediados de los años veinte del siglo pasado se estableció en París y *Zodiac* fue, junto con *Pagan*, *Circus* y *Commedia dell'Arte*, una de sus mejores y más imaginativas colecciones de moda. En 1934, la revista *Time* la situó por delante de Coco Chanel: «Más alocada y más original que la mayoría de sus contemporáneos, la señora Schiaparelli es a quien debe aplicarse más a menudo el apelativo de "genio"».

Los diseños teatrales, modernos y en ocasiones surrealistas de Schiaparelli tienen algo de geométrico, sin duda: una columna en el *New Yorker*, en 1932, valoraba «la modernidad bien poco europea de sus siluetas y su especial adecuación a un trasfondo de rascacielos cuadrados, de mecánica en la vida privada y de pasatiempos centrados en los artilugios». Los vestidos de *Zodiac* estaban estampados con motivos astrológicos y astronómicos que apuntaban más o menos en la misma dirección. El vínculo con Euclides, en concreto, parece remontarse a los esfuerzos de la agente publicitaria de Schiaparelli, Hortense MacDonald, a la hora de describir la colección *Zodiac* como un todo unificado. En su comentario, afirmaba que la colección se basaba en mediciones geométricas estrictas y mencionaba los *Elementos* de Euclides como fuente: las siluetas esbeltas y con anchos hombros y la cintura ligeramente elevada. Por desgracia, no está nada claro si la propia Schiaparelli expresó alguna vez este vínculo con Euclides o si ni tan solo lo sugirió.

Hay una historia parecida que hace referencia a la contemporánea y rival de Schiaparelli en París, la italiana Madeleine Vionnet (1876-1975). Inspirada por la forma natural del peplo griego, diseñó prendas cuya hechura solían ser formas geométricas simples: faldas cortadas en círculos completos, vestidos formados a partir de cuadrados (que colgaban en diagonal desde los hombros, formando rombos superpuestos) o un vestido hecho a partir de hexágonos de varios tamaños. Su trabajo se ha comparado con la disolución cubista del espacio pictórico y, seguramente a partir de su uso de formas simples, a veces se la calificó de «Euclides de la moda».

Una vez más, atisbamos a Euclides entre las sombras, transformado hasta casi resultar irreconocible. Es imposible afirmar si Vionnet hubiera reconocido la influencia de Euclides en su obra o si incluso la hubiese considerado irrelevante.

Otro ejemplo, igual de indirecto, pero con el mismo misterio, es el que nos ofrece Monir Shahroudy Farmanfarmaian (*c*. 1923-2019), superestrella del arte en Oriente Medio, que se describía a sí misma como «nada más que una persona con buen ojo que resulta que trabaja con espejos». Después de su infancia en Irán, la segunda guerra mundial echó al traste sus planes de estudiar en París, de modo que su formación se llevó a cabo en Teherán y en Nueva York. Después de trabajar como comercial e ilustradora de moda, decidió cambiar de rumbo durante un segundo período en Irán tras 1957. Al visitar el santuario Sah Cheragh en Shiraz, quedó entusiasmada con el salón espejado: espejos cortados en pequeños fragmentos y tajos y colocados como mosaicos sobre yeso. Era una artesanía tradicional iraní y Farmanfarmaian fue la primera artista moderna en reinventarla para el siglo XX.

Farmanfarmaian colaboró con artesanos para elaborar sus diseños, cortando espejos con las formas requeridas y creando pequeños motivos que formaban patrones para cubrir grandes espacios: «Haría primero un dibujo, luego una pequeña muestra de un motivo y luego pediría a Haji [artesano jefe

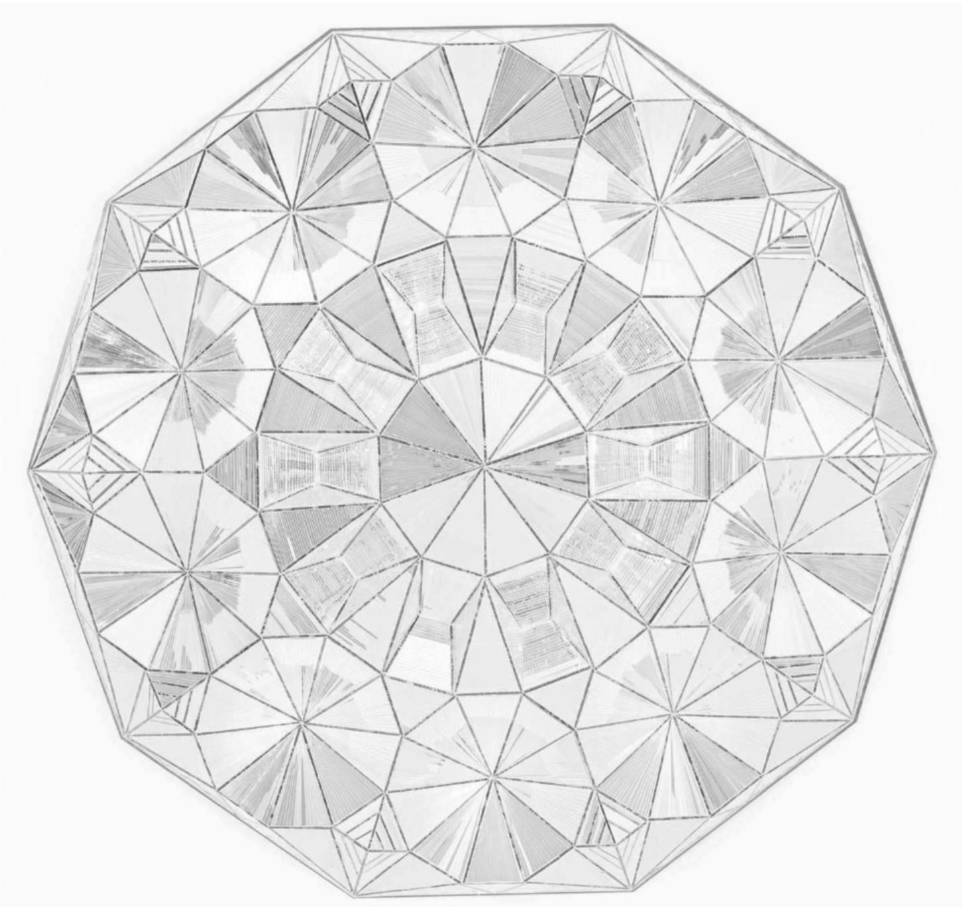
Haji Ostad Mohammed Navid] que cubriera con él una parte de la pared, desde una esquina hasta la otra. Agarraría su cuerda, la metería en polvo de carbón, la fijaría con el pulgar como si fuera un compás y determinaría todo lo necesario». En la década de 1970 tuvo cada vez más éxito, pero sus propiedades quedaron confiscadas en 1979, durante la Revolución Islámica (su marido tenía conexiones familiares con los sahs) y hasta 2004 vivió en Estados Unidos. Trabajaba sobre todo en papel, al no tener acceso a las técnicas tradicionales para proseguir sus obras con espejos y mosaicos.

Farmanfarmaian regresó a Irán en 2004, donde retomó los trabajos con artesanos y llevó sus mosaicos espejados a nuevos grados de complejidad. Las geometrías de relleno que empleaba se ampliaron hacia la tercera dimensión en forma de relieves o esculturas y más de un comentarista repitió su propio punto de vista de que esta reinvención de las formas geométricas y sus combinaciones parecían tener un potencial infinito. El trabajo de Farmanfarmaian se ha presentado en exposiciones por todo el mundo y en 2017 se inauguró un museo dedicado a su figura en Teherán.

Los característicos mosaicos geométricos, con pequeños motivos para organizar y rellenar el plano o el espacio, son un desarrollo, una reinvención de técnicas similares que se remontan a la Edad Media, cuando uno de los elementos que se empleaban en su concepción era el contacto entre artesanos y geómetras euclidianos, tal como el que documentó al-Buzjani. Farmanfarmaian mencionó entre sus fuentes de inspiración elementos persas, iranís y, sobre todo, sufís. Sobre sus inicios en este estilo artístico escribió:

> Pregunté a mi maestro artesano, que había realizado obras espejadas para mezquitas y santuarios, cómo sabía la manera en que tenía que combinar los motivos. Él fue quien me dijo, hace mucho tiempo, que todo es geometría. Trazó un hexágono y lo dividió en piezas, luego me mostró cómo estas podían combinarse en formas de muchos tipos. Tenía que aprender acerca de todo esto; me fui a Londres y compré un montón de libros sobre geometría y luego contraté a una persona para que me enseñara álgebra.

¿Eran los *Elementos* de Euclides uno de estos libros? No sería ninguna sorpresa; e incluso si no estaba entre ellos, parece claro que la geometría de Euclides es uno de los ancestros más antiguos de la obra inconfundible de Farmanfarmaian. Ahora bien, no son en absoluto el único antecesor, ni el más importante, en una mezcla que incorpora la larga tradición islámica de diseños geométricos y la experiencia de los artesanos con los que trabajó a partir de 1970. Farmanfarmaian subrayaba el papel de la espontaneidad y de la intuición en sus diseños: «No se trata de un proceso muy intelectual».


Decágono, de Monir Farmanfarmaian.

Lambda

Espacio curvo y energía oscura

Diciembre de 2022. Punto de Lagrange L2, a 1,5 millones de kilómetros de la Tierra. Un satélite flota siguiendo una lenta danza, en sincronía (o casi) con la Tierra y el Sol.

Recoge luz de galaxias lejanas, que se refleja por un conjunto de espejos (tres curvos, tres planos), pasa por un filtro y, por fin, llega a sus dos instrumentos. La misión del satélite es cartografiar la geometría del universo lejano y estudiar las propiedades de la energía oscura que determina su ritmo de expansión.

¿Su nombre? *Euclid*.

Durante el siglo XX, Euclides (el libro, el hombre) se convirtió en un icono cultural, un nombre que se celebraba y homenajeaba y un metamorfo, capaz de aparecer en incontables reinvenciones y reutilizaciones, incluso a pesar de que sus logros concretos parecían ir perdiendo relevancia directa y buena parte de su visibilidad. Los *Elementos* se enseñaban cada vez en menos institutos y universidades; la geometría euclidiana, en la forma en que Euclides la podría reconocer, ya no era un tema de investigación para los matemáticos profesionales. Su *quod erat demostrandum* y su abreviación QED se habían ido sustituyendo por el símbolo de fin de demostración, supuestamente menos agresivo, $\blacksquare$, llamado también *tombstone* (‘lápida’) por los tipógrafos anglosajones. Pero Euclides seguía siendo un nombre, en historias de la geometría, en descripciones de estructuras físicas o mentales como euclidianas o no euclidianas.

Los *Elementos* obtuvieron una nueva relevancia como uno de los grandes libros en los programas de artes liberales, y la geometría de estilo euclidiano continuó siendo popular en libros y artículos para el lector general y en competiciones matemáticas, donde su aparente universalidad, su accesibilidad y su independencia respecto a notaciones o técnicas especiales lo convirtieron en una especie de igualador. Desde sus inicios en 1959, la Olimpiada Internacional de Matemática incluye por lo menos un problema de geometría euclidiana (a menudo más) en su prueba final de cada año.

Para los historiadores, el personaje de Euclides seguía siendo desesperadamente esquivo, con biografías que apenas llenaban más de unas pocas líneas y cuya existencia se cuestionaba periódicamente. Tal vez por esta razón ha habido muy pocos relatos de ficción de su vida y su época, a pesar de las modas ocasionales de novelas sobre grandes científicos y pensadores. Una excepción fue una desternillante parodia de 1922 titulada *Euclid's Outline of Sex* ('El diagrama sexual de Euclides'); con el subtítulo de *Un estudio freudiano*, se burlaba de la moda de las reinterpretaciones freudianas de personajes famosos, inventando una infancia de Euclides dominada por los clanes enfrentados de los Delta Ípsilon y los Fi Beta Kapa, un «complejo de abuela»: en resumen, «Euclides, para decirlo sin rodeos, apesta a sexo». Otra fue la novela de 2002 titulada *Le bâton d'Euclide* ('La vara de Euclides'), que presentaba una versión de la historia de la biblioteca de Alejandría, empezando con Euclides y prosiguiendo con todos los herederos de la vara que empleaba en sus clases.

Euclides ha continuado siendo un nombre, un nombre de pila. En la carrera St. Leger Stakes de 1839 corrió un caballo llamado *Euclides*. Un carguero británico llamado *Euclid*, construido en 1866, se hundió en 1890 frente a la costa del condado de Durham a causa de una colisión. Durante los años cincuenta del siglo XX, el fabricante de material de construcción Blackwood Hodge comercializó un modelo de tractor y traílla llamado Euclides y recibió apelativos como «masoquista», «Euclides el pionero» o «conquistador»; en su punto álgido de popularidad, estos tractores se podían encontrar trabajando en más de setenta y cinco países, ofreciendo «alta velocidad, mayor carga y más beneficios».

Hay calles, pueblos, escuelas, periódicos y tipos de letra que llevan el nombre de Euclides. El apogeo de bautizar cosas con este nombre parece haberse producido a finales del siglo XIX, cuando en Estados Unidos aparecieron varias avenidas Euclides, con ejemplos en Cleveland, Brooklyn y San Francisco. En algunos lugares y momentos también ha sido un nombre más o menos popular para bautizar a personas, aunque si hay algún patrón en esta moda, sus causas son elusivas; hubo muchos Euclides durante el siglo XIX, sobre todo en Norteamérica y Sudamérica, bastantes menos en Europa, y en el siglo XX todavía menos.

¿Y qué pasa con *Euclid*, el satélite? En los años veinte del siglo pasado, Edwin Hubble y otros astrónomos se dieron cuenta de que la luz de las galaxias lejanas era más roja de lo que debería, como si las galaxias estuvieran alejándose de nosotros o el espacio intermedio estuviera creciendo. Los astrónomos llegaron a la conclusión de que el universo se estaba expandiendo, y durante la mayor parte del siglo XX se estimó que la relación era lineal, es decir, que una galaxia situada el doble de lejos se aleja el doble de rápido. Dicho de otro modo, el universo se estaba expandiendo a un ritmo constante, más o menos.

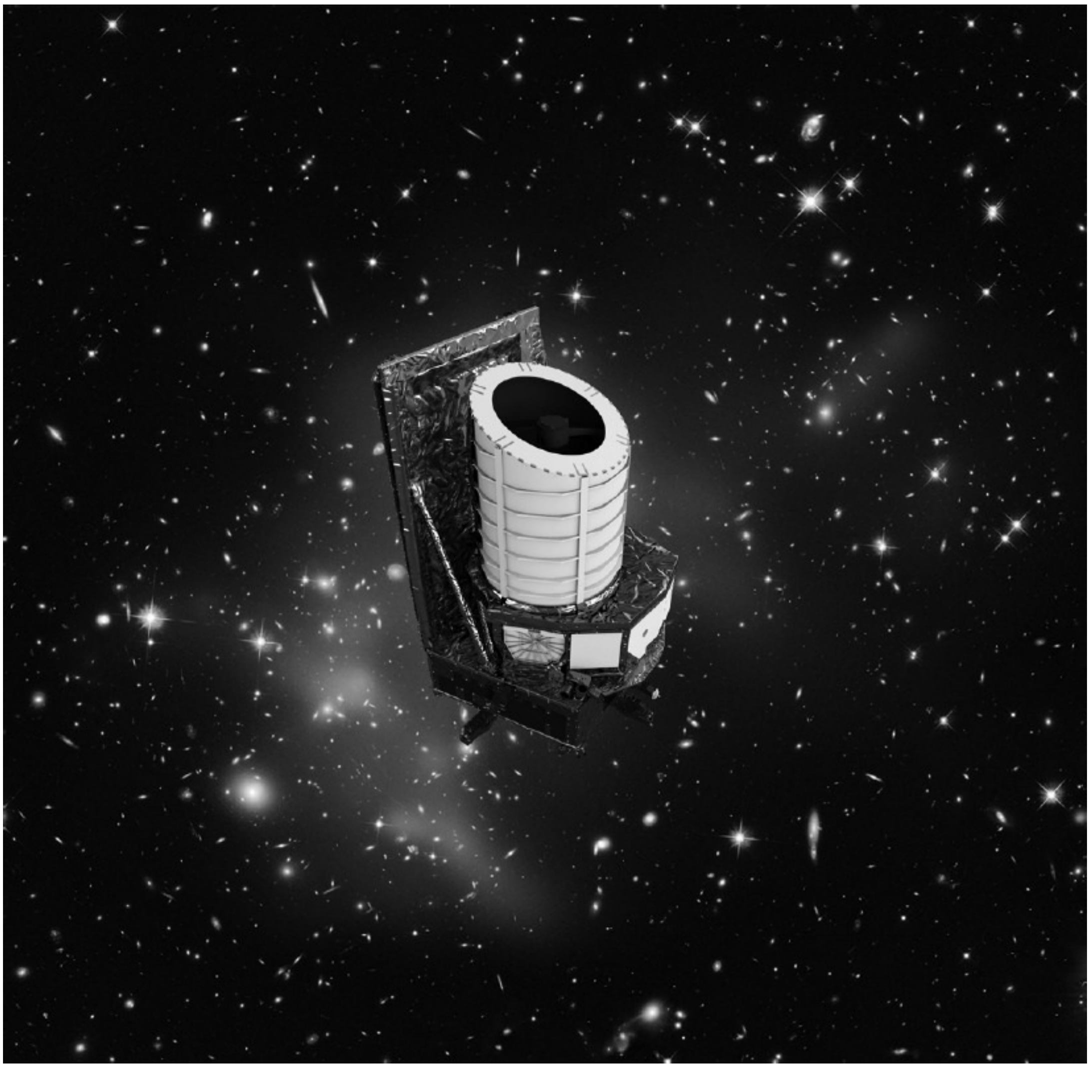
Sin embargo, en 1998, diversos estudios de supernovas (algunos tipos tienen una luminosidad constante y, por lo tanto, resulta comparativamente sencillo determinar su distancia) modificaron esta imagen. Con los nuevos y mejores datos ahora parecía que la velocidad de expansión era menor en el pasado; es decir, que la expansión del universo se estaba acelerando. ¿Qué podía ser lo que impulsaba esta expansión cada vez más rápida del universo? A falta de un nombre mejor, los físicos bautizaron este «lo que sea que impulsa la aceleración» como *energía oscura*.

