IAN STEWART

Locos por las matemáticas

Con un estilo claro, ameno y divertido, Ian Stewart nos deleita con juegos y curiosidades explicados a través de las matemáticas. Las matemáticas no son sólo una maravillosa herramienta lógica, con una espléndida vida propia condensada en teorías, axiomas, teoremas o proposiciones, o el mejor instrumento creado por los humanos para describir los fenómenos naturales. Son, asimismo, un inmenso universo en el que se pueden llevar a cabo apasionantes aventuras intelectuales, o, si se prefiere, practicar juegos extraordinariamente divertidos y de muy variada dificultad. En este territorio se mueve Ian Stewart, el más prestigioso divulgador de las matemáticas, que nos enfrentará en este libro a retos apasionantes. La teoría de probabilidades aplicada al Monopoly, las estrategias ganadoras en juegos matemáticos, por qué cada cultura tiene su propio calendario, demostraciones de imposibilidad, por qué las tostadas caen siempre del lado de la mantequilla, o cuántos trabajadores fueron necesarios para construir la Gran Pirámide de Quéope son algunos de los temas que el profesor Stewart aborda y desgrana en las páginas de este libro fascinante.

Ian Stewart

Locos por las matemáticas

Pasatiempos y juegos matemáticos

ePub r1.0
Un_Tal_Lucas 05-07-2022

Título original: *Math Hysteria. Fun and Games with Mathematics*
Ian Stewart, 2004
Traducción: Javier García Sanz

Editor digital: Un_Tal_Lucas
ePub base r2.1

Prefacio

Cuando yo tenía unos 16 años, uno de los momentos culminantes del mes era la lectura de la columna «Mathematical Games» de Martin Gardner en *Scientific American*. Cada columna contenía algo nuevo para atraer mi atención, y era matemática, y era divertida. Yo era afortunado porque tenía algunos profesores de matemáticas excelentes, de modo que ya sabía que las matemáticas eran algo de lo que se podía disfrutar y que no estaban grabadas en tablas de piedra. La columna de Martin Gardner reforzaba estos mensajes. E incluso si la columna era sobre juegos (más tarde —no sé por qué— se convirtió en «Mathematical Recreations», que suena más anticuado), había muchas matemáticas «serias» mezcladas con las divertidas.

Probablemente es justo decir que la columna de Martin Gardner fue una de las razones de que yo terminara convirtiéndome en un matemático. Me mantenía interesado y dejaba claro que había mucho lugar para nuevas ideas y pensamiento creativo. Y a diferencia de muchos de mis colegas profesionales, nunca me molesté en desenredar los aspectos «serios» de las matemáticas de los «divertidos». No quiero decir que no pudiera ver la diferencia; sólo quiero decir que no la consideraba terriblemente importante. Lo que me importaba eran las matemáticas, y disfrutaba del trabajo matemático y el juego matemático sin sentir ninguna necesidad de separarlos.

En *The Colossal Book of Mathematics*, Martin Gardner dice que su «larga y feliz relación con *Scientific American*… empezó en 1952 cuando vendí a la revista un artículo sobre la historia de las máquinas lógicas». Después de 25 años llevando las riendas, él decidió pasar a otras cosas, y su columna quedó para quien quisiera hacerse cargo de ella. Douglas Hofstadter, autor de *Gödel, Escher, Bach, una Eterna Rama Dorada*, que ganó el premio Pulitzer, fue el primero. Retituló la columna «Metamagical Themas», un ingenioso anagrama de «Mathematical Games». Luego se hizo cargo Kee Dewdney, autor de *The Planiverse*, y la columna se convirtió en «Computer Recreations». En ese momento, el Dios de las Columnas Matemáticas decidió abrir una oportunidad para que yo interviniera en el asunto, aunque pasó algún tiempo antes de que la intervención de la Deidad se hiciera manifiesta.

Fueron los franceses los que lo empezaron. *Scientific American* se traduce a más de una docena de idiomas, entre ellos el francés. «Traduce» no es exactamente la palabra, porque cada edición en lengua extranjera incluye su propio material, y los artículos a veces se trasladan de un mes a otro o se omiten por completo. La edición francesa se llama *Pour la Science*, y su editor, Philippe Boulanger, quería mantener la columna «Mathematical Recreations» además de incorporar su sustituta «Computer Recreations». De modo que convenció a varios matemáticos franceses para que aportaran columnas matemáticas. Eso funcionó durante algunos años, hasta que el colaborador más regular decidió que no podía seguir por más tiempo. Una serie de coincidencias hizo que finalmente se me invitara a asumir esta tarea, lo que hice con diligencia. Mi primera columna apareció en septiembre de 1987. Al cabo de unos pocos años, la columna se extendió a las ediciones alemana, española, italiana y japonesa de la revista. En diciembre de 1990, pocos meses después de que «Computer Recreations» se hubiese transformado de nuevo en «Mathematical Recreations», yo asumí esa sección en la revista madre.

También tuve una larga y feliz relación con *Scientific American*, escribiendo 96 columnas durante un período de once años. Escribí otras 57 para Pour la Science y otras traducciones; unas durante los cuatro años anteriores a que empezara a escribir en la revista madre, y otras para transformar lo que era inicialmente una columna bimensual en América en una mensual en Francia. Algunas de estas columnas ya han sido recogidas en libros, una tradición ya iniciada por Gardner. En inglés son *Game, Set and Math* y *Another Fine Math You've Got Me Into*. («Math» funciona normalmente mejor que «Maths» y la revista se llama *Scientific American*). Hay otras recopilaciones en francés y alemán. Espero que con el tiempo cada columna aparezca en al menos —y preferiblemente como máximo— un libro. *Locos por las matemáticas* es el paso siguiente en ese programa, que contiene veinte columnas hasta ahora no disponibles en forma de libro.