Además de impulsar la aceleración en la expansión del universo, la energía oscura tiene otro papel. Resulta que la estructura del espacio a las escalas más grandes es, quizá inesperadamente, euclidiana. No es curva, no es no euclidiana y compleja como la de Lobachevski o Riemann, sino plana o casi plana. Hay arrugas y curvaturas allí donde hay masas, pero la imagen global es euclidiana. Y resulta que para ser plano, el universo debe contener una cierta cantidad de masa que lo mantenga aplanado, por así decirlo. Pero la materia que podemos observar y la materia oscura que podemos inferir a partir de las observaciones gravitacionales de las galaxias solo llega a poco más de un cuarto de toda la masa necesaria. El resto, es decir, casi tres cuartas partes de toda la masa del universo, es la energía oscura.

Para que la energía oscura sea más que un subterfugio, una manera de escapar del problema, tiene que poseer propiedades concretas, las cuales necesitan observaciones específicas. La energía oscura permea todo el espacio, pero con una densidad muy baja; ejerce una influencia gravitatoria, pero es muy poco probable detectarla en un laboratorio en la Tierra; de hecho, podemos verla como la «masa» del espacio vacío. ¿Es una presencia constante en todo el espacio vacío en todo momento?, ¿o la aceleración observada en la expansión del universo requiere un modelo más complejo, una energía oscura que varía en función del espacio y del tiempo? En el primer caso, la energía oscura implicaría una modificación mínima de nuestra comprensión actual de la gravedad: la variable Λ (lambda) que Einstein añadió a sus ecuaciones y luego eliminó por considerarla un error innecesario. Si lo correcto es el segundo caso, entonces o bien la física fundamental o bien la relatividad general (o acaso ambas) necesitarían modificaciones más radicales para ajustarse al nuevo y omnipresente campo de energía oscura.

Y aquí es donde el satélite *Euclid* entra en escena, pues su propósito es ayudar a esclarecer la respuesta a esta y otras cuestiones relacionadas. En 2007, la Agencia Espacial Europea (ESA) lanzó una petición de propuestas para misiones y dos de las que se recibieron estaban centradas en determinar la geometría del universo lejano: la *Dark Universe Explorer* ('Explorador del universo oscuro') y la *Spectroscopic All Sky Cosmic Explorer* ('Explorador espectroscópico cósmico global'). *Euclid* es el resultado de combinar ambas propuestas, aprobado por la ESA en 2011-2012 y desarrollado a lo largo de varios años de especificaciones y revisiones. El material empezó a entregarse en 2017, pero un problema con la electrónica de uno de los detectores atrasó el lanzamiento unos años. Mientras tanto, se ha establecido un consorcio con laboratorios y agencias de quince países para gestionar el proyecto y planificar el tratamiento de las ingentes cantidades de datos que generará la misión.

Si todo va según lo previsto, la sonda *Euclid*, de un par de toneladas de peso, se alzará del centro espacial de la ESA en la Guayana Francesa entre junio y diciembre de 2022. Tras unos treinta días de viaje, se estabilizará alrededor del punto de Lagrange L2, orbitando el Sol a la misma velocidad angular que la Tierra pero unos tres millones de kilómetros más lejos. Ahí permanecerá durante los seis años de su misión, con una visión clara del espacio profundo, alejado de las fuentes de luz y calor y de las perturbaciones magnéticas y gravitatorias de la Tierra y la Luna. Un espejo curvo de poco más de un metro (uno de los más precisos nunca construidos) recogerá la luz de galaxias lejanas y la enviará hacia dos instrumentos: una cámara de luz visible y una de infrarrojos. Las imágenes llegarán a la Tierra en forma de señales de radio; unos cien gigabytes cada día.



La sonda *Euclid*.

Las imágenes en luz visible, de alta resolución, servirán para determinar cómo se distorsionan las imágenes de mil millones de galaxias lejanas a causa de la masa de objetos más cercanos, lo que permitirá a los científicos elaborar un nuevo mapa de la distribución de masas del universo. Las imágenes infrarrojas se emplearán para estudiar los espectros de decenas de millones de galaxias lejanas y determinar así sus velocidades y distancias, mejorando los resultados de 1998 sobre la evolución de la expansión cósmica. Un millón de espectros se medirán con más precisión todavía, en concordancia con observaciones desde la superficie terrestre, para estudiar los típicos cúmulos a gran escala de galaxias lejanas, estructuras que son una especie de registro congelado de las ondas de densidad en el plasma primordial que precedió a la formación de las galaxias. Todo ello ayudará a comprender las propiedades y los efectos (tal vez cambiantes) de la energía oscura en el universo en expansión, así como la geometría (euclidiana o no) del espacio a sus escalas más grandes.

Epílogo

La historia de los *Elementos* de Euclides es una historia sobre lo que pueden ser las ideas y lo que pueden hacer, y sobre cuánto puede viajar, cambiar y prosperar un libro. Es una historia sobre las matemáticas y su lugar en las vidas y las mentes de personas de muchas culturas. Es la historia de un libro de geometría nacido en el norte de África y que ha influido en el mundo durante dos mil trescientos años.

Este libro ha tenido un periplo extraordinario. Ha encontrado lectores por todo el mundo, que han hallado y realizado cosas con él, y sobre él, que les resultaban significativas. A lo largo del tiempo, la austeridad del texto ha permitido que la gente encontrara en él todo lo que necesitaban. Para algunos, Euclides era el gran autor de un gran libro, una obra clásica de la literatura griega; para otros, era un filósofo cuya obra podía guiar a los lectores por los misterios del conocimiento y la existencia; para otros, era un héroe de la vida práctica que podía enseñarnos cómo diseñar una catedral o pintar un cuadro.

Con las presiones del mundo de la Ilustración, Euclides, como muchos otros autores y figuras de autoridad de la Antigüedad, empezó a verse con sospecha y sus virtudes tradicionales se desmoronaron. Luego, sin embargo, recuperó parte de su estatus, pues pasó a verse como una forma cambiante capaz de amoldarse a casi cualquier cosa y su maleabilidad se convirtió en una nueva virtud. Si bien el siglo XX, y de momento también el XXI, ha presenciado un cierto eclipse de su libro (se sospecha de él, se recela de él, se deja de usar), también ha visto un nuevo interés por aceptar sus ambigüedades e incertezas: se ha jugado con él y se ha dejado que juegue con sus lectores.

Nadie puede prever lo que sucederá con los *Elementos* de Euclides en el futuro, pues las culturas cambian sin cesar. Ahora bien, el libro parece adaptable como pocos, con más ideas que las que se pueden ocultar tras una máscara cualquiera, tal vez idealmente adecuado al mundo fluido y fragmentado de la era de la información. No cuesta imaginarlo saltando hacia el futuro, nunca comprendido del todo por las culturas con las que entra en contacto. Sin duda, seguirá viviendo sus incontables vidas; antiguo y nuevo, sabio y útil, complicado y juguetón y siempre ligerísimamente inasequible.

Agradecimientos

Es todo un honor reconocer la ayuda de todos aquellos que han contribuido al largo proceso que ha llevado este libro de una idea a un objeto. Victoria Kwee y Caroline Davidson aportaron muchas horas e ideas a la redacción de las primeras versiones de la propuesta. Años después, Arabella Pike creyó en el libro con las mínimas pruebas y Felicity Bryan lo guio por todo el proceso de encargo. Mil gracias a Arabella y a todo el equipo de William Collins que ha trabajado en el libro.

Quiero dar unas gracias especiales a Yelda Nasifoglu y a Philip Beeley, que trabajaron conmigo durante dos años en el proyecto «Euclides en la Gran Bretaña de la Edad Moderna»; parte de la investigación realizada, y algunas de sus ideas, han acabado incorporadas en este libro. Los participantes de nuestros dos talleres de 2016 y 2017 han contribuido más de lo que son conscientes para dar forma a mis ideas sobre Euclides y sus *Elementos*, así como todos aquellos del History of Mathematics Forum y el seminario de historia de las ciencias exactas de Oxford durante su larga gestación. Estoy especialmente agradecido a Richard Lawrence de la Oxford Bibliographical Press por la oportunidad de componer e imprimir a mano una página de los *Elementos*.

Gracias también al Arts and Humanities Research Council por apoyar nuestro proyecto de investigación, y al All Souls College por su apoyo a mi trabajo durante tantos años. Estoy muy agradecido al personal de la Biblioteca Bodleiana y, especialmente a su Sala de Lectura de Manuscritos y Libros Raros por su ayuda con diversas oscuras peticiones. Anna-Marie Roos y Chris Hollings tuvieron la amabilidad de leer el libro mecanografiado, lo que me ha salvado de varios gazapos y me ha permitido mejorarlo de muchas maneras. Los fallos que aún tenga el libro son solo responsabilidad mía, claro está.

Por lo que respecta a mi familia, Jessica, William, Ralph y Laurence me han permitido conservar mi sano juicio y mis padres, como siempre, han leído los manuscritos con entusiasmo e interés.

Comentarios sobre las fuentes

A continuación presento indicaciones sobre mis principales fuentes de información para cada capítulo, con el origen de las citas directas si estas no se especifican en el propio texto. No listo las fuentes suplementarias o secundarias exhaustivamente, y tampoco menciono las ediciones de obras de autores bien conocidos[9].

Abreviaturas

BNP: Cancik, Hubert, *et al.* (eds.), *Brill's New Pauly*, Leiden, 2012.
DSB: Gillispie, Charles Coulston, *et al.* (eds.), *Complete Dictionary of Scientific Biography*, Detroit, 2008.
EE: Euclides, *Elementos*.
OCD: Hornblower, Simon y Spawforth, Anthony, *Oxford Classical Dictionary*, Oxford, 2005 (3.ª edición).

Alejandría

El encuentro de Euclides con Ptolomeo aparece en los *Comentarios al primer libro de los Elementos* de Proclo, 55-56; la versión sobre Menecmo y Alejandro, así como la historia de los tres óbolos, aparece en las *Églogas* de Estobeo.

Ptolomeo se comenta en Ellis (1994) y en Holbl (2001) y Green (2008). Sobre Alejandría, me he basado, entre otras, en las obras de Marlowe (1971), Fraser (1972), Haas (1997), Erskine (2003; pág. 483 para «riquezas, escuelas de lucha», procedente del primer mimiambo de Herodas) y Hirst y Silk (2004). Sobre la Biblioteca y el Museo, véase también El-Abbadi (1990), Blum (1991) y MacLeod (2002; pág. 62 para «ratas de biblioteca bien alimentadas», procedente de *El banquete de los eruditos* de Ateneo de Náucratis, 22d). Las citas de Cicerón son de *Sobre la naturaleza de los dioses*, 2, y las *Disputaciones tusculanas*, 5.23.

Acerca de la ciencia griega, véase Tupin y Rigll (2002) y Lloyd (1973). La matemática griega, con los EE y su redacción, se discuten en Cuomo (2001) y también en obras de Netz (1997, 1999, 2002, 2004); sobre la geometría como juego, véase también Asper (2009). El trazado de un triángulo equilátero es una paráfrasis libre de la primera proposición de *Elementos* I; la referencia al asno procede del *Comentario* de Proclo.

La menor discusión breve de la vida y las fechas de Euclides se halla en Fraser (1972; vol. 2, pág. 563); Heath (1926) también recoge los testimonios conservados y anécdotas posteriores. DSB, OCD y BNP tienen diversas opiniones sobre el grado de fiabilidad de los escasos datos biográficos. Un relato lúcido de las otras obras de Euclides aparece en la introducción (de Maurice Caveing) a Vitrac (1990).

Elefantina

Los papiros, sus características y su durabilidad, así como los problemas en la interpretación de fragmentos se comentan en Černy (1952), Turner (1968), Lewis (1974; la historia del conservador de Berlín se halla en la pág. 58) y Erskine (2003); otros detalles proceden de Roberts y Skeat (1983), Turner (1987), Netz (2002b), Rowlandson y Harker (2004) y Meskens (2010).

Los óstracos y el ostracismo son motivo de interesantes artículos en BNP y OCD; Fowler (1999) tiene una lista útil de fragmentos tempranos de los EE (págs. 210-216), como también Netz (1998, pág. 274); véase también Stamates (1969, vol. 1, págs. 187-188). Los aspectos más generales de la primera difusión de los textos y su audiencia se recogen en Lemerle (1986) y BNP, y en referencia a las matemáticas en Netz (1997) y Cuomo (2001). Los óstracos que comento procedentes de Elefantina (P. 11999 en el Berliner Papyrusdatenbank) están publicados en Mau y Muller (1960); sus particularidades se comentan asimismo en Fraser (1972, vol. 2, pág. 558, n.º 43), Fowler (1999) y Cuomo (2001). En BNP y OCD y en Porten (1996) hay información adicional sobre Elefantina; también he usado Lewis (1986, págs. 21-24) para las guarniciones helenísticas.

Hipsicles

La confiscación de libros por Ptolomeo Evergetes se describe en el *Commentarium in Hippocratis Epidemiai* de Galeno, 3239-240. Para el Desarrollo de la matemática griega durante este período sigo básicamente las interpretaciones de Netz (sobre todo 2008); véase también Cuomo (2001). Además de las obras de matemáticas mencionadas en el texto, para detalles más concretos véase Pfeiffer (1968, págs. 152-156), DSB, Bulmer-Thomas (1973), Lloyd (1973), Macleod (2002, pág. 6), Acerbi (2003) y Horowitz (2005).

Para Hipsicles, aparte de OCD, DSB y BNP, todas las demás discusiones quedan hoy en día superadas por Vitrac y Djebbar (2011), de los cuales sigo su descripción sobre la composición de lo que ahora es el libro XIV de los *Elementos*.

Teón de Alejandría

Acerca de la evolución de Alejandría, véase Marlowe (1971), Bagnall (1995) y Haas (1997), con información procedente de Ellis (1994) y Green (2008). Sobre la Biblioteca y el Museo, en concreto, véase Butler (1978), El-Abbadi (1990), Blum (1991), Cameron (1993), MacLeod (2002) y Hirst y Silk (2004). EL carácter físico de la práctica de los escribas en este período se comenta en Turner (1987, págs. 4-7). Estas fuentes (y OCD y BNP) presentan varios puntos de vista sobre los episodios de destrucción a partir del siglo II a. C. y hasta el IV d. C.; sobre la absurda leyenda que culpa a la conquista árabe del siglo VII de la destrucción de la Biblioteca, basta con consultar la exhaustiva presentación de Butler (1978, págs. 401-426).

La tradición filológica de este período se comenta en Pfeiffer (1968) y, sobre todo, en Blum (1991); también en Reynolds y Wilson (1968/2013) y Olmos (2012). La tradición de comentarios euclidianos (sobre los cuales véase también el capítulo sobre Proclo de este libro) se comenta en Heath (1926), Knorr (1989, 1996), Russo (1998), Cuomo (2001), Vitrac (2001, 2004), Acerbi (2003), Netz (2012), Keyser e Irby (2008) y Chemla (2012, prólogo). Estas fuentes, sobre todo las de Knorr y Vitrac, también comentan lo que se puede llegar a saber de la edición de Teón de los EE. Como afirma Vitrac (2006) en referencia a los testimonios árabes, «todavía no ha llegado el momento de la síntesis y la certeza».

Acerca de Teón, además de BNP, DSB, Keyser e Irby (2008) y OCD (del cual las «refundiciones triviales» y «carente por completo de originalidad»), véase Wilson (1983, pág. 42), Cameron (1993) y Dzielska (1995); este último es, con diferencia, el trabajo más útil sobre la siempre mal representada Hipatia; parte de la discusión también aparece en Knorr (1989). «Hemos demostrado» es del comentario de Teón al *Almagesto* (I, 10); «matemáticamente banales» procede de Muller en Pepin y Saffrey (1987).

Esteban el escriba

Sobre el mundo bizantino, y la transmisión y los currículos, véase Irigoin (1962), Reynolds y Wilson (1968/2013), Wilson (1983), Lemerle (1986), Haas (1997) y los ensayos de Ward y Lieu en MacLeod (2002). La imagen del mundo reducido a una sola ciudad es de Netz (1997, pág. 15). Sobre las siete artes liberales, véase también Pfeiffer (1968, pág. 52) y sobre los EE en este contexto véase BNP.

Sobre la transmisión de los EE en esta época, véase DSB, Heath (1926, la transmisión incorrecta por los escribas se menciona en el vol. 2, pág. 109) y Acerbi (2003); sigo básicamente el punto de vista de Vitrac (2010, 2012; también 2003, 2004, 2006) sobre la sustitución y acumulación (en general posterior) de alternativas al texto euclidiano, así como la relación de este con el de la transliteración; véase el capítulo sobre François Peyrard para otras incertezas sobre la historia del texto. El espurio libro XV se comenta en Vitrac y Djebbar (2012) y en Heath (1926).

Además de Irigoin (1962), Reynolds y Wilson (1968/2013), Wilson (1983) y Lemerle (1986), Aretas se discute en la introducción a Westerink (1968). La cita sobre su fuente de Marco Aurelio se halla en Montanari *et al.* (2014, pág. 343), que también contiene una útil discusión sobre sus escolios. Esteban se comenta en Aletta (2004), como también su manuscrito de Euclides; otras descripciones del manuscrito, con la identificación de las diversas manos anotadoras y transcripción de parte de las notas, se hallan en Madan (1897, vol. 4, pág. 104), Heath (1926, vol. 1, pág. 47), Weitzmann (1947, pág. 120 con lámina 107), Wilson (1983, pág. 121) y Lemerle (1986, pág. 260; véase también pág. 197). Los misteriosos numerales arábigos en estas anotaciones se comentan en Wilson (págs. 400-404). Murdoch (1966) contiene una sugerencia sobre la historia posterior del manuscrito que no ha tenido mucha aceptación. Hunt (1975) discute la historia de la colección D'Orville (véase págs. VII y 35), así como Vioque 2017. Sobre D'Orville véase Van der Aa (1852) y Madan (1897, vol. 4, pág. 37). El famoso manuscrito euclidiano también se menciona en un total de cuatro cartas en *Early Modern Letters Online* (emlo.bodleian.ox.ac.uk), de una de las cuales (Antonio Francesco Gori a Jacques Philippe d'Orville, 5 de noviembre de 1748) deduzco su probable fecha de adquisición.

AL-HAYYAY

Sobre la historia del Islam en esta época, he encontrado útiles Lassner (1980), Kennedy (1981) y Robinson (2010); sobre Bagdad en concreto, Lassner (1970, pág. 108 para «en todo el mundo», citando a al-Jatib) y Kennedy (2005, pág. 200 para «Vi al califa», palabras del gramático y crítico literario Tha'lab). El movimiento de traducción se estudia con más detalle en

Rosenthal (1975), Endress (1997), Gutas (1998, pág. 32), Abattouy (2001) y Giliot (2012).