Nadie puede sustituir a Martin Gardner. Nunca hubo ningún plan por parte de sus sucesores para repetir la fórmula mágica de Gardner, y estoy completamente seguro de que ninguno de nosotros lo intentó. Yo sé que no lo hice. Lo que tratamos de hacer era reproducir el espíritu de la columna: presentar ideas matemáticas importantes en un tono lúdico. Hace más de tres mil años, los profesores de matemáticas de la antigua Babilonia colocaban acertijos en sus textos cuneiformes para asegurarse la atención de sus pupilos. Los antiguos egipcios hicieron lo mismo. Sospecho que fueron los griegos, con su énfasis en la alta cultura, los que iniciaron la tradición contraria de presentar las matemáticas en una estructura solemne y formal. Yo culpo a Euclides y sus imitadores de hacer las matemáticas tediosas y mecánicas, obsesionados con verificar que el enunciado 17 del Teorema 46 se sigue del Lema 25, y el enunciado 18 se sigue de la Proposición 12. No tengo nada contra las demostraciones, pero hay un tiempo y un lugar para ellas, y el desarrollo temprano de la intuición visual en matemáticas no es ni lo uno ni lo otro.

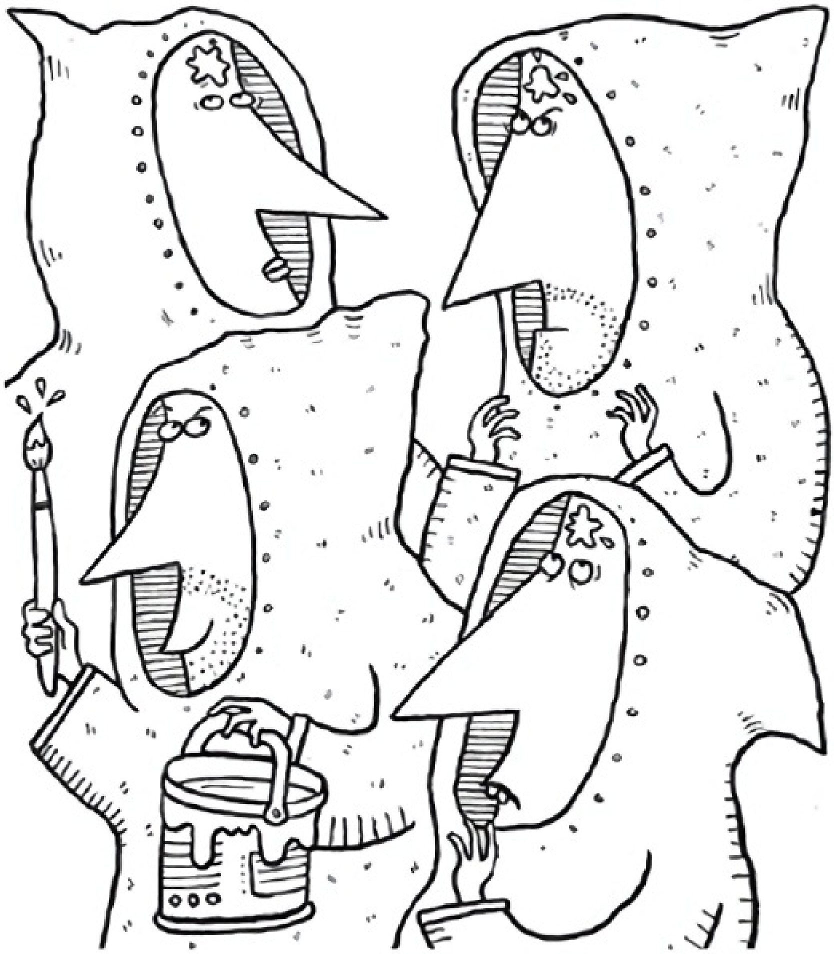
Los capítulos no están dispuestos en ningún orden particular, y usted puede empezar casi en cualquier lugar, aunque los dos capítulos sobre teoría de probabilidades aplicada al Monopoly constituyen una miniserie y es mejor leerlos como tal. Los temas van desde las rarezas de la lógica («Yo sé que tú sabes que…») pasando por la combinatoria («Cuadrando el cuadrado»), números curiosos («Contando el ganado del Sol»), y geometría («Rompecabezas de doble dirección»), hasta temas más avanzados que incluyen la optimización («El gran robo de la alcantarilla»), y los poliedros («La conjetura del fuelle»). Algunos tratan de estrategias ganadoras en juegos matemáticos («Chupando chocolate campechanamente») o los complicados protocolos de reparto libre de envidias («Repartiendo el botín») o demostraciones de imposibilidad («Teorías del dominó»). Unos pocos tocan cuestiones prácticas: «El principio antropomúrfico» revela por qué las tostadas caen siempre del lado de la mantequilla en un universo construido de forma razonable, «Una guía para datar por computador» explica por qué cada cultura tiene su propio calendario y cómo están relacionados, y «Apilando pirámides premeditadamente» calcula cuántos trabajadores fueron necesarios para construir la Gran Pirámide de Quéope. Y si usted quiere ganar un millón de dólares pensando (*no* jugando) sobre juegos de ordenador, está «Un millón de dólares por el Buscaminas», que liga el sistema operativo Windows con las fronteras de la investigación matemática en el siglo XXI.

Unas palabras de agradecimiento —o mejor, palabras de gratitud a borbotones, demasiado profusas para registrar aquí— al dibujante Spike Gerrell, cuyas vacas locas, piratas apurados y monjes perplejos realzan estas páginas. Spike ha captado el espíritu del libro con una intuición y una precisión que encuentro sorprendentes. Gracias, también, a Oxford University Press y su equipo de editores, correctores y todos aquellos que convierten una idea vaga en un libro acabado.