La transmisión de los EE al mundo islámico es el tema de una cantidad considerable de estudios, como muchas obras de Djebbar (como 1996, 2003), De Young (1984, 1992, 2002/3, 2004, 2008a, 2008b) y Brentjes (por ejemplo, 1993, 2006, 2008). Véase también Lo Bello (2003), Berggren y Van Brummelen (2005) y Elior (2018). Sobre la matemática islámica y la geometría euclidiana en general, Knorr (1983), Berggren (1986), Hogendijk (1993) y De Young (2002, 2009). Los manuscritos se listan en Lo Bello (2003). Los nombres de las proposiciones euclidianas y su origen se comentan en Kunitzsch (1993), que supera el estudio de Heath (1926).

Adelardo

Las publicaciones sobre Euclides en latín son abundantes, pero los estudios básicos de Haskins (1924, 1927) sobre los traductores del siglo XII siguen siendo útiles; véase Alverny (1994, cap. II para algunas revisiones). Los estudios recogidos en Folkerts (2003 y 2006) resumen buena parte de lo que se conoce, mientras que el relato definitivo sobre muchas cuestiones se puede hallar en las ediciones críticas de Busard (1977, 1983, 1984, 1992, 1996, 2001, 2005). Busard 2005 (págs. 1-40) parece ser el mejor resumen sobre lo que sabemos de los Euclides latinos.

Acerca del bilingüismo romano, Marrou (1948) resulta útil; también Lemerle (1986) y Reynolds y Wilson (1968/2013) sobre su declive. Sobre Adelardo, Burnett (1987) es el recurso más valioso («nada en la vida de Adelardo» procede de Gibson en esta obra, pág. 13); Haskins (1927, págs. 20-42) es un recurso también interesante; véase asimismo Burnett (1993), Alverny (1994) y Mantas-España (2014).

Erhard Ratdolt

Sobre la práctica de los primeros impresores de la Edad Moderna, estoy en deuda con Richard Lawrence de la Bibliographic Press en Oxford por sus demostraciones prácticas. Sobre la vida de Ratdolt, el estudio clásico de Redgrave (1894) sigue siendo de utilidad; véase también Diehl (1933), Nordqvist (1961, esp. 40-47 sobre la edición de Euclides) y Risk (1982). Sobre el impacto de la imprenta en general, he utilizado Febvre y Martin (1958/1976), Pfeiffer (1976), Reynolds y Wilson (1968/2013), Chartier (1985), Grafton (1997) y Raven (2015). La impresión del Euclides de Ratdolt se comenta en detalle en Baldasso (2009 y 2013), aunque el punto de vista de

Baldasso sobre la impresión de diagramas no ha tenido aceptación universal; véase Nasifoglu (2020) para una discusión adicional.

Sobre las primeras ediciones de Euclides en general, véase Thomas-Stanford (1926), Steck (1981) y Wardhaugh (2020b).

Marget Seymer de su puño y letra

Sobre las anotaciones euclidianas he utilizado la información recogida en el proyecto *Reading Euclid* (readingeuclid.org); estoy en deuda con Yelda Nasifoglu por hallar e informar de la firma de Marget Seymer en la Biblioteca Nacional de Gales. «Diversas adiciones» procede de la portada de Billingsley (1570). Las publicaciones relevantes sobre anotaciones matemáticas y euclidianas son Wardhaugh (2015, 2019a, 2019b) y otros ensayos en Beeley, Nasifoglu y Wardhaugh (2020). Sobre el fenómeno más general de las anotaciones en la Edad Moderna, Jackson (2001) es una guía indispensable. La firma de Sandie Hume aparece en la Radcliffe Science Library, signo de estante 1831 e.4.

Edward Bernard

La fuente básica sobre la vida de Bernard es Smith (1704); el artículo en Matthew y Harrison (2004) resulta útil. La única discusión sustancial de su Euclides es Beeley (2020), en el cual se basa este capítulo, junto con un examen de varias copias de los *Elementos* propiedad de Bernard y anotadas por él y su círculo, ahora en la Biblioteca Bodleiana. «En esta época degenerada» y «dejar de lado cualquier idea de imprimir tu Euclides» procede de las cartas de Thomas Smith a Edward Bernard, fechadas el 13 de noviembre de 1694 y el 30 de abril de 1695 en Oxford (Biblioteca Bodleiana, MS Smith 57); la cita «se encargaría de la geometría y el razonamiento» es de un memorando de 1698 de Henry Aldrich y otros en MS Ballard 49, fol. 228r. El volumen políglota descrito en el texto lleva el signo de estante Auct. S.1.14,15.

La obra matemática de Gregory se comenta en Eagles 1977 y el prefacio a su edición de 1703 de las obras de Euclides resulta muy útil. Una discusión más general de los aspectos textuales se halla en Pfeiffer (1976), Reynolds y Wilson (1968/2013), Grafton (1991, 1997), Eisenstein (2005) y Maclean (2012). El «cuerpo perfecto» procede de Savile (1621, pág. 140), sobre el cual, véase también Goulding (2010).

PLATÓN

Acerca de la geometría y su posición cultural en la antigua Grecia, véase Netz (1999, 2004, 2008 y, sobre todo, 2012), donde comenta el fragmento de *Menón* 82ff en (2003). Más breve pero muy útil es Cuomo (2001); los relatos más antiguos de Heath (1921 y 1949) deben utilizarse con ciertas precauciones, hoy en día. Otras reconstrucciones de las matemáticas antes de Euclides (a veces muy divergentes) son Sachs (1917), Becker (1936), Szabo (1978), Neuenschwander (1973, 1974), Knorr (1975), Artmann (1991) y Fowler (1999). Estudios más recientes sobre el tema son los de Unguru (1975), Zhmud (2002) y Corry (2013).

La historia sobre Euclides de Mégara procede de las *Noches Áticas* de Aulo Gelio, 7.10. Sobre la filosofización de Euclides, he utilizado sobre todo Zhmud (1998 y 2002). «Que no entre nadie en nuestras escuelas que no esté versado» procede de al-Qifti, Ta'rikh al-Hukama, citado en Heath (1926, vol. 1, pág. 4); «el método persuasivo de Platón» procede del *Comentario* de Proclo.

PROCLO DIÁDOCO

La fuente principal para la vida de Proclo es la biografía/hagiografía de su sucesor Marino, traducida al inglés en Edwards (2000) y en Rosan (1949, págs. 11-32); véase también Blumenthal (1984) acerca de la interpretación del texto. Frantz, Thompson y Traulos (1988, págs. 42-44) describen el yacimiento arqueológico que podría ser la casa Proclo, aunque su identificación no ha tenido una aceptación universal.

Sobre la filosofía de Proclo, incluidas sus fuentes, véase Siorvanes (1996) y, en particular, O'Meara (1989); véanse también los ensayos en Pepin y Saffrey (1987), especialmente el de Mueller y Claessens (2012). Acerca del neoplatonismo en general, Wallis (1995) es utilísimo; véase también Glucker (1978).

Sobre el *Comentario* de Proclo, la introducción de Mueller a la traducción de Morrow es relevante, como también Nikulin (2008), Harari (2006) y Ver Eecke (1948); sobre sus fuentes, vale la pena también Mueller (1987). Acerca de la división de las proposiciones matemáticas, sigo a Netz (1999). El material histórico en el *Comentario* se estudia en Cuomo (2001, pág. 260) y en Zhmud (2002). Debates más amplios sobre la estructura lógica de los EE son los de Grattan-Guinness (1996) y el indispensable Mueller (1981).

Sobre la inscripción de *ageometretos*, véase Saffrey (1968) y más en general Netz (2003) sobre la matematización de Platón. Para una discusión moderna de Euclides de Mégara, véase BNP; la confusión con Euclides el geómetra también se comenta en Goulding (2010).

Hroswitha de Gandersheim

Varias partes de la obra de Hroswitha están traducidas al inglés en St John (1923, pág. XIX para la referencia al «rayo de Sófocoles»), Wiegand (1936), Wilson (1998) y Bonfante y Chipok (2013); los fragmentos de *Sapientia* son obra mía. La transmisión de esta parte de la teoría de números griega se comenta en D'Ooge, Robbins y Karpinski (1926) y Masi (1983), así como en Heath (1926, volumen 2).

Entre los estudios sobre la vida y la obra de Hroswitha están Coulter (1929), Fife (1947), Burgess (1957), Haight (1965), Frankforter (1979) y Wilson (1984). Ensayos más recientes, sobre todo acerca de las obras martirológicas, son los de Carlson (1998) y McDonald-Miranda (2010). Sobre aspectos concretos, como el humor o las fuentes, también he consultado Wedeck (1928) y Coffman (1931).

Leví ben Gershon

Sobre la vida de Ben Gershon y su trasfondo cultural, véase Goldstein (1978), Freudenthal (1995) y Feldman (2010); también Dahan (1991), algunos de los ensayos en Freudenthal (2005. pág. 741 para «muchos nobles y grandes cristianos») y Glasner (2015). Sobre su obra y filosofía, véase Kellner (1994), Mancha (1997), Freudenthal (1992) y Touati (1973). Acerca de su matemática, Carlebach (1910) y Simonson (2000). Kellner (1995) y Ben Gershon (1998) son especialmente valiosos para su filosofía de las matemáticas. «Que una recta se puede extender para hacerla más larga que cualquier recta dada» es un fragmento ligeramente modificado de la versión de su comentario a los *Elementos*, que aparece en Katz (2016, pág. 327).

La matemática en la cultura hebrea se comenta en Levy (1997a, 2011) y Katz (2016); la parte de obras euclidianas de Ben Gershon incluidas en esta última referencia se pueden leer junto con la versión francesa y el comentario en Levy (1992a), con una discusión en Levy (1992b). De modo más general, sobre Euclides en hebreo, véase Elior (2018) y Levy (1997b, 1997c).

Acerca del desarrollo posterior del postulado de las paralelas, véase el capítulo sobre Lobachevski, más adelante.

Christopher Clavius

Sobre Clavius y su obra, he empleado Lattis (1994) en particular («un hombre incansable en sus estudios» es de la pág. 22, como la anécdota de las habitaciones; «el Euclides de su época» es de la pág. 3 y «fama inmortal», de la pág. 7), así como Feingold (2002), que también comenta el contexto y la importancia de la ciencia jesuítica; sobre este último tema, Wallace (1984) es una referencia relevante.

Acerca del Euclides de Clavius, la lectura de Price (2017) es indispensable, como la de Rommevaux (2005). Para algunos detalles he consultado Knobloch (1988), Jardine (1979) y Smolarski (2002). «Nadie puede acceder a la metafísica» es de Engelfriet (1993, pág. 115). La copia que describe se halla en una colección privada (la mía); la que lleva la inscripción «las maravillas del Señor» (en latín) está en el Caius College de Cambridge, con indicación de estante M.25.19.

De las cada vez más abundantes publicaciones sobre ediciones de los *Elementos* en la Edad Moderna, de Risi (2016) me ha parecido la más importante (los ejemplos de nuevos axiomas se han citado de esta referencia); también hay resúmenes en Steck (1981) y Wardhaugh (2020b).

Xu Guangqi

Sobre Xu Guangqi y Ricci, respectivamente, Jami, Engelfriet y Blue (2001) y R. P. Hsia (2010) son valiosísimos (del primero, pág. 34, «no podía hablar de ninguna otra cosa»; pág. 383, «no hay necesidad de dudar»; del segundo, pág. 248, «era el único caballero del mundo»; pág. 156, «el Hombre de la Montaña»; pág. 269, «el Hombre de la Paradoja»; pág. 199, «como locos»). Spence (1984) también es de ayuda para Ricci (pág. 115 para las ropas «de seda púrpura»), al igual que la entrada detallada en Goodrich y Fang (1976). Sobre la misión jesuita en China, en sus aspectos más generales, me ha sido de mucha ayuda F. Hsia (2010); también Gernet (1985) y Zhang (2015) sobre intercambios científicos. Para un relato diferente, véase Hart (2013) y las reseñas Hsia (2015) y Breard (2016).

Sobre el Euclides de Xu/Ricci Euclid, Engelfriet (1998) es la descripción más habitual y exhaustiva; las citas de los prefacios de los *Elementos* son de las págs. 292, 457-459, y el fragmento más largo es del propio Engelfriet en pág. 206. También he empleado Engelfriet 1993 (pág. 114 para «en mi universidad»), Martzloff (1995) y D’Elia (1960). Para el contexto más general de la geometría euclidiana/europea, véase Martzloff (1981), Chemla (1996) y Jami (1996, 2011).

No culpéis a nuestro autor

No culpéis a nuestro autor se publicó en Gossett (1983), de donde proceden todas las traducciones del texto; la obra se comenta en el prefacio a esa edición y también en Mazzio (2004) y Nasifoglu (2017). En mis citas (en inglés) he modernizado la ortografía y la puntuación.

Baruch Spinoza

Entre la gran cantidad de obras generales sobre Spinoza, las siguientes han sido de ayuda: Garrett (1996), Nadler (1999), Viljanen (2011) y Della Rocca (2018). Sobre su *Ética*, en particular, he utilizado Lloyd (1996, «Que sea maldito» aparece en la pág. 1, citando la excomunicación de 27 de julio de 1656), Koistinen (2009) y Lord (2010). El modelo geométrico-axiomático es tema de una abundante literatura y la cuestión de su relación con el contenido de la filosofía suele ser motivo de disputas; en Steenbakkers (2009, pág. 53), aparece una extensa bibliografía, y el libro es una buena ayuda para resumir el debate en torno a Spinoza. Mark (1975) es un útil resumen anterior; véase también Solere (2003).

En general, he seguido la línea de interpretación asociada a Gueroult (opuesta a la de Wolfson), y he encontrado útiles Nadler (2006) y Byrne (2007); véase por ejemplo McKeon (1930), De Dijn (1986) y Garrett (2003). También he empleado en concreto, con algunas reservas, la interpretación de Curley (1988).

La historia sobre Hobbes aparece en Hobbes (1660, véase también Jesseph 2004, 193), y sus observaciones sobre las ventajas de la geometría son del prefacio a Hobbes (1647); véase también Rocca (2018, pág. 30). El comentario de Berkeley procede de Berkeley (1734), el «capta las mentes» de Descartes es de las *Meditaciones* (segundo conjunto de réplicas) en la traducción de Cottingham, Stoothoff y Murdoch. «La de las matemáticas» es del prefacio de Meyer al texto cartesiano de Spinoza y se cita en Rocca (2018, pág. 21). «El conocimiento de un efecto» es el axioma IV de la *Ética*; «Dios no pudo haber producido las cosas de ninguna otra manera» es del libro I, proposición 33; «Pero yo pienso haber mostrado» es de la nota a la proposición 17 del libro I. «El juego de manos» es de Jenseits von Gut y Bose 1.5, citado en Koistinen (2009, pág. 43).

Anne lister

Para el fenómeno general de la matemática como práctica meditativa y de automejora, Dear (1995) y Jones (2006) son muy valiosos. Isham se estudia y edita en Isham (1971, algo menos satisfactorio en Isham 1875), los Conways en Nicolson y Hutton (1992, las citas son de las págs. 146, 231). La frase de Locke aparece en Locke (1706, pág. 30); la historia de Vitrubio, en *De architectura*, 6.

Sobre el *Ladies' Diary*, las fuentes principales son Costa (2000, 2002a y 2002b); Perl (1979) y Albree y Brown (2009) también son útiles, así como las reimpresiones de Hutton (1775) y Leybourne (1817), algo más accesibles que las revistas originales.

Fragmentos del diario de Anne Lister se han publicado en Lister (1988, 1992, 2010) y Liddington (1998); correspondencia seleccionada en Lister (1992). Los estudios Eisner (2001), Liddington (1993, 1994, 1996), Hughes (2014) son valiosos, como la biografía Steidele (2018). Estoy en deuda con Caroline Davidson por avisarme de la lectura de Euclides de Lister, y con Helena Whitbread por la información más detallada como la fecha cuando Anne empezó con Euclides. Su intención de proceder diligentemente y su division del día proceden de la entrada del diario del 13 de mayo de 1817, en Lister (1988, pág. 6).

Peteconsis

La medición de la tierra de Peteconsis se describe en Fowler (1999, págs. 231-234, basado en O. Bodl. ii 1847; cita pág. 231); otras fuentes se transcriben, traducen y comentan en Thompson/Crawford (1971) y en Cuvigny (1985). «Pesos diversos y medidas diversas» es de *Proverbios* 20:10. «Los sacerdotes también me dijeron» es de las *Historias* de Heródoto, II.10; véase Imhausen 2016, págs. 117-118, de donde procede también (pág. 159) la cita de las *Enseñanzas de Amenemope* («No muevas los hitos»).

El tema de la transmisión se comenta con más detalle en Robson (2005); los orígenes y la naturaleza de la tradición deductiva griega se discuten en Netz (1999) y Cuomo (2001); para las dos culturas matemáticas en Grecia, véase Netz (2002) y Asper (2009).

La división del monocordio

El mejor estudio de las obras de Euclides aparte de los *Elementos* se halla en la introducción a Vitrac (1990). Sobre los *Fenómenos* y *De ponderibus* véanse las monografías Berggren (2006) y Moody y Clagett (1952); sobre la *Óptica*, Burton (1945) ofrece una traducción al inglés y Webster (2014) y

Tobin (1990) contienen interesantes discusiones. La música griega antigua, en general, con discusión de su contexto, se presenta en West (1992), con información sobre la carrera de Nicocles, y Barker (1984, 1989); acerca de los detalles sobre la *Sectio canonis*, véase también Barker (1981 y 2007) con Barbera (1991).

Higino

La tradición de los agrimensores se estudia con detalle en Cuomo (2001); un tratamiento extenso es el de Dilke (1971, pág. 45 para el fragmento de Casiodoro). Véase también Geymonat (2009) y Lewis (2001). Los textos del *Corpus agrimensorum* están editados por Rudorff, Lachmann y Blume (1848) y traducidos al inglés en Campbell (2000), con una útil introducción y comentarios. Sobre el MS Arcerianus A, el facsímil y la introducción en Butzmann (1970) son muy valiosos; véase también Carder (1978).