Debo terminar confesando que hay muchas matemáticas «serias» escondidas entre la diversión y los juegos; los ejemplos más evidentes se exponen en «cajas» autocontenidas para que no se sienta engañado. Así que puede quedar seguro de que mientras está contemplando las extrañas cabriolas de las vacas de Arquímedes, también está entendiendo los fundamentos de la teoría de números. Sin embargo, yo no trato de enseñarle nada. Sólo quiero que usted disfrute de algunos ejemplos de esa extraordinaria invención humana que son las matemáticas.

IAN STEWART
Coventry, junio de 2003

1
Yo sé que tú sabes que…



A veces no basta con saber algo: uno tiene que saber que alguien más lo sabe. O que ellos saben que uno sabe que ellos saben que… Estas consideraciones llevan al concepto de «conocimiento común», y ello supone una diferencia. Una vez que algo se ha hecho conocimiento común, se hace posible hacer deducciones sobre el razonamiento de otras personas.

A los extraordinariamente educados monjes de la orden Perplejiana les gusta gastarse bromas lógicas unos a otros. Una noche, cuando los hermanos Archibaldo y Benedicto están dormidos en su celda, el hermano Jonás se introduce sigilosamente y pinta una mancha azul en cada una de sus coronillas tonsuradas. Cuando se despiertan, cada uno de ellos advierte por supuesto la mancha en la cabeza del otro pero, siendo educados, no dicen nada. Cada uno se pregunta si también él tiene una mancha, pero es demasiado educado para preguntarlo a los demás. Entonces, el hermano Zenón, que nunca se ha distinguido por su tacto, entra y empieza a reírse. Al ser preguntado, recupera sus modales y se niega a decir otra cosa que «al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza».

Por supuesto, los dos monjes saben eso. Pero entonces Archibaldo empieza a pensar. «Yo sé que Benedicto tiene una mancha, pero él no sabe que… ¿Tengo *yo* una mancha? Bien, supongamos que yo *no tengo* una mancha. Entonces Benedicto podría *ver* que yo no tengo una mancha, e inmediatamente deduciría del comentario de Zenón que *él* debe tener una mancha. Pero él no ha manifestado ningún signo de vergüenza… ¡uf!, eso significa que *yo* debo tener una mancha». Y en ese momento Archibaldo empieza a ruborizarse. Benedicto hace lo mismo, justo en el mismo instante y por la misma razón.

Sin el comentario inocente de Zenón no se habría desencadenado ninguna de estas reflexiones pese a que Zenón no les dice nada, aparentemente, que ya no sepan.

Este efecto resulta aún más enigmático cuando lo ensayamos con *tres* monjes. Ahora, los hermanos Archibaldo, Benedicto y Cirilo están dormidos en su celda y Jonás pinta una mancha azul en cada una de sus cabezas. De nuevo, cuando se despiertan, cada uno de ellos advierte las manchas de los demás, pero no dicen nada. Este punto muerto lógico sólo se rompe cuando

Zenón deja caer su bomba: «Al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza».

Bien, eso pone en marcha la reflexión de Archibaldo, y lo que él piensa es esto: «Supongamos que yo no tengo una mancha. Entonces Benedicto ve una mancha en Cirilo, pero no ve nada en mí, y puede preguntarse si *él* tiene una mancha. Y puede razonar de esta forma: "Si yo, Benedicto, no tengo una mancha, entonces Cirilo ve que ni Archibaldo ni Benedicto tienen una mancha, y puede deducir inmediatamente que él mismo tiene una mancha. Puesto que Cirilo, que es un lógico excelente, ha tenido mucho tiempo para deducir esto pero sigue sin sentirse avergonzado, entonces yo, Benedicto, debo tener una mancha". Ahora bien, puesto que Benedicto es también un lógico excelente, y ha tenido mucho tiempo para deducir esto pero sigue sin sentirse avergonzado, entonces se sigue que de hecho yo, Archibaldo, *sí tengo* una mancha». En este momento, Archibaldo se pone colorado —como también lo hacen Benedicto y Cirilo, que han seguido líneas de razonamiento estrechamente similares.

El mismo tipo de argumento funciona con cuatro, cinco o más monjes — suponiendo de nuevo, por el momento, que todos ellos tienen manchas en su cabeza—. Sus deducciones se hacen más enrevesadas pero, por muchos monjes que haya, el anuncio de que «al menos uno de vosotros tiene una mancha» desencadena una serie deductiva que lleva a todos ellos a concluir que tienen una mancha. Cuando los números se hacen grandes es útil tener algún dispositivo de cronometraje para sincronizar sus deliberaciones, así que introduciré este dispositivo dentro de un momento cuando empecemos a desentrañar lo que está pasando. Paradojas similares suceden también si algunos monjes tienen manchas y otros no. Volveré sobre ello.

Hay muchos acertijos de este tipo que incluyen a niños con caras sucias, asistentes a fiestas que llevan sombreros estúpidos, dos personas que están en posesión de números enteros positivos consecutivos pero no saben quién tiene el mayor —incluso una versión menos inocente sobre infidelidad marital entre los miembros de una tribu isleña—. Todos estos acertijos son singularmente desconcertantes, en cuanto que todo el procedimiento es desencadenado por alguien que anuncia un hecho que es perfectamente evidente para todo el mundo. Sin embargo, cuando uno empieza a analizar lo que está pasando se hace claro que el anuncio transmite de hecho nueva información. La informalidad del lenguaje, tan a menudo útil, está en este ejemplo oscureciendo lo que sucede.

Volvamos al primer ejemplo con los dos monjes. Zenón anuncia que «al menos uno de vosotros tiene una mancha azul en la cabeza». ¿Qué saben realmente los monjes? Bien; Archibaldo sabe que Benedicto tiene una mancha, y Benedicto sabe que Archibaldo tiene una mancha. Pero estos hechos no son el mismo. Cuando Archibaldo oye la afirmación de Zenón y concluye que él ya sabía eso, su «alguien» es Benedicto. Pero cuando Benedicto oye la afirmación de Zenón y concluye que él ya sabía eso, su «alguien» es Archibaldo. No es la misma afirmación en absoluto. Lo que hace el anuncio de Zenón no es solamente informar a Archibaldo de que alguno tiene una mancha. También informa a Archibaldo de que Benedicto sabe ahora que alguno tiene una mancha, y es el *mismo* alguno. De modo que la afirmación de Zenón no dice a Archibaldo nada nuevo sobre lo que Archibaldo sabe, pero dice a Archibaldo algo nuevo sobre lo que Benedicto sabe.

Los acertijos lógicos de este tipo se conocen como acertijos de «Conocimiento Común», y todos ellos se basan en el mismo mecanismo. No es el contenido del enunciado lo que importa: es el hecho de que todo el mundo sabe que todos los demás lo saben. Una vez que el hecho se ha convertido en conocimiento común, se hace posible razonar sobre las respuestas al mismo de otras personas.

Volvamos a los monjes. Supongamos ahora que hay 100 monjes, cada uno de ellos con una mancha, cada uno de ellos desconocedor de este hecho, y cada uno de ellos un lógico sorprendentemente rápido. Para sincronizar sus pensamientos, supongamos que el Abad tiene una campana. «Cada diez segundos —dice el Abad—, haré sonar esta campana. Eso os dará mucho tiempo para llevar a cabo el razonamiento lógico necesario. Inmediatamente después de que yo haga sonar la campana, todos aquellos que puedan deducir que tienen una mancha deben levantar la mano». Él espera diez minutos en silencio, salvo por el repetido sonar de su campana, pero nada sucede. «Oh, sí, estúpido de mí, olvidé algo. Aquí hay un elemento extra de información: al menos uno de vosotros tiene una mancha». Ahora nada sucede durante 99 campanadas, y luego los 100 monjes levantan su mano simultáneamente tras el centésimo toque.

En esencia, la lógica va así. El monje número 100, pongamos por caso, puede ver que los otros 99 tienen manchas. «Si yo no tengo una mancha —piensa él—, entonces los otros 99 lo saben. Eso me deja completamente al margen del cálculo. Así que ellos estarán haciendo cualquier serie de deducciones que uno haría con 99 monjes, siempre que yo no tenga una mancha. Si he desentrañado correctamente la lógica de 99 monjes, entonces después de 99 campanadas todos ellos levantarán la mano». Él espera a la campanada 99, y nada sucede. «¡Ah!, de modo que mi hipótesis es falsa; luego, yo debo tener una mancha». Campanada 100, arriba la mano. Ídem para los otros monjes.

La lógica de 99 monjes (sobre la base hipotética de que el monje 100 está inmaculado) es la misma: ahora el monje 99 espera que los otros 98 levanten la mano en la campanada 98, *a menos* que el monje 99 tenga una mancha. Y así sucesivamente, recursivamente, hasta que finalmente llegamos a un único monje hipotético que no ve ninguna mancha, se sobresalta al descubrir que alguien tiene una, inmediatamente deduce que debe ser *él*, y levanta su mano después de la primera campanada.

Esto es un ejemplo de «inducción matemática», que dice que si una propiedad de los números enteros n es válida cuando $n = 1$, y su validez para n implica su validez para $n + 1$ independientemente de cuál pueda ser n, entonces dicha propiedad debe ser válida para todo n.

Hasta aquí he supuesto que todos los monjes tienen una mancha, pero por un razonamiento similar usted puede convencerse de que esto no es un requisito esencial. Supongamos, por ejemplo, que 68 monjes de los 100 totales tienen manchas. Entonces, con perfecta lógica, nada sucede hasta la campanada 68, en cuyo instante todos los que tienen manchas levantan la mano simultáneamente, pero ninguno de los otros.

Los acertijos de conocimiento común han sido ampliamente investigados, y algunas referencias útiles pueden encontrarse en un artículo de David Gale (ver «Lecturas adicionales» al final del libro). El ejemplo más matemático allí descrito, y el de mayor alcance, fue ideado por John Conway (Universidad de Princeton) y Michael Paterson (Universidad de Warwick, UK). Imaginemos una fiesta de Matemáticos Locos. Cada asistente lleva un sombrero con un número escrito en el mismo. Dicho número debe ser mayor que o igual a 0, pero no tiene por qué ser un número entero; además, el número de algún jugador debe ser distinto de 0. Colocamos los sombreros de modo que ningún jugador pueda ver su propio número, pero puede ver los de todos los demás.

Ahora llega el «Conocimiento Común». Clavada en la pared hay una lista de números. Uno de ellos es la suma total de los números en los sombreros de los jugadores, pero nadie sabe cuál es el total correcto. Finalmente, suponemos que el número de posibilidades en la lista es menor que o igual al número de jugadores.

Cada diez segundos suena una campana, y quien sepa su número —o sepa la suma total correcta, lo que es equivalente puesto que puede ver los números de todos los demás— *debe* anunciarlo. Conway y Paterson demostraron que, con lógica perfecta, finalmente algún jugador hará un anuncio semejante.

A primera vista, esto es paradójico. Supongamos, por ejemplo, que hay tres jugadores, y el sombrero de cada jugador lleva el número 2, mientras que la lista clavada en la pared contiene los número 6, 7, 8. Cada jugador ve un subtotal de $2 + 2$ en los sombreros de los otros jugadores, de modo que el suyo debe ser 2, 3 o 4. Por consiguiente, cada uno de los otros dos jugadores está viendo $2 + 2$ o $2 + 3$ o $2 + 4$, y cualquiera de los totales 6, 7, 8, es posible (recordemos que algunos jugadores, aunque no todos, pueden tener 0 en su sombrero). De modo que ningún total puede descartarse. Sin embargo, gracias a la campana, los jugadores pueden hacer inferencias a partir del hecho de que los otros jugadores todavía no han anunciado que saben su número. En cada toque de campana quedan descartados ciertos conjuntos de números, y esto lleva a la inesperada conclusión de Conway y Paterson.