La evolución posterior de la enseñanza de la geometría en latín se estudia en Evans (1977) y Zenner (2002); para los aspectos teológicos, he seguido a Zaitsev (1999, pág. 530, donde cita la intención doble de Euclides y pág. 531, con el acercamiento a los cielos, ambos de *Geometria I*). Una interpretación diferente de las pruebas aparece en Stevens (2002, 2004), aunque su edición crítica anunciada en 2004 no parece haberse publicado; en conjunto, sigo a Folkerts (1970) sobre este tema bastante complejo. Esta última referencia contiene ediciones (a pesar de su título) de *Geometría I* y *Geometría II*.

Muhammad Abú al-Wafá al-Buzjani

Sobre la dinastía búyida y sus aspectos políticos, véase Robinson (2010, capítulos 8 y 9), así como Mez (1937) y Kraemer (1992); acerca de la geometría de la época, Hoyrup (1994) y Berggren (2016). Sobre al-Wafá, los artículos en Hockey (2014), la *Encyclopedia Iranica* (iranicaonline.org) y Fleet *et al.* son interesantes, así como los artículos en Qurbani y Haydarniya (2002). La frase sobre el error evidente se cita en el DSB. Aspectos concretos de su obra y su transmisión se comentan en Kennedy (1984) y Raynaud (2012). Sobre las traducciones francesa y alemana de las *Construcciones Geométricas*, véase Woepcke (1855), Suter (1922) y Chavoshi (2010), así como fragmentos en inglés en Katz (2007) y, más breves, en Berggren (1986). Raynaud (2012) también contiene una lista completa de los problemas del tratado, mientras que Sarhangi (2008) incluye una discusión esclarecedora de partes de su contenido. Las *Divisiones* de Euclides están reconstruidas en Archibald (1915).

Ozdural (1995, 2000) comenta la tradición de reuniones entre geómetras y artesanos. Un resumen de los diversos puntos de vista de los historiadores sobre los patrones arquitectónicos islámicos y su relación con la matemática se puede ver en Bier (2008 y 2009); la última dispone de una útil bibliografía de otras obras sobre el tema; Kheirandish (2008) también resulta útil sobre esta cuestión.

Señora geometría

Las representaciones de Euclides se comentan brevemente en el artículo sobre él en BNP. Sobre Chartres y su programa escultórico, he utilizado Katzenellenbogen (1959); las fotografías en Houvet (1919) son de gran valor. También he empleado Knitter (2000). Sobre las artes lineales y su representación, con todos los ejemplos que menciono, véase Verdier (1969), Evans (1978), Zaitsev (1999) y Palmer (2002), así como varias imágenes y comentarios en Murdoch (1984); el manuscrito alemán anónimo mencionado se describe en la pág. 99. El manuscrito Ashmole 304 se reproduce al completo y se describe detalladamente, en edición digital en bodleian.ox.ac.uk y Iafrate (2015); véase también Burnett (1977).

Piero della Francesca

El bastante bien conocido tema de este capítulo se explora, por ejemplo, en Gamwell (2016) y Kemp (2016); también hay comentarios relevantes en Rose (1975) y Richter (1995). De la gran cantidad de material escrito sobre Piero Della Francesca, Wood (2002) me ha sido de particular ayuda entre las obras generales. Sobre su matemática, Davis (1977) es importantísimo, así como las diversas publicaciones de Field (1996, 1997, 1988) que culminan en la referencia de 2005, el punto de partida imprescindible para cualquier debate serio sobre el tema. También son útiles Elkins (1987) y Folkerts (2006, capítulo X). Los tratados de Della Francesca están disponibles en ediciones modernas, como su Arquímedes.

Sobre la *Flagelación*, en concreto, las conclusiones de Wittkower y Carter (1953) sobre su perspectiva no han sido mejoradas de manera sustancial, aunque Geatti y Fortunati (1992) también resulta valioso. He utilizado Lavin (1972) y Mercier (2017, con la lista de veitinueve identificaciones que menciono) así como las discusiones de este cuadro en las obras más generales antes citadas, sobre todo Field (2005).

Sobre Pacioli, Baldasso (2010) y Baldasso y Logan (2017) son ecuánimes e informativos sobre el tan comentado retrato; Folkerts (2006, capítulo XI) también resulta útil. Sobre la historia de la perspectiva, Andersen (2007) no ha sido superado como estudio técnico; Brownson (1981) es una útil discusión de la conexión euclidiana y Raynaud (2010) contiene valiosa información técnica; también he utilizado Belting (2011) y Edgerton (1991). Para la historia posterior de los sólidos arquimedianos, véase Field (1997).

Euclid Speidell

«Un nuevo tipo de intelectual» es de Oosterhoff (2018, pág. 5). La relación de Nathaniel Denew con Euclid Speidell se puede comprobar en Speidell (1686, fol. A2r–A3r). Se puede hallar más información sobre la familia Speidell a partir de sus propias obras y del International Genealogical Index, así como de Taylor (1954), donde se cita el comentario de Robert Hooke sobre él. Las citas de John Speidell son de Speidell (1616, pág. 71, 106; 1627, fol. A3v; 1628, fol. A4r). La autobiografía manuscrita mencionada en el texto se halla en los Lincolnshire Archives, MON 7/21; mi agradecimiento a Boris Jardine por esta referencia y por indicaciones de sus fotografías y transcripciones no publicadas.

Isaac Newton

La fuente habitual para la vida de Newton es Westfall (1980); su lectura de Euclides se comenta con más detalle en Whiteside (1967). El uso de sus libros se discute en Harrison (1978) y Mandelbrote (2001). Probablemente la discusión más clara de la cronología de sus lecturas de Descartes y Euclides sea la de de Moivre citada por Whiteside, pero las pruebas autobiográficas son poco coherentes y se pueden interpretar de más de una manera. La cita de Isaac Barrow es de Barrow (1660, fol. 2r). Los métodos matemáticos de los *Principia* de Newton se comentan en Guicciardini (1999 y 2009).

Sobre la cultura general de lectura y anotaciones matemáticas de la época, véase Wardhaugh (2015, 2020a, 2020c) así como los ensayos en Beeley, Nasifoglu y Wardhaugh (2020). Parte de la información de este capítulo proviene del estudio de los libros anotados de Newton en el Trinity College de Cambridge; su copia del Euclides de Barrow tiene la indicación NQ.16.201[1].

Mary Fairfax

La matemática y la enfermedad mental en este período se comentan en Jenkins 2010 y las fuentes allí citadas; véase también Jenkins (2007, 2008) y Wardhaugh (2012). Sobre Durero, véase Palmer (2002) y Kemp (2016). El contexto más amplio de la educación matemática en la época se estudia, por ejemplo, en Richards (1988) y Warwick (2003).

Para la vida de Mary Somerville, la fuente clave es Somerville (1873), de la cual extraigo mis citas de «apenas leía otra cosa» (pág. 7), «no era la preferida» (pág. 42), «una revista mensual» (pág. 45), «los fundamentos no solo de la perspectiva» (pág. 49) y el fragmento inicial «Tenía que ocuparme de asuntos domésticos» (pág. 53). Véase también Patterson (1969), Neeley (2001) y Lamprecht (2015). «Por muchas dificultades que podamos tener» es de la esquela en el *Morning Post* de 2 de diciembre de 1872, citada en Patterson (1969, pág. 311).

FRANÇOIS PEYRARD

Sobre Peyrard véase Langins (1989); la información biográfica de Michaud (1843) no parece muy fiable. Su propio relato del trabajo con la matemática antigua en los prefacios de Peyrard (1804 y 1814) ayuda a completar la imagen. La nota al margen sobre la nueva edición está citada en Vitrac (1990, vol. 1, pág. 45); «el texto puro de Euclides» es de Peyrard (1814, vol. 1, pág. XXIII); las «calumnias» y «persecuciones» aparecen en Peyrard (1814, vol. 3, pág. XI).

Acerca de la crítica textual en este período, en general, Reynolds y Wilson (1968/2013), y sobre todo, Pfeiffer (1976) contienen resúmenes útiles; la historia de la crítica textual del Nuevo Testamento se resume en Metzger (1964) y en Aland y Aland (1987); para el tema homérico, el artículo bajo este nombre en BNP es un resumen útil.

Sobre la historia posterior del texto euclidiano, los mejores resúmenes actuales son Rommevaux *et al.* (2001) y Vitrac (2012), con detalles adicionales en Vitrac (1990). Los relatos de Knorr (1996 y 2001) contienen muchos elementos de interés.

NICOLAI IVÁNOVICH LOBACHEVSKI

Acerca de la vida de Lobachevski, véase Vasil’ev (1894), Vucinich (1962) y Manturov (1993, «hay una clara línea»: pág. 9), así como el útil resumen en el DSB. Entre sus propios escritos, probablemente el de 1891 sea la introducción más accesible en inglés. El contenido de la geometría no euclidiana se comenta en Poincaré (1905) y en el relato clásico de Coxeter (1957). La historia estándar más antigua sobre la geometría no euclidiana, Bonola (1912), debe leerse junto con Gray (1979, 1989 y 2007). «En triángulos» se cita del último, pág. 122 (a partir del *Untersuchungen* de Lobachevski); «es poco probable» es de la pág. 129.

Maggie y tom

La matemática en la ficción victoriana es el tema de Jenkins (2007) y Bayley (2009); sobre la matemática victoriana, más en general, véase Richards (1988), Jenkins (2008) y Flood, Rice y Wilson (2011). Coleridge y Whewell se citan a partir de Jenkins (2007), pág. 159; «una dosis de matemáticas cada día» es de Haight (1954, vol. 1, pág. 321), «porque no quería perder la capacidad de aprender» es del vol. 9, pág. 293; ambos citados en Ball (2015, pág. 217).

Además de las diversas biografías de Eliot, el contexto acerca del uso de las matemáticas en sus novelas se comenta en Baker (1977) y en Harris y Johnston (1998). Estudios sobre la matemática y/o la educación en *El Molino del Floss* son los de Jones (1995), Jenkins (2008), Ball (2015, 2016) y Dimitriadis 2018; también Lee (2016).

Simson en urdú

La edición se describe en Atmaram (1884). Los libros británicos de texto de matemáticas en la India son el tema de Aggarwal (2006 y 2007); sobre el tema más general de la educación en la India británica, Sen 1991 resulta muy útil, junto con otras fuentes como Kerr (1852). Las actividades de los editores británicos en la India se estudian en Chatterjee (2002 y 2006); la cita es de 2002, pág. 153.

Acerca del contexto más general de la India británica, he consultado sobre todo Bayly (1988), y sobre la ciencia en la India británica, Arnold (2000); también Dubow (2013) y Chemla (2012), especialmente el capítulo 5. Euclides en la India antes del dominio británico se estudia en De Young (1995).

Sobre las ediciones de Simson, Playfair y Todhunter, véase, además de las propias ediciones, Barrow Green (2006) y Ackerberg-Hastings (2002); Heath (1926) contiene información relevante. «Ningún rival» es de Brougham (1845), pág. 492; Sylvester está citado de Moktefi (2011, pág. 326).

SUS RIVALES MODERNOS

Acerca del debate sobre Euclides, Dodgson (1879/1885) ofrece un resumen exhaustivo de material impreso hasta esa fecha (la cita inicial es del inicio de la escena 2); Brock (1975) y Richards (1988) son estudios interesantes, mientras que Moktefi (2011, también 2007) avanza la historia hasta principios del siglo XX; Sylvester se cita a partir de Moktefi (2011, pág. 326), Perry de la pág. 334. De Morgan, escribiendo en el *Companion to the Alamanc* para 1849, se cita en Heath (1926, vol. 1, pág. V). Las citas de Mueller son de (1981). En Cajori (1910), Barrow-Green y Gray (2006) y Jenkins (2008) hay más contexto sobre el tema.

THOMAS LITTLE HEATH

No conozco fuentes secundarias sobre Thomas Heath aparte de Wardhaugh (2016) y las esquelas y recordatorios allí citados, sobre todo los del *London Times*, los *Proceedings of the British Academy* y las *Royal Society's Obituary Notices* (Thompson, 1941), así como un artículo en el *Dictionary of National Biography* revisado para el *Oxford Dictionary of National Biography*, donde se comentan sus hábitos de trabajo. Sobre el Ministerio de Hacienda durante la época de Heath, véase Peden (2000).

Estas fuentes deben complementarse con lo que puede apreciarse de reseñas contemporáneas y de los prefacios de las obras de Heath. De Heath (1920, pág. V): «es inmortal», «la geometría elemental es Euclides» y «generación tras generación». De Heath (1921): «las matemáticas, en resumen, son una ciencia griega» (pág. V) y «si uno quisiera comprender el genio griego en su totalidad, un buen plan sería empezar con su geometría» (pág. vi). De Heath (1926, vol. 1): «me atrevo a sugerir» (pág. 418), «el método algebraico» (pág. 373), «corpus de doctrina» (pág. V). De Heath (1931), pág. 1, «en los siglos que han transcurrido». Y de Heath (1932b), «el texto genuino de Euclides», «para cualquier persona inteligente» y «me sorprendería que lectores cualificados». «Una obra que solo un inglés podía escribir con verdadero amor» es de Smith (1909), págs. 387-388; «enamorado de la geometría» es de las *Brief Lives* de Aubrey. Wharton se cita a partir del frontispicio de Leeke y Serle (1661).

MAX ERNST

El estudio más detallado de Ernst, con diferencia, es Lucke-David (1994). La lectura de *Alicia* se origina con Waldberg (1958; véase también Quinn 1977); la «rosacruciana» con Hopkins (1992). El exhaustivo catálogo Spies (1975, vol. 5, pág. 106) lista más publicaciones; de las obras generales sobre Ernst, Quinn (1977) contiene probablemente la serie más completa de reproducciones de las obras relacionadas con Euclides, pero debe compararse con Schneede (1972). También he consultado Gatt (1970), Di San Lazzaro (1971), Diehl (1973), Larkin (1975), Turpin (1979) y Bischoff (2003).

Diseños euclidianos

Acerca de Crockett Johnson, véase Nel (2012, del cual «hacía diagramas», pág. 197) así como philnel.com/crockett-johnson. Sobre sus pinturas geométricas, véase Johnson (1972), Stroud (2008), Cawthorne y Green (2009, «tributos románticos») y Kidwell (2013 «algo bastante imponente»), así como las reproducciones y comentarios en americanhistory.si.edu/collections/object-groups/mathematical-paintings-of-crockett-johnson. «Una cierta indiferencia distante» es de Michael Benedikt en un artículo en *Art News*, citado en Nel (2012, pág. 192).

La biografía más completa de Oliver Byrne es quizá la de Hawes y Colpas (2015), de donde cito «todos mis libros» y «no introduzco los colores». Información adicional procede de kroneckerwallis.com, history.mcs.st-and.ac.uk, c82.net (con la autodescripción de Rougeux) y personal.math.ubc.ca/~cass/euclid/byrne.

Acerca de Elsa Schiaparelli, véase, en concreto, Schiaparelli (1954), Blum (2003) y Secrest (2014). La frase de «más alocada y más original» es de un artículo en *Time* (1934). Sobre Madeleine Vionnet he utilizado Demornex y Canino (1991) y Kamitsis (1996); «la modernidad bien poco europea» apareció en el *New Yorker* en 1932, obra de Janet Flanner.

Sobre Monir Shahroudy Farmanfarmaian, las obras principales son Farmanfarmaian y Houshmand (2007), Obrist y Marta (2011) y Marta (2015). Véase también Stein (2012). «Haría primero un dibujo», «pregunté a mi maestro artesano» y «no se trata de un proceso muy intelectual» son de Marta (2015, págs. 54, 96, 102).

Lambda

Las dos misiones propuestas que se combinaron para dar lugar a *Euclid* se describen en Cimatti *et al.* (2009) y Refregier *et al.* (2009). Laureijs *et al.* (2011) describe el resultado del estudio de definición de la misión, y los boletines de la misión en los años 2012-2017 se hallan en euclid.cnes.fr/en/newsletters. En las páginas web de las diversas agencias e instituciones que participan en el Euclid Consortium hay información actualizada sobre la misión *Euclid*; véase, en concreto, sci.esa.int/euclid/, euclid-ec.org y eoportal.org/satellite-missions/euclid. En varios números de *Illustrated London News* entre 1952 y 1960 se pueden ver varios anuncios de los tractores Euclid.

Bibliografía

Aa, A. J., Van der, *Biographisch woordenboek der Nederlanden*, Haarlem, 1852-1878.

Abattouy, Mohammed, «Greek Mechanics in Arabic Context: Thabit ibn Qurra, al-Isfizari and the Arabic Traditions of Aristotelian and Euclidean Mechanics», *Science in Context*, 14 (2001), págs. 179-247.

Acerbi, Fabio, «Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid’s Elements, with Special Emphasis on Prop. 8», *Archive for History of Exact Sciences*, 57 (2003), págs. 175-242.

Ackerberg-Hastings, Amy, «Analysis and Synthesis in John Playfair’s Elements of Geometry», *British Journal for the History of Science*, 35 (2002), págs. 43-72.

Aggarwal, Abhilasha, «British Higher Education in Mathematics for and in India, 1800–1880» (presentación doctoral), Universidad de Middlesex, 2006.

—, «Mathematical Books for and in India in the Nineteenth Century», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 22 (2007), págs. 11-21.

Aghayani-Chavoshi, J., Ketab al-Nejarat, *Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques*, Teherán, 2010.

Aland, Kurt y Barbara Aland, *The Text of the New Testament: An Introduction to the Critical Editions and to the Theory and Practice of Modern Textual Criticisms*, Grand Rapids (Michigan), 1987.

Albree, Joe y Scott H. Brown, «“A Valuable Monument of Mathematical Genius”: The Ladies’ Diary (1704–1840)», *Historia Mathematica*, 36 (2009), págs. 10-47.

Aletta, A., «Su Stephano, copista di Areta», *Rivista di Studi Bizantini e Neoellenici*, 41 (2004), págs. 73-93.

Alverny, Marie-Therese, *La transmission des textes philosophiques et scientifiques au moyen âge*, Aldershot, 1994.

Andersen, K., *The Geometry of an Art*, Nueva York, 2007.

Archibald, Raymond Clare, *Euclid’s Book on Divisions of Figures = Peridiaireseon biblion: With a restoration based on Woepcke’s text and*

on the Practica geometriae of Leonardo Pisano, Cambridge, 1915.
Arnold, David (ed.), *The New Cambridge History of India III.5: Science, Technology and Medicine in Colonial India*, Cambridge, 2000.
Artmann, Benno, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Nueva York, 1999.
Asper, Markus, «The Two Cultures of Mathematics in Ancient Greece», en: Robson y Stedall (2009), págs. 107-132.
Atmaram, *Tahrir-i Uqlidis*, Mathura, 1884.
Bagnall, R. S., *Reading Papyri, Writing Ancient History*, Londres, 1995.
Baker, William (ed.), *The George Eliot–George Henry Lewes Library: An Annotated Catalogue of Their Books at Dr. Williams's Library*, Garland, Londres, 1977.
Baldasso, Renzo, «La stampa dell'editio princeps degli Elementi di Euclide (Venice: Erhard Ratdolt, 1482)», en: Craig Kallendorf y Lisa Pon (eds.), *The Books of Venice/Il Libro Veneziano*, Venecia, 2009, págs. 61-100.
—, «Portrait of Luca Pacioli and Disciple: A New, Mathematical Look», *Art Bulletin*, 92 (2010), págs. 83-102.
—, «Printing For The Doge: On the first quire of the first edition of the Liber Elementorum Euclidis», *La Bibliofilia*, 115 (2013), págs. 525-552.
— y John Logan, «Between the Golden Ratio and a Semiperfect Solid: Fra Luca Pacioli and the Portrayal of Mathematical Humanism», en: Ingrid Alexander-Skipnes (ed.), *Visual Culture and Mathematics in the Early Modern Period*, Nueva York, 2017, págs. 130-149.
Ball, Derek, «"Thick-rinded Fruit of the Tree of Knowledge": Mathematics education in George Eliot's novels», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 30 (2015), págs. 217-226.
—, «Mathematics In George Eliot's Novels» (presentación doctoral), Universidad de Leicester, 2016.
Barbera, André, *The Euclidean Division of the Canon: Greek and Latin sources new critical texts and translations on facing pages, with an introduction, annotations, and indices verborum and nominum et rerum*, Lincoln (Nebraska), 1991.
Barker, Andrew, «Methods and Aims in the Euclidean Sectio Canonis», *Journal of Hellenic Studies*, 101 (1981), págs. 1-16.
—, *Greek Musical Writings. Volume 1, The musician and his art*, Cambridge, 1984.
—, *Greek Musical Writings. Volume 2, Harmonic and acoustic theory*, Cambridge, 1989.
—, *The Science of Harmonics in Classical Greece*, Cambridge, 2007.
Barrow, Isaac, *Euclide's Elements; The whole Fifteen Books compendiously Demonstrated By Mr. Isaac Barrow Fellow of Trinity Colledge in Cambridge. And Translated out of the Latin*, Londres, 1660.

Barrow-Green, June, «“Much Necessary for All Sortes of Men’: 450 years of Euclid’s Elements in English», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 21 (2006), págs. 2-25.
— y Jeremy Gray, «Geometry at Cambridge, 1863–1940», *Historia Mathematica*, 33 (2006), págs. 315-356.
Bayley, Melanie, «Mathematics and Literature in Victorian England» (presentación doctoral), Oxford, 2009.
Bayly, C. A. (ed.), *The New Cambridge History of India II.1: Indian society and the making of the British Empire*, Cambridge, 1988.
Becker, Oskar, «Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik*, B 3 (1936), págs. 533-553.
Beeley, Philip, «“A designe Inchoate”. Edward Bernard’s planned edition of Euclid and its scholarly afterlife in late seventeenth-century Oxford», en: Beeley, Nasifoglu y Wardhaugh (2020).
—, Yelda Nasifoglu y Benjamin Wardhaugh (eds.), *Reading Mathematics in Early-Modern Europe: Studies in the production, collection, and use of mathematical books*, Nueva York, 2020.
Belting, Hans (tr. Deborah Lucas Schneider), *Florence and Baghdad: Renaissance art and Arab science*, Cambridge (Massachusetts) 211.
Ben Gershom, Levi (ed. Menachem Kellner), *Commentary on Song of Songs*, New Haven, 1998.
Berggren, J. L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Nueva York, 1986.
— y Glen Van Brummelen, «Al-Kuhi’s Revision of Book I of Euclid’s Elements», *Historia Mathematica*, 32 (2005), págs. 426-452.
— y Robert S. D. Thomas, *Euclid’s Phaenomena: A translation and study of a hellenistic treatise in spherical astronomy*, Providence (Rhode Island), 2006.
Berkeley, George, *The Analyst; or, a discourse Addressed to an Infidel mathematician*, Londres, 1734.
Bier, Carol, «Art and Mithal: Reading Geometry as Visual Commentary», *Iranian Studies*, 41 (2008), págs. 491-509.
—, «Number, Shape, and the Nature of Space: Thinking through Islamic art», en: Robson y Stedall (2009), págs., 827-852.
Billingsley, Henry, *The Elements of Geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara*, Londres, 1570.
Bischoff, Ulrich, *Max Ernst 1891–1976: Beyond painting*, Colonia, 2003.
Blum, Dilys, *Shocking! The art and fashion of Elsa Schiaparelli*, Filadelfia, 2003.
Blum Rudolf (tr. Hans H. Wellisch), *Kallimachos: The Alexandrian Library and the origins of bibliography*, Madison (Wisconsin), 1991.

Blumenthal, H., «Marinus' Life of Proclus: Neoplatonist Biography», *Byzantion*, 54 (1984), págs. 469-494.

Bonfante, Larissa y Robert Chipok, *The Plays of Hrotswitha of Gandersheim*, Mundelein, 2013.

Bonola, R. (tr. H. S. Carslaw), *History of Non-Euclidean Geometry*, Chicago, 1912.

Breard, Andrea, «Imagined Civilizations: China, the West, and Their First Encounter by Roger Hart» [reseña], *Mathematical Intelligencer*, 38 (2016), págs. 80-82.

Brentjes, Sonja, «Varianten einer Haggag-Version von Buch II der Elemente», en: Folkerts y Hogendijk (1993), págs. 47-67.

—, «An Exciting New Arabic Version of Euclid's Elements. Ms Mumbai, Mulla Fīrūz R.I.6», *Revue d'histoire des mathématiques*, 12 (2006), págs. 169-197.

—, «Euclid's Elements, Courtly Patronage and Princely Education», *Iranian Studies*, 41 (2008), págs. 441-463.

Brock, W. H., «Geometry and the Universities: Euclid and his modern rivals, 1860–1901», *History of Education*, 4 (1975), págs. 21-35.

Brougham, Henry, *Lives of Men of Letters and Science, who flourished in the time of George III*, Londres, 1845.

Brownson, C. D., «Euclid's Optics and its Compatibility with Linear Perspective», *Archive for History of Exact Sciences*, 24 (1981), págs. 165-194.

Bulmer-Thomas, Ivor, «Euclid and Medieval Architecture», *Archaeological Journal*, 136 (1979), págs. 135-150.

Burgess, Henry E., «Hroswitha of Gandersheim: A study of the author and her works» (presentación doctoral), Universidad Estatal de Montana, 1957.

Burnett, C., «What Is the Experimentarius of Bernardus Silvestris?: A Preliminary Survey of the Material», *Archives d'histoire doctrinale et litteraire du moyen âge*, 44 (1977), págs. 79-125

— (ed.), *Adelard of Bath: An English scientist and Arabist of the early twelfth century*, Londres, 1987.

—, «Ocreatus», en: Folkerts y Hogendijk (1993), págs. 69-78.

Burton, Harry Edwin, «The Optics of Euclid», *Journal of the Optical Society of America*, 35 (1945), págs. 357-372.

Busard, H. L. L., *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?), books VII-XII*, Ámsterdam, 1977.

Busard, H. L. L. (ed.), *The first Latin translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath: books I-VIII and books X.36–XV.2*, Toronto, 1983.

— (ed.), *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*, Leiden, 1984.
— y Menso Folkerts (eds.), *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the So-Called Adelard II Version*, Basilea, 1992.
— (ed.), *A Thirteenth-Century Adaptation of Robert of Chester's Version of Euclid's Elements*, Múnich, 1996.
— (ed.), *Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's Elements, The So-Called Adelard III Version*, Stuttgart, 2001.
—, *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, Stuttgart, 2005.
Butler, Alfred J. y P. M. Fraser, *The Arab Conquest of Egypt and the Last Thirty Years of the Roman Dominion* (2.ª edición), Oxford, 1978.
Butzmann, Hans, *Corpus agrimensorum Romanorum. Codex arcerianus A der Herzog-August-Bibliothek zu Wolfenbuttel (Cod. Guelf. 36.23A)*, Leiden, 1970.
Byrne, L., «The Geometrical Method in Spinoza's Ethics», *Poetics Today*, 28 (2007), págs. 443-474.
Cajori, Florian, «Attempts Made During the Eighteenth and Nineteenth Centuries to Reform the Teaching of Geometry», *American Mathematical Monthly*, 17 (1910), págs. 181-201.
Cameron, Alan y Jacqueline Long, *Barbarians and Politics at the Court of Arcadius*, Berkeley, 1993.
Campbell, Brian, *The Writings of the Roman Land Surveyors: Introduction, text, translation and commentary*, Londres, 2000.
Carder, James N., *Art Historical Problems of a Roman Land Surveying Manuscript, the Codex Arcerianus A, Wolfenbuttel*, Nueva York, 1978.
Carlebach, Joseph, *Lewi ben Gerson als mathematiker: ein beitrag zur geschichte der mathematik bei den Juden*, Berlín, 1910.
Carlson, Marla, «Impassive Bodies: Hrotsvit Stages Martyrdom», *Theatre Journal*, 50 (1998), págs. 473-487.
Cawthorne, Stephanie y Judy Green, «Harold and the Purple Heptagon», *Math Horizons*, 17 (2009), págs. 5-9.
Černý, Jaroslav, *Paper & Books in Ancient Egypt: An inaugural lecture delivered at University College* (Londres, 29 de mayo de 1947), Londres, 1952.
Chartier, Roger, *The Order of Books: Readers, Authors and Libraries in Europe Between the 14th and 18th Centuries*, Stanford (California), 1985 (hay trad. esp.: *El orden de los libros: lectores, autores, bibliotecas en Europa entre los siglos* XIV *y* XVIII, Gedisa, Barcelona, 2017).
Chatterjee, Rimi B., «Macmillan in India», en: E. James (ed.), *Macmillan: A publishing tradition*, Londres, 2002, págs. 153-169.
—, *Empires of the Mind: A history of Oxford University Press in India under the Raj*, Oxford, 2006.

Chemla, K., «Que signifie l'expression "mathématiques européennes" vue de Chine?», en: Catherine Goldstein, Jeremy Gray y Jim Ritter (eds.), *L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités*, París, 1996, págs. 219-245.

— (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge, 2012.

Cimatti, A. *et al.*, «SPACE: The spectroscopic all-sky cosmic explorer», *Experimental Astronomy*, 23 (2009), págs. 39-66.

Claessens, Guy, «Proclus: Imagination as a Symptom», *Ancient Philosophy*, 32 (2012), págs. 393-406.

Coffman, George R., «A Note on Saints' Legends», *Studies in Philology*, 28 (1931), págs. 580-586.

Corry, Leo, «Geometry and Arithmetic in the Medieval Traditions of Euclid's Elements: a View from Book II», *Archive for History of Exact Sciences*, 67 (2013), págs. 637-705.

Costa, Shelley, «The Ladies' Diary: Society, Gender and Mathematics in England, 1704–1754» (presentación doctoral), Universidad Cornell, 2000.

—, «The "Ladies' Diary": Gender, mathematics, and civil society in early-eighteenth-century England», *Osiris*, 17 (2002a), págs. 49-73.

—, «Marketing Mathematics in Early Eighteenth-Century England: Henry Beighton, Certainty, and the Public Sphere», *History of Science*, 40 (2002b), págs. 211-232.

Coulter, Cornelia C., «The "Terentian" Comedies of a Tenth-Century Nun», *Classical Journal*, 24 (1929), págs. 515-529.

Coxeter, H. S. M., *Non-Euclidean Geometry* (3.ª edición), Toronto, 1957.

Cuomo, S., *Ancient Mathematics*, Londres, 2001.

Curley, E. M., *Behind the Geometrical Method: A Reading of Spinoza's Ethics*, Princeton, 1988.

Cuvigny, Hélène, *L'arpentage par espèces dans l'Egypte ptolémaïque d'après les papyrus grecs*, Bruselas, 1985.

D'Elia, Pasquale M., *Galileo in China: Relations through the Roman College between Galileo and the Jesuit scientist-missionaries (1610–1640)*, Cambridge (Massachusetts), 1960.

D'Ooge, Martin Luther, Frank Egleston Robbins y Louis Charles Karpinski, *Nicomachus of Gerasa: Introduction to arithmetic*, Nueva York, 1926.

Dahan, Gilbert (ed.), *Gersonide en son temps*, Lovaina y París, 1991.

Davis, M. D., *Piero della Francesca's Mathematical Treatises: The Trattato d'abaco and Libellus de quinque corporibus regularibus*, Ravena, 1977.

De Dijn, Herman, «Conceptions of Philosophical Method in Spinoza: Logica and mos geometricus», *Review of Metaphysics*, 40 (1986), págs. 55-87.

De Risi, V., «The Development of Euclidean Axiomatics», *Archive for History of Exact Sciences*, 70 (2016), págs. 591-676.

De Young, Gregg, «The Arabic Textual Traditions of Euclid's Elements», *Historia Mathematica*, 11 (1984), págs. 147-160.

—, «Ishaq ibn Hunayn, Hunayn ibn Ishaq, and the Third Arabic Translation of Euclid's Elements», *Historia Mathematica*, 19 (1992), págs. 188-199.

— «Euclidean Geometry in the Mathematical Tradition of Islamic India», *Historia Mathematica*, 22 (1995), págs. 138-153.

—, «Euclidean Geometry in Two Medieval Islamic Encyclopaedias», *al-Masaq*, 14 (2002), págs. 47-60.

—, «The Arabic Version of Euclid's Elements by al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar: New Light on a Submerged Tradition», *Zeitschrift fur Geschichte der arabisch-islamischen Wissenchaften*, 15 (2002/2003), págs. 125-164.

—, «The Latin Translation of Euclid's Elements Attributed to Gerard of Cremona in Relation to its Arabic Antecedents», *Suhayl: Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilization*, 4 (2004), págs. 311-383.

—, «Book XVI: A Medieval Arabic Addendum to Euclid's Elements», *SCIAMVS: Sources and Commentaries in Exact Sciences*, 9 (2008), págs. 133-210.

—, «Recovering Truncated Texts: Examples from the Euclidean Transmission», en: E. Calvo, M. Comes, R. Puig y M. Ruis (eds.), *A Shared Legacy: Islamic Science East and West*. Barcelona, 2008, págs. 247-281.

—, «The Tahrir Kitab Usul Uqlidis of Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī: Its Sources», *Zeitschrift fur Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 18 (2009), págs. 1-71.

Dear, Peter, *Discipline & Experience: The mathematical way in the scientific revolution*, Chicago, 1995.

Della Rocca, Michael (ed.), *The Oxford Handbook of Spinoza*, Nueva York, 2018.

Demornex, Jacqueline y Patricia Canino, *Madeleine Vionnet*, Londres, 1991.

Di San Lazzaro, G. (ed.), *Homage to Max Ernst* [número especial de *XXe Siecle Review*], Nueva York, 1971.

Diehl, Gaston (tr. Eileen Hennessy), *Max Ernst*, Nueva York, 1973.

Diehl, Robert, *Erhard Ratdolt, ein Meisterdrucker des* XV. *und* XVI. *Jahrhunderts*, Viena, 1933.

Dilke, O. A. W., *The Roman Land Surveyors: An introduction to the agrimensores*, Newton Abbott, 1971.

Dimitriadis, Kimberley, «Telescopes in the Drawing-Room: Geometry and Astronomy in George Eliot's The Mill on the Floss», *Journal of Literature and Science*, 11 (2018), págs. 1-19.

Djebbar, Ahmed, «Quelques Commentaires sur les Versions arabes des Eléments d'Euclide et sur leur Transmission à l'Occident Musulman», en:

Menso Folkerts (ed.), *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden, 1996, págs. 91-114.
—, «Quelques exemples de scholies dans la tradition arabe des Eléments d'Euclide», *Revue d'Histoire des Sciences*, 56 (2003), págs. 293-321.
Dodgson, Charles Lutwidge, *Euclid and His Modern Rivals*, Londres, 1879, 1885.
Dubow, Saul (ed.), *The Rise and Fall of Modern Empires II: Colonial Knowledge*, Farnham, 2013.
Dzielska, Maria (tr. F. Lyra), *Hypatia of Alexandria*, Cambridge (Massachusetts), 1995 (hay trad. esp.: *Hipatia de Alejandría*, Siruela, Madrid, 2006).
Eagles, C. M., «The Mathematical Work of David Gregory, 1659–1708» (presentación doctoral), Universidad de Edimburgo, 1977.
Edgerton, Samuel Y., *The Heritage of Giotto's Geometry. Art and Science on the Eve of the Scientific Revolution*, Ithaca, 1991.
Edwards, M. J., *Neoplatonic Saints: The lives of Plotinus and Proclus by their students*, Liverpool, 2000.
Eisenstein, Elizabeth, *The Printing Revolution in Early Modern Europe* (2.ª edición), Cambridge, 2005.
Eisner, Caroline L., «Shifting the Focus: Anne Lister as Pillar of Conservatism», *Auto/Biography Studies*, 17 (2001), págs. 28-42.
El-Abbadi, Mostafa, *The Life and Fate of the Ancient Library of Alexandria*, París, 1990.
Elior, Ofer, «The Arabic Tradition of Euclid's Elements Preserved in the Latin Translation by Adelard of Bath and the Hebrew Translation by Rabbi Jacob», *Historia Mathematica*, 45 (2018), págs. 111-130.
Elkins, James, «Piero della Francesca and the Renaissance Proof of Linear Perspective», *Art Bulletin*, 69 (1987), págs. 220-230.
Ellis, Walter M., *Ptolemy of Egypt*, Londres, 1994.
Encyclopedia Iranica: iranicaonline.org.
Endress, Gerhard, «The Circle of Al-Kindī. Early Arabic Translations from the Greek and the Rise of Islamic Philosophy», en: Gerhard Endress, Remke Kruk y H. J. Drossaart Lulofs (eds.), *The Ancient Tradition in Christian and Islamic Hellenism*, Leiden, 1997, págs. 43-76.
Engelfriet, Peter M., *Euclid in China: The genesis of the first Chinese translation of Euclid's Elements, books* I-VI *(Jihe yuanben, Beijing, 1607) and its reception up to 1723*, Leiden, 1998.
—, «The Chinese Euclid and its European context», en: Catherine Jami y Hubert Delahaye (eds.), *L'Europe en Chine: interactions scientifiques, religieuses et culturelles aux* XVIIe *et* XVIIIe *siècles*, París, 1993, págs. 111-135.