Para hacerse una idea de lo que está implicado, consideremos sólo dos jugadores, y supongamos que la lista clavada en la pared es 6, 7. Los números en los sombreros no son conocidos, de modo que los llamamos x e y. Lo que ambos jugadores saben es que $x + y = 6$, o $x + y = 7$. Ahora un poco de geometría. Los pares (x, y) que satisfacen estas dos condiciones son las coordenadas de dos segmentos de línea en el cuadrante positivo del plano (figura 1a).

Si x o y es mayor que 6, entonces el juego termina tras la primera campanada porque el otro jugador puede ver inmediatamente que un total de 6 es imposible. Los pares (x, y) para los que esto sucede se muestran en la figura 1b. (Aquí hay que tener un poco de cuidado: los puntos (1,6) y (6,1), que yacen en los extremos de los segmentos marcados, no *son* eliminados. Los segmentos eliminados carecen de un punto extremo, el más próximo al centro de las líneas inclinadas). Si ningún jugador responde tras la primera campanada, estas posibilidades quedan eliminadas. El juego termina entonces en la segunda campanada si x o y es menor que 1. ¿Por qué? El otro jugador puede ver el sombrero con un número menor que 1, y sabe que su propio número es 6 o menor; por consiguiente el total 7 está descartado. Los pares para los que el juego termina en la segunda campanada se muestran en la figura 1c. A medida que continúa esta línea de razonamiento, los pares (x, y) para los que el juego se detiene tras una campanada dada forman diagonales sucesivas de dos «escaleras», una que desciende desde la parte superior izquierda y otra que asciende desde la parte inferior derecha, como se muestra en la figura 1d. Estos segmentos diagonales agotan rápidamente las posibilidades. De hecho, aquí el juego debe detenerse en la octava campanada. (Debido a los «puntos extremos que faltan» que mencioné, los números (3, 3) requieren ocho campanadas. Cualquier otra posibilidad requiere siete o menos).

El mismo tipo de argumento da cuenta de cualquier lista de dos jugadores, e incluso nos calcula el número máximo de campanadas requerido. La demostración para más jugadores es muy simple, aunque matemáticamente sofisticada; el artículo de Gale contiene todos los detalles. Como desafío, calcule lo que sucede con tres jugadores, cada uno de los cuales lleva el número 2 en su sombrero, y la lista 6, 7, 8, tal como se mencionó antes. Usted debería encontrar que nada sucede durante 14 campanadas, y luego los tres jugadores anuncian sus números en la decimoquinta.

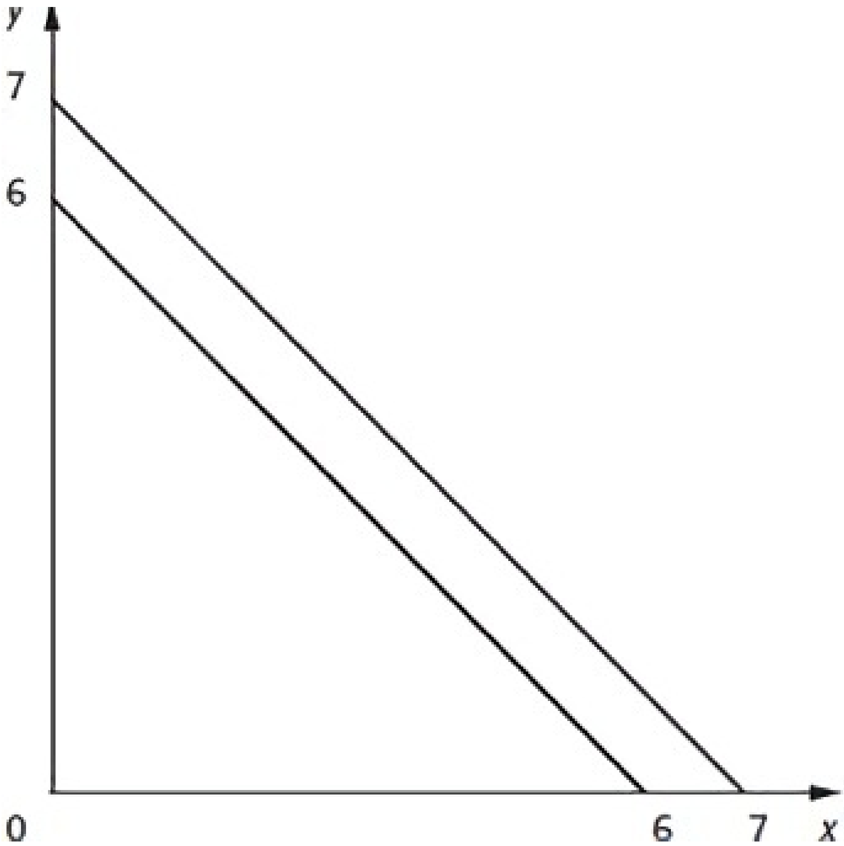


FIGURA 1a. Dos segmentos de línea corresponden a números posibles en los sombreros.

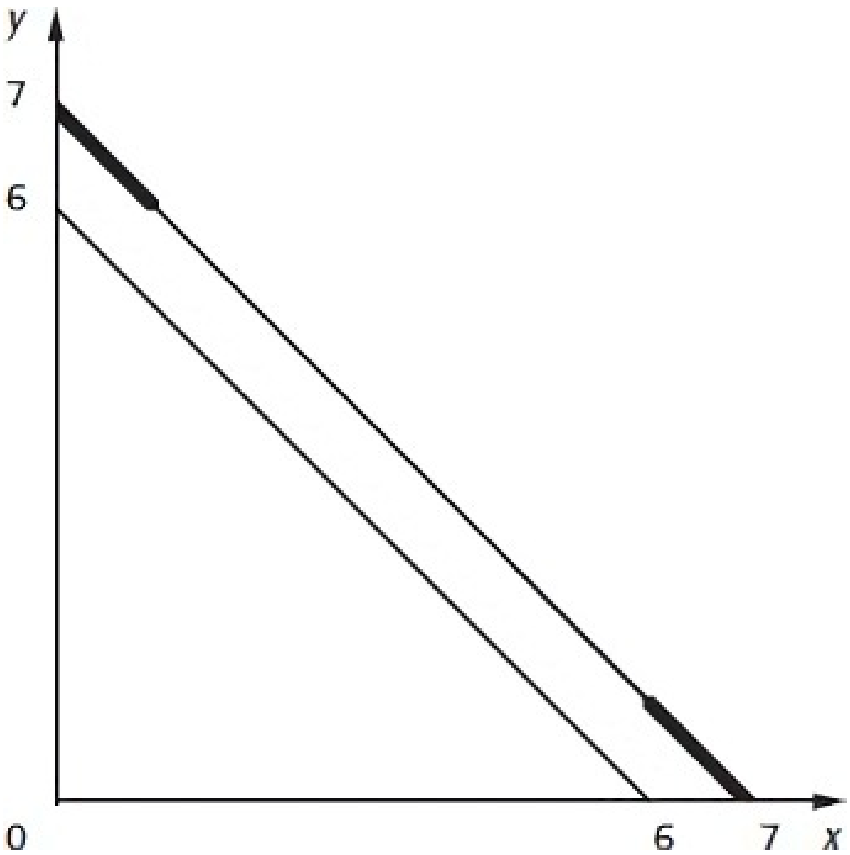


FIGURA 1b. Si los números caen en los segmentos señalados por líneas gruesas, el juego termina en la primera campanada.

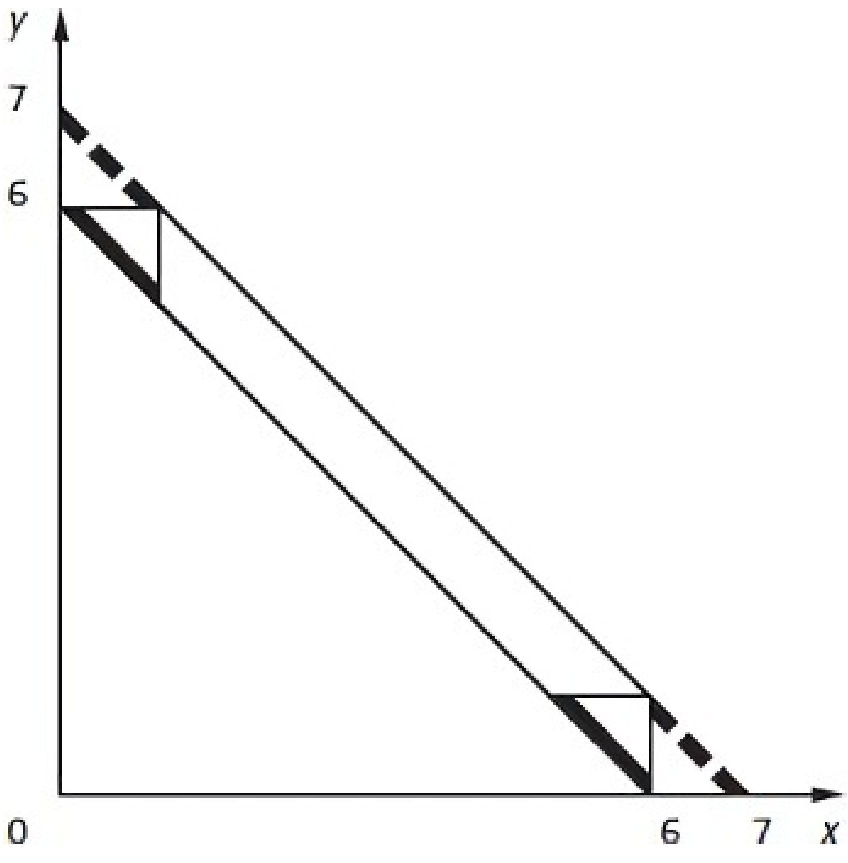


FIGURA 1c. Si los números caen en estos segmentos, el juego termina en la segunda campanada.