Erskine, Andrew (ed.), *A Companion to the Hellenistic World*, Blackwell, 2003.
Evans, G. R., «The “Sub-Euclidean” Geometry of the Earlier Middle Ages», *Archive for History of Exact Sciences*, 16 (1977), págs. 105-118.
Evans, Michael, «Allegorical Women and Practical Men: The Iconography of the Artes Reconsidered», *Studies in Church History*, 1 (1978), págs. 305-329.
Farmanfarmaian, Monir Shahroudy y Zara Houshmand, *A Mirror Garden*, Nueva York, 2007.
Febvre, Lucien y Henri-Jean Martin (tr. D. Gerard), *The Coming of the Book: The Impact of Printing 1450–1800*, Londres, 1976 (publicado originalmente 1958).
Feingold, Mordechai (ed.), *Jesuit Science and the Republic of Letters*, Cambridge (Massachusetts), 2002.
Feldman, Seymour, *Gersonides: Judaism within the limits of reason*, Oxford, 2010.
Field, J. V., «Perspective and the Mathematicians: Alberti to Desargues», en: C. Hay (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print, 1300–1600*, Oxford, 1988, págs. 236-263.
— «Piero della Francesca as a Practical Mathematician: The painter as teacher», en: Marisa Dalai Emiliani y Valter Curzi (eds.), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Venecia, 199, págs. 331-354.
—, «Alberti, the Abacus and Piero della Francesca’s Proof of Perspective», *Renaissance Studies*, 11 (1997), págs. 61-88.
—, *Piero Della Francesca: A mathematician’s art*, New Haven, 2005.
Fife, Robert Herndon, *Hroswitha of Gandersheim*, Nueva York, 1947.
Fleet, Kate *et al.* (eds.), *Encyclopaedia of Islam* (3.ª edición, brill.com).
Flood, Raymond, Adrian C. Rice y Robin Wilson, *Mathematics in Victorian Britain*, Oxford, 2011.
Folkerts, Menso, *“Boethius” Geometrie II*, Wiesbaden, 1970.
—, *Essays on Early Medieval Mathematics: The Latin tradition*, Aldershot, 2003.
—, *The Development of Mathematics in Medieval Europe: The Arabs, Euclid, Regiomontanus*, Aldershot, 2006.
Fowler, D. H., *The Mathematics of Plato’s Academy: A new reconstruction*, Oxford, 1987, 1999.
Frankforter, A. Daniel, «Hroswitha of Gandersheim and the Destiny of Women», *Historian*, 4 (1979), págs. 295-314.
Frantz, Alison, Homer A. Thompson y Ioannes N. Traulos, *Late Antiquity, A. D. 267–700*, Princeton, 1988.
Fraser, P. M., *Ptolemaic Alexandria*, Oxford, 1972.

Freudenthal, G. (ed.), *Studies on Gersonides – A Fourteenth Century Jewish Philosopher-Scientist*, Leiden, 1992.

— «Science in the Medieval Jewish Culture of Southern France», *History of Science*, 33 (1995), págs. 23-58.

—, *Science in the Medieval Hebrew and Arabic Traditions*, Aldershot, 2005.

Gamwell, Lynn, *Mathematics + Art: A cultural history*, Princeton, 2016.

Garrett, A. V., *Meaning in Spinoza's Method*, Cambridge, 2003.

Garrett, Don (ed.), *The Cambridge Companion to Spinoza*, Cambridge, 1996.

Gatt, Giuseppe, *Max Ernst*, Londres, 1970.

Geatti, Laura y Luciano Fortunati, «The Flagellation of Christ by Piero della Francesca: A Study of Its Perspective», *Leonardo*, 25 (1992), págs. 361-367.

Gernet, Jacques, *China and the Christian Impact: A conflict of cultures*, Cambridge, 1985.

Geymonat, M., «Arithmetic and Geometry in Ancient Rome: Surveyors, intellectuals, and poets», *Nuncius*, 24 (2009), págs. 11-34.

Giliot, Claude (ed.), *Education and Learning in the Early Islamic World*, Farnham, 2012.

Glasner, Ruth, *Gersonides: A portrait of a fourteenth-century philosopher scientist*, Oxford, 2015.

Glucker, John, *Antiochus and the late Academy*, Gotinga, 1978.

Goldstein, Bernard R., «The Role of Science in the Jewish Community in Fourteenth Century France», *Annals of the New York Academy of Sciences*, 314 (1978), págs. 39-49.

Goodrich, L. Carrington y Zhaoying Fang, *Dictionary of Ming biography, 1368–1644*, Nueva York, 1976.

Gossett, Suzanne, «Blame Not our Author», *Collections of the Malone Society* (1983), págs. 85-132.

Goulding, Robert, *Defending Hypatia: Ramus, Savile, and the Renaissance Rediscovery of Mathematical History*, Dordrecht, 2010.

Grafton, Anthony, *Defenders of the Text: The traditions of scholarship in an age of science, 1450–1800*, Cambridge (Massachusetts), 1991.

—, *Commerce with the Classics: Ancient Books and Renaissance Readers*, Ann Arbor (Michigan), 1997.

Grattan-Guinness, I., «Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How did he handle them?», *Historia Mathematica*, 23 (1996), págs. 355-375.

Gray, Jeremy, «Non-euclidean Geometry — A re-interpretation», *Historia Mathematica*, 6 (1979), págs. 236-258.

—, *Ideas of Space: Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*, Oxford, 1979, 1989 (hay trad. esp.: *Ideas de espacio*, Mondadori, Madrid, 1992).

—, *Worlds Out of Nothing: A course in the history of geometry in the 19th century*, Londres, 2007.
Green, Peter, *Alexander the Great and the Hellenistic Age: A short history*, Londres, 2008.
Gregory, David, Ευκλειδου τα σωζομενα. *Euclidis qua supersunt omnia*, Oxford, 1703.
Guicciardini, Niccolo, *Reading the Principia: The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge, 1999.
—, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, Cambridge (Massachusetts), 2009.
Gutas, Dimitri, *Greek Thought, Arabic Culture. The Graeco-Arabic Translation Movement in Baghdad and Early Abbasid Society (2nd–4th/8th–10th centuries)*, Londres y Nueva York, 1998.
Haas, Christopher, *Alexandria in Late Antiquity: Topography and social conflict*, Baltimore, 1997.
Haight, Anne Lynn, *Hroswitha of Gandersheim*, Nueva York, 1965.
Haight, Gordon Sherman (ed.), *The George Eliot letters*, Londres, 1954-1978.
Harari, Orna, «Methexis and Geometrical Reasoning in Proclus' Commentary on Euclid's Elements», *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, 30 (2006), págs. 361-389.
Harris, Margaret y Judith Johnston, *The Journals of George Eliot*, Cambridge, 1998.
Harrison, John, *The Library of Isaac Newton*, Cambridge, 1978.
Hart, Roger, *Imagined Civilizations: China, the West, and their first encounter*, Baltimore, 2013.
Haskins, C. H., *Studies in the History of Mediaeval Science*, Cambridge (Massachusetts), 1924.
—, *The Renaissance of the 12th Century*, Cambridge (Massachusetts), 1927.
Hawes, Susan M. y Sid Kolpas, «Oliver Byrne: The Matisse of Mathematics – Biography 1810–1829», *Convergence* (maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematicsbiography-1810-1829).
Heath, Thomas Little, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1908, 1926.
—, *Euclid in Greek Book I*, Cambridge, 1920.
—, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921.
—, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford, 1931
—, *Greek Astronomy*, Londres, 1932.
—, «Introduction», en: Isaac Todhunter (ed.), *The Elements of Euclid*, Londres, 1932.
—, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949.

Hirst, Anthony y M. S. Silk, *Alexandria, Real and Imagined*, Aldershot, 2004.
Hobbes, Thomas, *Elementa philosophica de cive*, Ámsterdam, 1647 (hay trad. esp.: *De cive: Elementos filosóficos sobre el ciudadano*, Alianza, Madrid, 2016).
—, *Examinatio & emendatio mathematica hodierna*, Londres, 1660.
Hockey, Thomas *et al.* (eds.), *Biographical Encyclopedia of Astronomers*, Nueva York, 2014.
Hogendijk, J. P. «The Arabic Version of Euclid's On Divisions», en: Folkerts y Hogendijk (1993), págs. 143-162.
Holbl, Gunther (tr. Tina Saavedra), *A History of the Ptolemaic Empire*, Londres, 2001.
Hopkins, D., «Hermetic and Philosophical Themes in Max Ernst's Vox Angelica and Related Works», *Burlington Magazine*, 134 (1992), págs. 716-723.
Horowitz, Maryanne Cline (ed.), *New Dictionary of the History of Ideas*, Detroit, 2005.
Houvet, E., *Cathedrale de Chartres: portail occidental ou royal, XIIe siecle*, Chelles, 1919.
Hoyrup, Jens, *In Measure, Number, and Weight. Studies in mathematics and culture*, Albany, 1994.
Hsia, Florence, *Sojourners in a Strange Land: Jesuits and Their Scientific Missions in Late Imperial China*, Chicago, 2010.
Hsia, Florence, «Roger Hart. Imagined Civilizations: China, the West, and Their First Encounter» (reseña), *Isis*, 106 (2015), págs. 713-716.
Hsia, R. P. *A Jesuit in the Forbidden City, Matteo Ricci, 1552–1610*, Oxford, 2010.
Hughes, Patricia, *The Early Life of Miss Anne Lister and the Curious Tale of Miss Eliza Raine*, Peterborough, 2014.
Hunt, Richard William, *The Survival of Ancient Literature: Catalogue of an exhibition of Greek and Latin classical manuscripts mainly from Oxford libraries*, Oxford, 1975.
Hutton, Charles (ed.), *The Diarian Miscellany*, Londres, 1775.
Iafrate, Allegra (ed.), *Matthieu Paris, Le moine et le hazard: Bodleian Library, MS Ashmole 304*, París, 2015.
Imhausen, Annette, *Mathematics in Ancient Egypt: A contextual history*, Princeton, 2016.
Irigoin, J., «Survie et renouveau de la littérature antique à Constantinople (IXe siècle)», *Cahiers de civilisation medievale*, 5 (1962), págs. 287-302.
Isham, Thomas (eds. Robert Isham y Walter Rye), *The Journal of Thomas Isham, of Lamport: … from 1st Nov., 1671, to 30th Sept. 1673*, Norwich, 1875.

Isham, Thomas (ed. Gyles Isham), *The Diary of Thomas Isham of Lamport (1658–81)*, Farnborough, 1971.

Jackson, H. J., *Marginalia: readers writing in books*, New Haven, 2001.

Jami, Catherine, «From Clavius to Pardies: The geometry transmitted to China by Jesuits (1607–1723)», en: Federico Masini (ed.), *Western Humanistic Culture Presented to China by Jesuit Missionaries (XVII-XVIII centuries)*, Roma, 1996, págs. 175-199.

—, Peter M. Engelfriet y Gregory Blue (eds.), *Statecraft and Intellectual Renewal in Late Ming China: The Cross-Cultural Synthesis of Xu Guangqi (1562–1633)*, Leiden, 2001.

—, *The Emperor's New Mathematics: Western Learning and Imperial Authority During the Kangxi Reign (1662–1722)*, Oxford, 2011.

Jardine, Nicholas, «The Forging of Modern Realism: Clavius and Kepler against the sceptics», *Studies in History and Philosophy of Science*, 10 (1979), págs. 141-173.

Jenkins, Alice, *Space and the 'March of Mind': Literature and the Physical Sciences in Britain, 1815–1880*, Oxford, 2007.

—, «George Eliot, Geometry and Gender», en: Sharon Ruston (ed.), *Literature and Science: Essays and Studies 2008 for the English Association*, Cambridge, 2008, págs. 72-90.

—, «Mathematics and Mental Health in Early Nineteenth century England», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 25 (2010), págs. 92-103.

Jesseph, Douglas, «Galileo, Hobbes, and the Book of Nature», *Perspectives on Science*, 12 (2004), págs. 191-211.

Johnson, Crockett, «On the Mathematics of Geometry in My Abstract Paintings», *Leonardo*, 5 (1972), págs. 97-101.

Jones, Keith, «Education, Class and Gender in George Eliot and Thomas Hardy» (presentación doctoral), Universidad de Nueva Hampshire, 1995.

Jones, Matthew L., *The Good Life in the Scientific Revolution: Descartes, Pascal, Leibniz, and the cultivation of virtue*, Chicago, 2006.

Kamitsis, Lydia, *Vionnet*, Londres, 1996.

Katz, Victor J., *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A sourcebook*, Princeton, 2007.

—, *Sourcebook in the Mathematics of Medieval Europe and North Africa*, Princeton, 2016.

Katzenellenbogen, Adolf, *The Sculptural Programs of Chartes Cathedral*, Baltimore, 1959.

Kellner, Menachem, «Gersonides on the Role of the Active Intellect in Human Cognition», *Hebrew Union College Annual* (1994), págs. 233-259.

—, «Gersonides on the Song of Songs and the Nature of Science», *Journal of Jewish Thought and Philosophy*, 4 (1995), págs. 1-21.

Kemp, Martin, *Structural Intuitions: Seeing shapes in art and science*, Charlottesville, 2016.

Kennedy, E. S., «Applied Mathematics in the Tenth Century: Abu'l-wafa' calculates the distance Baghdad-Mecca», *Historia Mathematica*, 11 (1984), págs. 193-206.

Kennedy, Hugh, *The Early Abbasid Caliphate: A political history*, Londres, 1981.

—, *When Baghdad Ruled the Muslim World: The rise and fall of Islam's greatest dynasty*, Cambridge (Massachusetts), 2005.

Kerr, J., *A Review of Public Instruction in the Bengal Presidency from 1835 to 1851*, Calcuta, 1852.

Keyser, Paul T. y Georgia L. Irby (eds.), *The Encyclopedia of Ancient Natural Scientists: The Greek tradition and its many heirs*, Londres, 2008.

Kheirandish, Elaheh, «Science and Mithal: Demonstrations in Arabic and Persian Scientific Traditions», *Iranian Studies*, 41 (2008), págs. 465-489.

Kidwell, Peggy Aldrich, «The Mathematical Paintings of Crockett Johnson, 1965–1975: An Amateur and His Sources», en Anne Collins Goodyear y Margaret A. Weitekamp (eds.), *Analyzing Art and Aesthetics*, Washington, 2013, págs. 198-211.

Knitter, Brian, «Thierry of Chartres and the West Facade Sculpture of Chartres Cathedral», San Jose State University, 2000.

Knobloch, E., «Sur la vie et l'œuvre de Christophore Clavius (1538–1612)», *Revue d'Histoire des Sciences*, 41 (1988), págs. 331-356.

Knorr, W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements: A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*, Dordrecht, 1975.

—, «On the Transmission of Geometry from Greek into Arabic», *Historia Mathematica*, 10 (1983), págs. 71-78.

—, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston, 1989.

—, «The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's text and its alternatives», *Centaurus*, 38 (1996), págs. 208-276.

—, «On Heiberg's Euclid», *Science in Context*, 14 (2001), págs. 133-143.

Koistinen, Olli, *The Cambridge Companion to Spinoza's Ethics*, Cambridge, 2009.

Kraemer, Joel L., *Humanism in the Renaissance of Islam: The Cultural Revival During the Buyid Age* (2.ª edición), Leiden, 1992.

Kunitzsch, Paul, «"The Peacock's Tail": On the names of some theorems of Euclid's Elements», en: Folkerts y Hogendijk (1993), págs. 205-214.

Lamprecht, Elizabeth, «The Life of Mary Fairfax Somerville, Mathematician and Scientist: a Study in Contrasts», *Michigan Academician*, 42 (2015),

págs. 1-25.
Langins, Janis, «Histoire de la vie et des fureurs des François Peyrard, Bibliothécaire de l'Ecole polytechnique de 1795 à 1804 et traducteur renomme d'Euclide et d'Archimède», *Bulletin de la SABIX*, 3 (1989), sabix.revues.org/556.
Larkin, David, *Max Ernst*, Nueva York, 1975.
Lassner, Jacob, *The Topography of Baghdad in the Early Middle Ages*, Detroit, 1970.
Lassner, Jacob, *The Shaping of Abbasid Rule*, Princeton, 1980.
Lattis, James, *Between Copernicus and Galileo: Christoph Clavius and the collapse of Ptolemaic cosmology*, Chicago, 1994.
Laureijs, R. *et al.*, *Euclid: Mapping the Geometry of the Dark Universe. Definition study report*, 2011.
Lavin, Marilyn Aronberg, *Piero della Francesca: The flagellation*, Londres, 1972.
Lee, Peter M., «George Eliot and Mathematics», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 31 (2016), pág. 154.
Leeke, John y George Serle (eds.), *Euclid's Elements of Geometry*, Londres, 1661.
Lemerle, Paul (trs. Helen Lindsay y Ann Moffatt), *Byzantine Humanism: The first phase: notes and remarks on education and culture in Byzantium from its origins to the 10th century*, Canberra, 1986.
Levy, Tony, «Gersonide, commentateur d'Euclide: Traduction annotée de ses gloses sur les Eléments», en: Freudenthal (1992), págs. 83-147.
—, «Gersonide, le Pseudo-Tusi, et le postulat des parallèles. Les Mathématiques en Hébreu et leurs sources arabes», *Arabic Sciences and Philosophy*, 2 (1992), págs. 39-82.
—, «The Establishment of the Mathematical Bookshelf of the Medieval Hebrew Scholar: Translations and translators», *Science in Context*, 10 (1997), págs. 431-451.
—, «Une version hébraïque inédite des Eléments d'Euclide», en: Danielle Jacquart (ed.), *Les voies de la science grecque. Etudes sur la transmission des textes de l'Antiquité au dix-neuvième siècle*, Ginebra, 1997, págs. 181-239.
—, «Les Eléments d'Euclide en hébreu (XIIIe–XVIe siècles)», en: Ahmed Hasnawi, Abdelali Elamrani-Jamal y Maroun Aouad (eds.), *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*, Lovaina y París, 1997, págs. 79-94.
—, «The Hebrew Mathematics Culture (Twelfth–Sixteenth Centuries)» en: Gad Freudenthal (ed.), *Science in Medieval Jewish Cultures*, Cambridge, 2011, págs. 155-171.