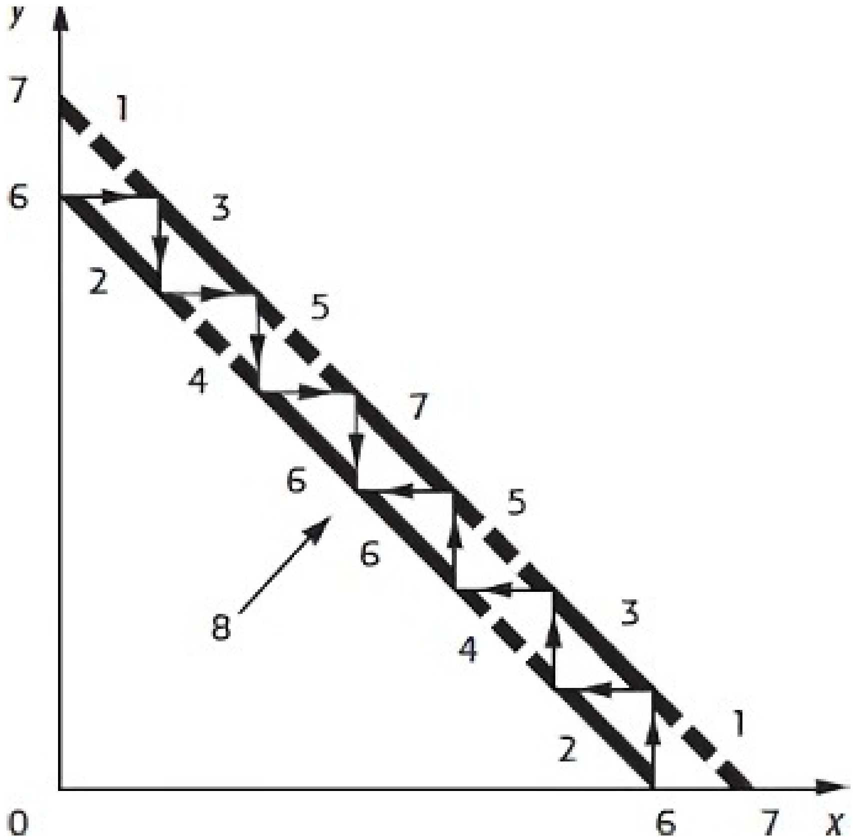
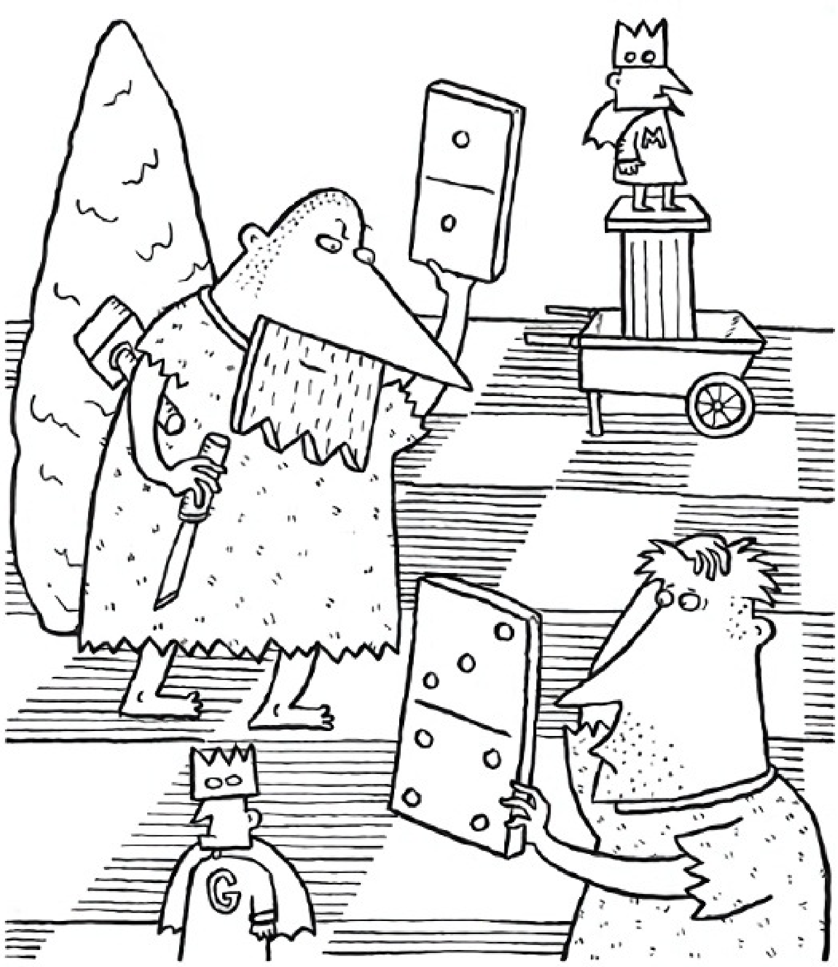


FIGURA 1d. Continuando a lo largo de dos «escaleras» entre las líneas, encontramos cuánto tiempo continúa el juego para cualquier par de números (el número necesario de campanadas está marcado en los segmentos apropiados; cada segmento carece del punto extremo que yace más próximo al centro de las líneas inclinadas). Aquí, el número más alto de campanadas necesarias es ocho.

2
Teorías del dominó



Por muchas veces que uno intente algo y fracase, eso no significa que sea imposible. Sólo demuestra que uno no sabe cómo hacerlo. Para demostrar que algo es imposible, uno tiene que descartar todas las tentativas de solución. Una buena manera de hacerlo es encontrar un obstáculo imposible de evitar: un «invariante». A veces se puede encontrar un invariante introduciendo algunos colores, y contando.

El negocio iba mal, advirtió el tallador de piedra Rockchopper Rocknuttersson a su aprendiz.

«Puedes decir eso otra vez», dijo Pnerd.

«El negocio va mal, Pnerd». El presidente del Gremio de Fabricantes de Obeliscos tendía a tomarse todo al pie de la letra. «Si no tenemos pronto un encargo, tendré que colgar mi cincel y aceptar ese trabajo de porquero que mi tío Hogthumper Hogtrottersson no cesa de ofrecerme».

Pnerd sacaba lascas de un dolmen de juguete para niños. «Es la recesión, Rocky. Nadie compra. El mercado de círculos de piedra ha tocado fondo. Y en cuanto a carros… ni siquiera puedes vender una carretilla en este momento. El otro día oí a Moloch Molochsson quejarse porque los diezmos han bajado de nuevo y los sacerdotes apenas pueden permitirse la compra de carneros suficientes para aplacar a M’gaskil, el dios de la nieve, antes de que llegue el invierno».

Rocky se rascó su gruesa nariz, flexionando su enorme bíceps. «¿Conseguiste esa copia de *Rolling Stone* que te pedí que compraras?». Pnerd dejó caer una gran losa redonda de piedra caliza a sus pies. Rocknuttersson la cogió y miró las inscripciones cinceladas. «Quizá haya algo en los anuncios. Humm… asistente de adiestrador de tritones… el inspector jefe de alimañas de Bogtown se ha retirado… se necesitan siete vírgenes para fines no especificados, deben estar dispuestas a viajar… ¡Ah! ¡Invitación a concursar en las obras de reparación del mercado de Quagville! Pnerd, ve allí y entérate de lo que quieren hacer, mientras yo compruebo las correas de los mazos forrados».