Lewis, M. J. T., *Surveying Instruments of Greece and Rome*, Cambridge, 2001.
Lewis, Naphtali, *Papyrus in Classical Antiquity*, Oxford, 1974.
—, *Greeks in Ptolemaic Egypt: Case studies in the social history of the Hellenistic world*, Oxford, 1986.
Leybourn, Thomas (ed.), *The mathematical questions, proposed in the Ladies' diary, and their original answers: together with some new solutions, from its commencement in the year 1704 to 1816*, Londres, 1817.
Liddington, Jill, «Anne Lister of Shibden Hall, Halifax (1791–1840): Her Diaries and the Historians», *History Workshop Journal*, 35 (1993), págs. 45-77.
—, *Presenting the Past: Anne Lister of Halifax (1791–1840)*, Hebden Bridge, 1994.
—, «Gender, Authority and Mining in an Industrial Landscape: Anne Lister 1791–1840», *History Workshop Journal*, 42 (1996), págs. 58-86.
—, *Female Fortune: land, gender, and authority: the Anne Lister diaries and other writings, 1833–36*, Londres, 1998.
Lister, Anne (ed. Muriel M. Green), *Miss Lister of Shibden Hall: Selected letters (1800–1840)*, Lewes, 1992.
— (ed. Helena Whitbread), *The Secret Diaries of Miss Anne Lister (1791–1840)*, Londres, 2010 (hay ed. esp.: *Caballero Jack: los diarios de Anne Lister*, Ménades, Madrid, 2019).
Lloyd, G. E. R., *Greek Science after Aristotle*, Londres, 1973.
Lloyd, Genevieve, *Spinoza and the Ethics*, Londres, 1996.
Lloyd-Jones, Hugh, reseña de *Vanished Library*, *New York Review of Books* (14 de junio de 1990), págs. 27-29.
Lo Bello, Anthony, *The commentary of Al-Nayrizi on Book I of Euclid's Elements of geometry, with an introduction on the transmission of Euclid's Elements in the Middle Ages*, Boston, 2003.
Lobachevskii, N. I. (tr. George Bruce Halsted), *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*, Austin, 1891.
Locke, John, *Posthumous Works*, Londres, 1706.
Lord, Beth, *Spinoza's Ethics: An Edinburgh Philosophical Guide*, Edimburgo, 2010.
Lucke-David, Susanne, *Max Ernst "Euclid": Ein mentales Vexierbild*, Recklinghausen, 1994.
Maclean, Ian, *Scholarship, Commerce, Religion: The Learned Book in the Age of Confessions, 1560–1630*, Cambridge (Massachusetts) y Londres, 2012.
MacLeod, Roy M., *The Library of Alexandria: Centre of learning in the ancient world*, Londres, 2000.

Madan, Falconer, *A summary catalogue of Western manuscripts in the Bodleian Library at Oxford IV: Collections received during the first half of the 19th century*, Oxford, 1897.
Mancha, J. L., «Levi ben Gerson's astronomical work: Chronology and Christian context», *Science in Context*, 10 (1997), págs. 471-493.
Mandelbrote, Scott, *Footprints of the Lion: Isaac Newton at work*, Cambridge, 2001.
Mantas-España, Pedro, «Was Adelard in Spain? Transmission of knowledge in the first half of the twelfth century», en: Charles Burnett y Pedro Mantas-España (eds.), *Mapping Knowledge. Cross-Pollination in Late Antiquity and the Middle Ages*, Córdoba, 2014, págs. 195-208.
Manturov, O. V., «Nikolai Ivanovich Lobachevskii (on the bicentenary of his birth)», *Russian Mathematical Surveys*, 48 (1993), págs. 1-13.
Mark, T. C., «Ordine geometrica demonstrata: Spinoza's Use of the Axiomatic Method», *Review of Metaphysics*, 29 (1975), págs. 263-286.
Marlowe, John, *The Golden Age of Alexandria: From its foundation by Alexander the Great in 331 bc to its capture by the Arabs in 642 ad*, Londres, 1971.
Marrou, Henri Irénée, *Histoire de l'éducation dans l'antiquité*, París, 1948.
Marta, Karen (ed.), *Monir Shahroudy Farmanfarmaian: Works on paper*, Zúrich, 2015.
Martzloff, J.-C., «La géométrie euclidienne selon Mei Wending», *Historia Scientiarum*, 21 (1981), págs. 27-42.
—, «Clavius traduit en chinois», en: Luce Girard (ed.), *Les jésuites a la Renaissance*, (París, 1995), págs. 309-322.
Masi, Michael (ed.), *Boethian Number Theory: A translation of the De institutione arithmetica (with introduction and notes)*, Ámsterdam, 1983.
Matthew, H. C. G. y Brian Harrison (eds.), *Oxford Dictionary of National Biography: From the earliest times to the year 2000*, Oxford, 2004.
Mau, Jurgen y Wolfgang Muller, «Mathematische ostraka aus der Berliner Sammlung», *Archiv für Papyrusforschung*, 17 (1960), págs. 1-10.
Mazzio, Carla, «The Three-dimensional Self: Geometry, Melancholy, Drama», en: David Glimp y Michelle R. Warren (eds.), *Arts of Calculation: Quantifying thought in early modern Europe*, Nueva York, 2004, págs. 39-65.
Mcdonald-Miranda, Kathryn A., «Hrotsvit of Gandersheim: Her Works and Their Messages», Cleveland State University, 2010.
McKeon, Richard, «Causation and the Geometric Method in the Philosophy of Spinoza», *Philosophical Review*, 39 (1930), págs. 178-189 y 275-296.
Mercier, Franck, «Le salut en perspective: Un essai d'interprétation de la Flagellation du Christ de Piero della Francesca», *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations*, 72 (2017), págs. 737-771.

Meskens, Ad, *Travelling Mathematics: The fate of Diophantos' arithmetic*, Basilea, 2010.
Metzger, Bruce M., *The Text of the New Testament: Its transmission, corruption, and restoration*, Oxford, 1964.
Mez, Adam (tr. Khuda Bakhsh), *The Renaissance of Islam*, Londres, 1937 (reimpresión: Nueva York, 1975).
Michaud, Louis-Gabriel, *Biographie universelle ancienne et moderne vol. 32*, París, 1843.
Moktefi, Amirouche, «How to Supersede Euclid: Geometrical teaching and the mathematical community in nineteenth-century Britain», en: Amanda Mordavsky Caleb (ed.), *(Re)Creating Science in Nineteenth-Century Britain*, Newcastle, 2007, págs. 216-229.
—, «Geometry: the Euclid debate», en: Flood, Rice y Wilson (2011), págs. 320-336.
Montanari, Franco, Stephanos Matthaios y Antonios Rengakos (eds.), *Brill's Companion to Ancient Scholarship*, Leiden, 2014.
Moody, E. A. y M. Clagett, *The Medieval Science of Weights*, Madison, 1952.
Mueller Ian, «Iamblichus and Proclus' Euclid Commentary», *Hermes*, 115 (1987), págs. 334-348.
—, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Massachusetts), 1981.
Murdoch, J. E., «Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto unknown medieval Latin translation of the Elements made directly from the Greek», *Harvard studies in Classical philology*, 71 (1966), págs. 249-302.
—, *Antiquity and the Middle Ages* [Album of Science], Nueva York, 1984.
Nadler, Steven, *Spinoza: A Life*, Cambridge, 1999 (hay trad. esp.: *Spinoza, una vida*, Acento, Madrid, 2004).
—, *Spinoza's Ethics: An Introduction*, Cambridge, 2006.
Nasifoglu, Yelda, «Embodied Geometry in Early Modern Theatre», en: Justin E. H. Smith (ed.), *Embodiment*, Oxford, 2017, págs. 311-316.
—, «Reading by Drawing. The Changing Nature of Mathematical Diagrams in Seventeenth-Century England», en: Beeley, Nasifoglu y Wardhaugh (2020).
Neeley, Kathryn A., *Mary Somerville: Science, illumination, and the female mind*, Cambridge, 2001.
Nel, Philip, *Crockett Johnson and Ruth Krauss: How an Unlikely Couple Found Love, Dodged the FBI, and Transformed Children's Literature*, Jackson, 2012.
Netz, Reviel, «Classical Mathematics in the Classical Mediterranean», *Mediterranean Historical Review*, 12 (1997), págs. 1-24.
—, «Deuteronomic Texts: Late antiquity and the history of mathematics», *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), págs. 261-288.

—, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A study in cognitive history*, Cambridge, 1999.
—, «Counter Culture: Towards a history of Greek numeracy», *History of Science*, 40 (2002), págs. 321-352.
—, «Greek Mathematicians: A Group Picture», en: C. J. Tuplin, T. E. Rihll y Lewis Wolpert (eds.), *Science and Mathematics in Ancient Greek Culture*, Oxford, 2002, págs. 196-216.
—, *From Problems to Equations: A study in the transformation of early Mediterranean mathematics*, Cambridge, 2004.
—, *Ludic Proof: Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic*, Cambridge, 2008.
—, «The Texture of Archimedes' Writings: Through Heiberg's veil», en: Chemla (2012), págs. 163-205.
Neuenschwander, E., «Die ersten vier Bucher der Elemente Euklids: Untersuchungen uber den mathematischen Aufbau, die Zitierweise und die Entstehungsgeschichte», *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1973), págs. 325-380.
—, «Die stereometrischen Bucher der Elemente Euklids. Untersuchungen uber den mathematischen Aufbau und die Entstehungsgeschichte», *Archive for History of Exact Sciences*, 14 (1974), págs. 91-125.
Nicolson, Marjorie Hope y Sarah Hutton (eds.), *The Conway Letters: The correspondence of Anne, Viscountess Conway, Henry More, and their friends, 1642–1684*, Oxford, 1992.
Nikulin, Dmitri, «Imagination and Mathematics in Proclus», *Ancient Philosophy*, 28 (2008), págs. 153-172.
Nordqvist, Nils, *Erhard Ratdolt: Euklidestryckaren i Venedig, liturgtryckaren i Augsburg*, Estocolmo, 1961.
O'Meara, Dominic J., *Pythagoras Revived: Mathematics and philosophy in late antiquity*, Oxford, 1989.
Obrist, Hans Ulrich y Karen Marta, *Monir Shahroudy Farmanfarmaian: cosmic geometry*, Bolonia, 2011.
Olmos, Paula (ed.), *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th c. bcE–17th c. cE)*, Newcastle, 2012.
Oosterhoff, Richard J., *Making Mathematical Culture: University and Print in the Circle of Lefevre d'Étaples*, Oxford, 2018
Ozdural, Alpay, «Omar Khayyam, mathematicians, and convesazioni with artisans», *Journal of the Society of Architectural Historians*, 54 (1995), págs. 54-71.
—, «Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World», *Historia Mathematica*, 27 (2000), págs. 171-201.

Palmer, William, «Images of Knowledge: The seven liberal arts and their representation in Medieval and Renaissance art», California State University, 2002.
Patterson, Elizabeth C., «Mary Somerville», *British Journal for the History of Science*, 4 (1969), págs. 311-339.
Peden, G. C., *The Treasury and British Public Policy, 1906–1959*, Oxford, 2000.
Pépin, J. y H. D. Saffrey (eds.), *Proclus, lecteur et interprète des Anciens*, París, 1987.
Perl, Teri, «The Ladies' Diary or Woman's Almanack, 1704–1841», *Historia Mathematica*, 6 (1979), págs. 36-53.
Peyrard, F., *Les Oeuvres d'Euclide*, París, 1804.
—, *Les Oeuvres d'Euclide*, París, 1814-1818.
Pfeiffer, Rudolf, *History of Classical Scholarship from 1300 to 1850*, Oxford, 1976.
—, *History of Classical Scholarship: From the beginnings to the end of the Hellenistic age*, Oxford, 1968.
Poincaré, Henri (tr. W. J. Greenstreet), *'Non-Euclidean Geometries' in Science and hypothesis*, Londres, 1905, págs. 42-59.
Porten, Bezalel, *The Elephantine Papyri in English: Three millennia of cross-cultural continuity and change*, Leiden, 1996.
Price, Audrey, «Pure and Applied: Christopher Clavius's Unifying Approach to Jesuit Mathematics Pedagogy» (presentación doctoral), Universidad de California, 2017.
Proclo (tr. y ed. Glenn R. Morrow), *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton, 1970, 1992.
Quinn, Edward, *Max Ernst*, Londres, 1977.
Qurbani, Abu al-Qasim y Muhsin Haydarniya, Nabighah-'i Buzjan: guzidah-I maqalat-i Siminar-i Bayn al-Milali-i Abu al-Vafa-yi Buzjani / Seminario internacional sobre Abú al-Wafá Buzdjani (Teherán, 2002).
Raven, James, «Printing and Printedness», en: *The Oxford Handbook of Early Modern European History, 1350–1750 vol. I: Peoples and Places*, Oxford, 2015.
Raynaud, Dominique, «Les débats sur les fondements de la perspective linéaire de Piero della Francesca a Egnatio Danti: un cas de mathématisation à rebours», *Early Science and Medicine*, 15 (2010), págs. 474-504.
—, «Abu al-Wafa' Latinus? A study of method», *Historia Mathematica*, 39 (2012), págs. 34-83.
Redgrave, Gilbert R., *Erhard Ratdolt and His Work at Venice: A Paper Read before the Bibliographical Society November 20, 1893*, Londres, 1894.

Refregier, A. *et al.*, «The DUNE Collaboration», *Experimental Astronomy*, 23 (2009), págs. 17-37.
Reynolds, L. D. y N. G. Wilson, *Scribes and Scholars: A guide to the transmission of Greek and Latin literature*, Londres, 1968 (4.ª edición, Oxford, 2013).
Richards, Joan L., *Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England*, Boston, 1988.
Richter, Fleur, *Die Asthetik geometrischer Korper in der Renaissance*, Stuttgart, 1995.
Risk, R. Terry, *Erhard Ratdolt: Master Printer*, Francestown, 1982.
Roberts, Colin H. y T. C. Skeat, *The Birth of the Codex*, Londres, 1983.
Robinson, Chase F. (ed.), *New Cambridge History of Islam I: The formation of the Islamic world, sixth to eleventh centuries*, Cambridge, 2010.
Robson, Eleanor, «Influence, Ignorance, or Indifference? Rethinking the relationship between Babylonian and Greek mathematics», *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 4 (2005), págs. 1-17.
— y Jacqueline A. Stedall, *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford, 2009.
Rommevaux, Sabine, *Clavius: une clé pour Euclide au XVIe siècle*, París, 2005.
—, Ahmed Djebbar y Bernard Vitrac, «Remarques sur l'Histoire du Texte des Eléments d'Euclide», *Archive for History of Exact Sciences*, 55 (2001), págs. 221-295.
Rosan, Laurence Jay, *The Philosophy of Proclus: The final phase of ancient thought*, Nueva York, 1949.
Rose, Paul L., *The Italian Renaissance of Mathematics: Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Ginebra, 1975.
Rosenthal, Franz, *The Classical Heritage in Islam*, Berkeley, 1975.
Rowlandson, Jane y Andrew Harker, «Roman Alexandria from the Perspective of the Papyri», en: Hirst y Silk (2004), págs. 79-112.
Rudorff, Adolf August Friedrich, Karl Lachmann y Friedrich Blume (eds.), *Die Schriften der römischen Feldmesser*, Berlín, 1848.
Russo, L. «The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements», *Archive for History of Exact Sciences*, 52 (1998), págs. 195-219.
Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics* (2.ª edición), Londres, 1937 (hay trad. esp.: *Los principios de la matemática*, Espasa Libros, Barcelona, 1983).
Sachs, E. *Die fünf platonischen Körper*, Berlín, 1917.
Saffrey, Henri-Dominique, «Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω. Une inscription légendaire», *Revue des Études Grecques*, 81 (1968), págs. 67-87.

Sarhangi, Reza, «Illustrating Abu al-Wafa’ Buzjani: Flat Images, Spherical Constructions», *Iranian Studies*, 41 (2008), págs. 511-523.

Savile, Henry, *Pralectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis*, Oxford, 1621.

Schiaparelli, Elsa, *Shocking Life*, Londres, 1954.

Schneede, Uwe M. (tr. R. W. Last), *The Essential Max Ernst*, Londres, 1972.

Secrest, Meryle, *Elsa Schiaparelli: A biography*, Londres, 2014.

Sen, S. N., *Scientific and Technical Education in India 1781–1900*, Nueva Delhi, 1991.

Simonson, S., «The Missing Problems of Gersonides – A critical edition», *Historia Mathematica*, 27 (2000), págs. 243-302 y 384-431.

Siorvanes, Lucas, *Proclus: Neo-platonic philosophy and science*, Edimburgo, 1996.

Smith, D. E., «Heath’s Euclid» (reseña), *Bulletin of the American Mathematical Society*, 15 (1909), págs. 386-391.

Smith, Thomas, *Vita clarissimi & doctissimi viri, Edwardi Bernardi, S. Theologia Doctoris, Et Astronomiae apud Oxonienses Professoris Saviliani*, Londres, 1704.

Smolarski, Dennis C., «The Jesuit Ratio studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities», *Science in Context*, 15 (2002), págs. 447-457.

Solère, Jean-Luc, «L’ordre axiomatique comme modèle d’écriture philosophique dans l’Antiquité et au Moyen Age», *Revue d’Histoire des Sciences*, 56 (2003), págs. 323-345.

Somerville, Mary, *Personal Recollections: From early life to old age, of Mary Somerville*, Londres, 1873.

Speidell, John, *A Geometricall Extraction*, Londres, 1616.

—, *An Arithemeticall Extraction*, Londres, 1628.

— (ed. Euclid Speidell), *An Arithmetical Extraction*, Londres (2.ª edición), 1686.

Spence, Jonathan D., *The Memory Palace of Matteo Ricci*, Nueva York, 1984; Londres, 2008.

Spies, Werner *et al.*, *Max Ernst Oeuvre-Katalog*, Houston, 1975.

St. John, Christopher, *The Plays of Roswitha*, Londres, 1923.

Stamatēs, Euangelos S., *Euclidis Elementa post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis*, Leipzig, 1969-1977.

Stanhope, Philip, *Letters written by the late Right Honourable Philip Dormer Stanhope, Earl of Chesterfield, to his son Philip Stanhope, Esq.*, Dublín, 1774.

Steck, Max, *Bibliographia Euclideana: Die Geisteslinies der Tradition in den Editionen der “Element” (Στοιχεια) des Euklid (um 365–300)*, Hildesheim, 1981.

Steenbakkers, Piet, «The Textual History of Spinoza's Ethics», en: Koistinen (2009), págs. 26-41.

Steidele, Angela (tr. Derbyshire, Katy), *Gentleman Jack: The biography of Anne Lister, regency landowner, seducer and secret diarist*, Londres, 2018 (hay trad. esp.: *Gentleman Jack. Una biografía de Anne Lister: terrateniente, seductora y diarista secreta del siglo XIX*, Siruela, Madrid, 2021).

Stein, Donna, «Monir Shahroudy Farmanfarmaian: empowered by American art: an artist's journey», *Woman's Art Journal*, 33 (2012), págs. 3-9.

Stevens, Wesley M., «Fields and Streams: Language and practice of Arithmetic and Geometry in early medieval schools», en: John J. Contreni y Santa Casciani (eds.), *Word, Image, Number: communication in the Middle Ages*, Florencia, 2002, págs. 113-204.

—, «Euclidean Geometry in the Early Middle Ages: A preliminary assessment», en: Marie-Thérèse Zenner (ed.), *Villard's Legacy: Studies in medieval technology, science and art in memory of Jean Gimpel*, Aldershot, 2004, págs. 229-262.

Stroud, James B., «Crockett Johnson's Geometric Paintings», *Journal of Mathematics and the Arts*, 2 (2008), págs. 77-99.

Suter, H., «Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abū'l Wefa», en: *Beitrage zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern*, 1922, págs. 94-109.

Szabo, Arpad (tr. A. M. Ungar), *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht, 1978.

Taylor, E. G. R., *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England*, Cambridge, 1954.

Taylor, Thomas, *Sallust, On the gods and the world: and the Pythagoric sentences of Demophilus, translated from the Greek; and five hymns by Proclus, in the original Greek, with a poetical version. To which are added five hymns by the translator*, Londres, 1793.

Thomas-Stanford, Charles, *Early Editions of Euclid's Elements*, Londres, 1926.

Thompson, Dorothy J., *Kerkeosiris: An Egyptian village in the Ptolemaic period*, Cambridge, 1971.

Thompson, D. W., «Sir Thomas Little Heath», *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, 3 (1941), págs. 409-426.

Tobin, Richard, «Ancient Perspective and Euclid's *Optics*», *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 53 (1990), págs. 14-41.

Touati, Charles, *La pensée philosophique et théologique de Gersonide*, París, 1973.

Tupin, C. J. y T. E. Rigll (eds.), *Science and Mathematics in Ancient Greek Culture*, Oxford, 2002.

Turner, E. G., *Greek Papyri: An Introduction*, Oxford 1968.
— (rev. P. J. Parsons), *Greek Manuscripts of the Ancient World*, Londres, 1987.
Turpin, Ian, *Max Ernst*, Oxford, 1979.
Unguru, Sabetai, «On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, 15 (1975), págs. 67-114.
Vasil'ev, Aleksandr Vasil'evich (tr. George Bruce Halsted), *Nicolai Ivanovich Lobachevsky*, Austin, 1894.
Ver Eecke, Paul, *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, Brujas, 1948.
Verdier, P., «L'iconographie des arts libéraux dans l'art du moyen âge jusqu'à la fin du quinzième siècle», en: *Arts libéraux et philosophie au moyen âge. Actes du quatrième congres international de philosophie médiévale*, Montreal, 1969, págs. 305-355.
Viljanen, Valtteri, *Spinoza's Geometry of Power*, Cambridge, 2011.
Vioque, Guillermo Galan, «The Lost Library of Jacques Philippe d'Orville», *Quaerendo*, 47 (2017), págs. 132-170.
Vitrac, Bernard, *Les Eléments*, Presses universitaires de France, París, 1990–2001.
—, «La transmission des textes mathématiques: l'exemple des Eléments d'Euclide», en: L. Giard y C. Jacob (eds.), *Des Alexandries, I., Du livre au texte*, París, 2001, págs. 339-355.
—, «Les scholies grecques aux Eléments d'Euclide / Greek scholia on Euclid's Elements», *Revue d'histoire des sciences*, 56 (2003), págs. 275-292.
—, «A propos des démonstrations alternatives et autres substitutions de preuves dans les Eléments d'Euclide», *Archive for history of exact sciences*, 59 (2004), págs. 1–44.
—, «Euclid» (suplemento al artículo en el DSB), 2006.
—, «Figures du mathématicien et représentations des mathématiques en Grèce ancienne (VIe–IVe s. avant notre ere)» (*preprint* de 2008, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00454058).
—, «The Euclidean ideal of proof in The Elements and philological uncertainties of Heiberg's edition of the text», en: Chemla (2012), págs. 69-134.
— y A. Djebbar, «Le livre XIV des Eléments d'Euclide: Versions grecques et arabes (première partie)», *Sciamus*, 12 (2011), págs. 29-158.
— y A. Djebbar, «Le livre XIV des Eléments d'Euclide: Versions grecques et arabes (seconde partie)», *Sciamus*, 13 (2012), págs. 3-156.
Vucinich, Alexander, «Nikolai Ivanovich Lobachevskii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry», *Isis*, 53 (1962), págs. 465-481.

Waldberg, Patrick, *Max Ernst*, París, 1958.
Wallace, William, *Galileo and His Sources: The Heritage of the Collegio Romano in Galielo's Science*, Princeton, 1984.
Wallis, Richard T., *Neoplatonism* (2.ª edición), Londres, 1995.
Wardhaugh, Benjamin, *Poor Robin's Prophecies: A curious almanac, and the everyday mathematics of Georgian Britain*, Oxford, 2012.
—, «Consuming Mathematics: John Ward's Young Mathematician's Guide (1707) and its owners», *Journal for Eighteenth-Century Studies*, 38 (2015), págs. 65-82.
—, «Greek Mathematics in English: The work of Sir Thomas L. Heath», en: Volker R. Remmert, Martina Schneider y Henrik Kragh Sorenson (ed.), *Historiography of mathematics in the 19th and 20th centuries*, Cham, 2016, págs. 109-122.
—, «Defacing Euclid: Reading and annotating the Elements of Geometry in early modern Britain», en: Ann, Blair, Paul Duguid, Anja-Silvia Goeing y Anthony Grafton (ed.), *Information: A Historical Companion*, Princeton, 2020.
—, «Euclid in Print, 1482–1704: A catalogue of the editions of the Elements and other Euclidean works», 2020, readingeuclid.org.
—, «Rehearsing in the Margins: Mathematical print and mathematical learning», en: Alice Jenkins y Robert Tubbs (eds.), *Palgrave Companion to Mathematics and Literature*, Palgrave, 2020.
Warwick, Andrew, *Masters of Theory: Cambridge and the rise of mathematical physics*, Chicago, 2003.
Webster, Colin, «Euclid's Optics and Geometrical Astronomy», *Apeiron*, 47 (2014), págs. 526-551.
Wedeck, H. E., «The Humor of a Mediaeval Nun, Hroswitha», *Classical Weekly*, 21 (1928), págs. 130-131.
Weitzmann, Kurt, *Illustrations in Roll and Codex: A study of the origin and method of text illustration*, Princeton, 1947.
West, M. L., *Ancient Greek Music*, Oxford, 1992.
Westerink, Leendert Gerrit, *Arethae archiepiscopi Caesariensis Scripta minora*, Leipzig, 1968-1972.
Westfall, Richard S., *Never at Rest: A biography of Isaac Newton*, Cambridge, 1980 (hay trad. esp.: *Isaac Newton: una vida*, Akal, Madrid 2007).
Whitbread, Helena, *I Know My Own Heart: The diaries of Anne Lister (1791–1840)*, Londres, 1988.
Whiteside, D. T., *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge, 1967-1981.
Wiegand, M. Gonsalva (tr.), *Hroswitha of Gandersheim: The Non-Dramatic Works*, San Luis, 1936.

Wilson, Katharina M., «The Saxon Canoness: Hrotsvit of Gandersheim», en: *Medieval Women Writers*, Manchester, 1984, págs. 30-63.

—, *Hrotsvit of Gandersheim: A florilegium of her works*, Cambridge, 1998.

Wilson, N. G., *Scholars of Byzantium*, Londres, 1983 (hay trad. esp.: *Filólogos bizantinos: vida intelectual y educación en Bizancio*, Alianza, Madrid, 1983).

Wittkower, R. y B. Carter, «The Perspective of Piero della Francesca's Flagellation», *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 16 (1953), págs. 292-302.

Woepcke, Franz, «Analyse et extraits d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wefa», *Journal asiatique*, 5.ª serie, 5 (1855), págs. 218-256 y 309-359.

Wood, Jeryldene, *The Cambridge Companion to Piero della Francesca*, Cambridge, 2002.

Zaitsev, E. A., «The Meaning of Early Medieval Geometry – From Euclid and surveyors' manuals to Christian philosophy», *Isis*, 90 (1999), págs. 522-553.

Zenner, Marie-Thérèse, «Imaging a Building: Latin Euclid and Practical Geometry», en: Contreni y Casciani (2002), págs. 219-246.

Zhang, Qiong, *Making the New World Their Own: Chinese Encounters with Jesuit Science in the Age of Discovery*, Leiden, 2015.

Zhmud, Leonid, «Plato as "Architect of Science"», *Phronesis*, 43 (1998), págs. 211-244.

—, «Eudemus' History of Mathematics», en: M. Istvan Bodnar y William W. Fortenbaugh (eds.), *Eudemus of Rhodes*, New Brunswick, 2002, págs. 263–306.

Nota a esta edición

Hasta el siglo XX no se había publicado ninguna versión completa y no adaptada de los *Elementos* de Euclides en traducción al español, si bien desde el siglo XVI sí que ha habido abundantes comentarios, extractos, adaptaciones o fragmentos de libros sueltos.

La primera edición es, probablemente, la de Rodrigo Zamorano, publicada en Sevilla en 1576, con el título de *Los seis libros primeros de la Geometría de Evclides, traduzidos en lengua Española por Rodrigo Çamorano*. Como afirma en el título, se trata de una edición de los libros I-VI. Otras traducciones posteriores de época moderna, esto es, hasta el XVIII, se ocupan de los trece libros al completo, pero los presentan resumidos, parafraseados o recortados.

Ya en el siglo XX, la UNAM, bajo la dirección de J. D. García Bacca y J. Álvarez Lasso (1944-1956), publicó los cinco primeros libros euclidianos. Solo en 1970 salió a la luz una edición de F. Vera en dos volúmenes, que recoge los trece libros, pero de nuevo en versión adaptada y aproximada.

Habría que esperar al final del siglo XX para leer nuestra obra en español, completa y sin adaptaciones. A cargo de M. L. Puertas Castaños, la publicó la editorial Gredos en tres volúmenes, entre 1991 y 1996. Esta edición es la que hemos seguido para las citas presentes en nuestro libro.

Dentro de la Península, vale la pena señalar también la iniciativa llevada a cabo por el Institut d’Estudis Catalans que ha auspiciado la reciente edición completa de los *Elementos* en catalán, bajo la dirección de J. Pla i Carrera (Barcelona, 2018-2020).

Créditos de las ilustraciones

Por orden de aparición:

Figura 1

Estatero de plata de Ptolomeo I, 305-285 a. C. Museo de Arte de Cleveland 1916.994. (Creative Commons / Dominio público, CC0 1.0)

Figura 2

Christoph Clavius, *Euclidis elementorum libri XV* (Roma, 1574), fol. 21v. (colección del autor. Imagen © Benjamin Wardhaugh)

Figura 3

Óstraco, Elefantina, siglo III a. C. Berliner Papyrusdatenbank P. 11999. (© bpk-Bildagentur)

Figura 4

Luca Pacioli, *Divina proportione* (Venecia, 1509), láminas XXII y XXVIII. Getty Research Institute, 47289. (Internet Archive / Dominio público)

Figura 5

Oxford, Biblioteca Bodleiana, MS D'Orville 301, fol. 268r. (The Picture Art Collection / Alamy Stock Photo)

Figura 6

Francis Rawdon Chesney, *Narrative of the Euphrates Expedition carried on by Order of the British Government during the years 1835, 1836, and 1837* (Londres, 1868), pág. 406. (Archivac / Alamy Stock Photo)

Figura 7

Bibliotecas Universitarias de Leiden, SCA 1, fol. 2r. (Leiden University Libraries / Creative Commons Attribution International, CC-BY 4.0)

Figura 8

Werner Rolevinck, *Fasciculum temporum* (Venecia, 1485), fol. 37v. (Digital Library@Villanova University, Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International, CC BY-SA 4.0)

Figura 9

Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi (Venecia, 1482), fol. 2r. (Wikimedia Commons / Dominio público)

Figura 10

Euclidis quae supersunt omnia (Oxford, 1703), portada. (biblioteca digital BEIC / Dominio público)

Figura 11

Mosaico romano del siglo I a. C., de la casa de T. Siminio Estéfano en Pompeya, ahora en el Museo Nacional Arqueológico de Nápoles (Jebulon, Creative Commons / Dominio público, CC0 1.0)

Figura 12

Johann Georg Leuckfeld, *Antiquitates Gandersheimenses* (Wolfenbüttel, 1709), lámina frente a 271. (Wikimedia Commons / Dominio público)

Figura 13

Francesco Villamena, retrato en grabado de Christopher Clavius, 1606. (Rijksmuseum Ámsterdam, Creative Commons / Dominio público, CC0 1.0)

Figura 14

Retrato anónimo de Xu Guangqi en Guangqi Park, Shanghái. (Mountain, Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0)

Figura 15

Retrato sin atribución de Baruch Spinoza, *c.* 1665. (Wikimedia Commons / Dominio público)

Figura 16

Joshua Horner, retrato de Anne Lister, *c.* 1830. (Wikimedia Commons / Dominio público)

Figura 17

Mural de la tumba de Menna en Tebas, *c.* 1400 a. C. (BibleLandPictures.com / Alamy Stock Photo)

The Works of George Eliot (Nueva York, 1910), vol. 3: *The Mill on the Floss*, frontispicio. (Wikimedia Commons / Dominio público)

Figura 29

Tahrīr-i Uqlīdis (Mathura, 1884), p. 20. (Bodleian Libraries / Google Books, CC BY-NC-SA 2.0)

Figura 30

Elliott & Fry, retrato de sir Thomas Little Heath. National Portrait Gallery x89686. (© National Portrait Gallery, Londres)

Figura 31

Max Ernst, *Euclides* (1945). (Harry Croner/ullstein bild via Getty Images)

Figura 32

Crockett Johnson, *Demostración del teorema de Pitágoras*. Smithsonian Institution 1979.1093.01. (Division of Medicine and Science, National Museum of American History, Smithsonian Institution)

Figura 33

Monir Shahroudy Farmanfarmaian, *Decágono (Third Family)*, 2011, Espejo y pintura sobre vidrio invertido sobre yeso y madera, 120 cm de diámetro. (Cortesía de Third Line)

Figura 34

Representación artística de la sonda *Euclid*. (Image © ESA / ATG medialab (spacecraft); NASA, ESA, CXC, C. Ma, H. Ebeling y E. Barrett (Universidad de Hawáii/IfA), *et al.* y STScI (fondo))

Benjamin Wardhaugh, es miembro de All Souls College, en Oxford. Allí ha ejercido de profesor de Matemáticas y de Historia. Su investigación se centra en la Historia de la aritmética y las Matemáticas, y la manera en que estas influyen y forman parte de las culturas. Sus diez libros incluyen temas como la Historia de las teorías matemáticas en la música, la transmisión de textos matemáticos y la Historia de la enseñanza de las matemáticas y la aritmética en Gran Bretaña entre el siglo XVI y el XVIII.

Notas

[1] La respuesta hace referencia al Camino Real persa, la gran carretera construida por Darío I y que enlazaba Susa, en el corazón del gran imperio, con Sardes, cerca de la costa jónica de Anatolia. *(N. del t.)* <<

[2] En lengua castellana no se sabe de ninguna traducción *completa* de los *Elementos* hasta la época actual. La primera de diversas traducciones parciales o resumidas fue la de Rodrigo Zamorano, quien en 1576 publicó en Sevilla una versión con solo los seis primeros libros. Véase el apartado «Nota a esta edición», al final del libro *(N. del t.)* <<

[3] El Kit Kat Club fue un club literario y político de Londres que floreció durante el siglo XVIII. Su orientación era claramente *whig*, es decir, partidarios de la supremacía del Parlamento, de una monarquía parlamentaria y liberales en términos económicos. *(N. del t.)* <<

[4] La definición de Euclides de diámetro es la siguiente: «Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales». Cabe señalar que la última frase está ausente en algunas ediciones del texto. *(N. del t.)* **<<**

[5] Actualmente, el término *stationery* se refiere en general a artículos de oficina y papelería y *stationer* a cualquier papelería, pero en sus inicios, hacía referencia a tienditas o paradas en las que se encuadernaban, copiaban, vendían y alquilaban libros (a veces por partes) y otros productos relacionados. *(N. del t.)* <<

[6] Referencia a *La tempestad* de Shakespeare. *(N. del t.)* **<<**

[7] *Great Books of the Western World* es una famosa colección de libros que recoge una selección de grandes obras de la historia de la humanidad traducidas al inglés, editada por la misma editorial que publica la *Enciclopedia Británica*. Se presentó en 1952 y en 1990 se publicó una segunda edición, ampliada. *(N. del t.)* <<

[8] Se trata de dos de los grandes problemas clásicos de la Antigüedad: la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo. Ambos deben resolverse con regla y compás en un número finito de pasos; en el primer caso, hallar un cuadrado de la misma área que un círculo dado; en el segundo, dividir en tres partes un ángulo cualquiera dado. Ambos son también imposibles de resolver, imposibilidad que quedó demostrada en el siglo XIX. *(N. del t.)* **<<**

[9] Para la versión española, las traducciones de los fragmentos citados en el libro proceden de las ediciones siguientes: Aulo Gelio, *Noches áticas* (tr. Francisco Navarro), Madrid, 1893; Euclides, *Elementos* (tr. María Luisa Puertas Castaños), Gredos, Madrid, 1991-1996; Mary Ann Evans, *El molino del Floss* (tr. Carme Francí), Alba Editorial, Barcelona, 2003; Heródoto, *Historia* (tr. Carlos Schrader), Gredos, Madrid, 1977; Platón, *República* (tr. Conrado Eggers), Gredos, Madrid, 2008; Platón, *Menón*, Gredos, Madrid, 2004; Edna St. Vincent Millary, *Soneto* (tr. Emilio Ballagas), reproducida en «Una consulta literaria», *Diario de la Marina*, 27 de abril de 1950, p. 4; William Wordsworth, *El preludio* (tr. Bel Atreides), DVD Ediciones, Madrid, 2003. *(N. del t.)* <<