Dos días después, Pnerd volvió.

«¿Y bien?».

«El mercado de Quagville está pavimentado con grandes losas de piedra, Rocky. Sesenta y cuatro, cada una de ellas de aproximadamente un metro cuadrado, dispuestas en una cuadrícula de ocho por ocho. La piedra original empieza a agrietarse. Ellos quieren levantar todo y reponerlo».

«¡Brillante!».

«Espera, hay algunas condiciones. La principal es que esta vez no quieren hacerlo en cuadrados. Los sacerdotes de la ciudad piensan que eso es lo que hizo que la piedra se agrietara».

«¡Tonterías! Típicos sacerdotes, siempre preocupados por las formas y los números y esa basura numerosofista intelectual… Yo sé exactamente lo que sucedió. Cuando Chalkhacker Chalkwhackersson puso esas losas utilizó piedra de mala calidad y la escarcha penetró».

«Los sacerdotes dicen que se agrietaron porque un cuadrado es el símbolo de Frozo, el demonio de la escarcha».

Rocky levantó la vista con sorpresa. «¿Lo es? Pensaba que era la marca de Gnashfang, el ogro de la caverna».

«Eso también», admitió Pnerd. «Pero no hay tantos símbolos donde elegir, ya sabes. El cuadrado es bastante popular. Gnashfang lo comparte con Frozo; lo utilizan en días de la semana alternos».

«¡Oh!». Rocky pensó durante unos momentos. «Quizá los sacerdotes tengan razón después de todo».

«Depende de si la escarcha llega en martes o no. Pero tengan razón o no, no discutas con los sacerdotes. No si tú quieres conservar tus riñones. Nada de losas cuadradas. Ellos quieren dominós».

Rocknuttersson le miró fijamente como se podría mirar a algo viscoso que saliera arrastrándose de debajo de una roca. «Pnerd, por el amor del Gran Boggie, ¿qué es un *dominó*?».

«Dos cuadrados pegados, Rocky».

«Entonces ¿por qué no lo dicen así? ¿Por qué no dejan claro que quieren adosados? ¿Por qué usan un nombre estúpido como “dominó”?».

«¡Que me muera si lo sé!», dijo Pnerd, y esquivó el golpe que Rocky le dirigía. Luego su rostro se puso serio. «Podría haber un problema, Rocky, quizá los dominós no encajen».

«¡Por supuesto que encajarán! ¡Todo lo que tienes que hacer es colocar uno de ellos donde antes había dos de los viejos cuadrados!».

Pnerd frunció el ceño. «Sí, pero eso sólo funciona si el número total de cuadrados es par. Cada dominó cubre dos cuadrados. Si empiezas con un número impar, al final quedará un cuadrado suelto».

Rocky suspiró. «¡Pnerd, tú dijiste que había sesenta y cuatro cuadrados! ¡Eso es par!».

«¿Lo es?».

«Con tal de que las losas estén horizontalmente, sí; el *mercado* entero debe ser par».

«¡Oh! Muy bien». Se rascó la nariz distraídamente. «Mmmm. Creo que debería haber mencionado las estatuas de Gog y Magog».

Rocknuttersson se levantó furioso de un salto. «¿Estatuas? ¿*Qué* estatuas?».

«Las que olvidé mencionar. Parece que cuando se agrietó la primera losa, los sacerdotes trataron de solucionar el problema instalando en su lugar una estatua de Gog. Poco después se agrietó otra losa, de modo que ellos pusieron una estatua de Magog haciendo juego. Cada una tiene una base del mismo tamaño y forma que una de las losas cuadradas. De modo que ya no hay sesenta y cuatro cuadrados, hay… humm…».

«Sesenta y dos».

«Correcto, sí. Humor… ¿es *ése* un número par?».

Rocky empezó a contar con los dedos, pero se le acabaron antes de que llegase muy lejos. «Francamente, Pnerd, no tengo ni idea».

«Bien, harías mejor en asegurarte antes de que grabemos nuestras firmas en cualquier contrato legal vinculante, Rocky. Hay cláusulas de penalización». Esperó durante veinte minutos mientras Rocknuttersson maldecía a quien quiera que fuera el hijo de perra que había inventado las cláusulas de penalización en los contratos del gobierno local, con lo que aprendió 73 nuevos tacos. «Diez años en las minas de azufre si las nuevas losas no encajan», añadió a modo de explicación. Las maldiciones se renovaron. Finalmente, Rocknuttersson se detuvo para tomar aliento y Pnerd aprovechó la oportunidad. «Rocky, no podemos calcular esto por nosotros mismos. Necesitamos un experto». «¿En quién estás pensando?».

«¡Snitchswhiser!».

«Que los dioses te preserven contra la posesión demoniaca». «¡No, yo no he estornudado, idiota! ¡Snitchswhiser Whisnitchersdorter!».

«Tú lo has hecho… ¡Oh, te refieres a ella! Tu amiga numerosofista que vive en el Pantano del Gato Muerto». Pnerd asintió con la cabeza. «Astuta idea, aprendiz: decididamente necesitamos un experto. A nosotros nos desbordan estas cuestiones».

Snitchswhiser Whisnitchersdorter estaba cosiendo nuevos adornos de lunares en su túnica cuando ellos llegaron. Rocky expuso su problema y ella lanzó una risa sardónica. «Con buen trabajo me vienes. Hay aspectos de la cuestión que no serían evidentes para los profanos, y vosotros os hubieseis encontrado en serios problemas. Para empezar, aunque 62 es realmente un número par —ella hizo una pausa mientras Rocky y Pnerd discutían sobre quién había sido el primero en conjeturar que eso era cierto, y quién había afirmado lo contrario—, no es suficiente con que el número de cuadrados sea par».

«¿No lo es?».

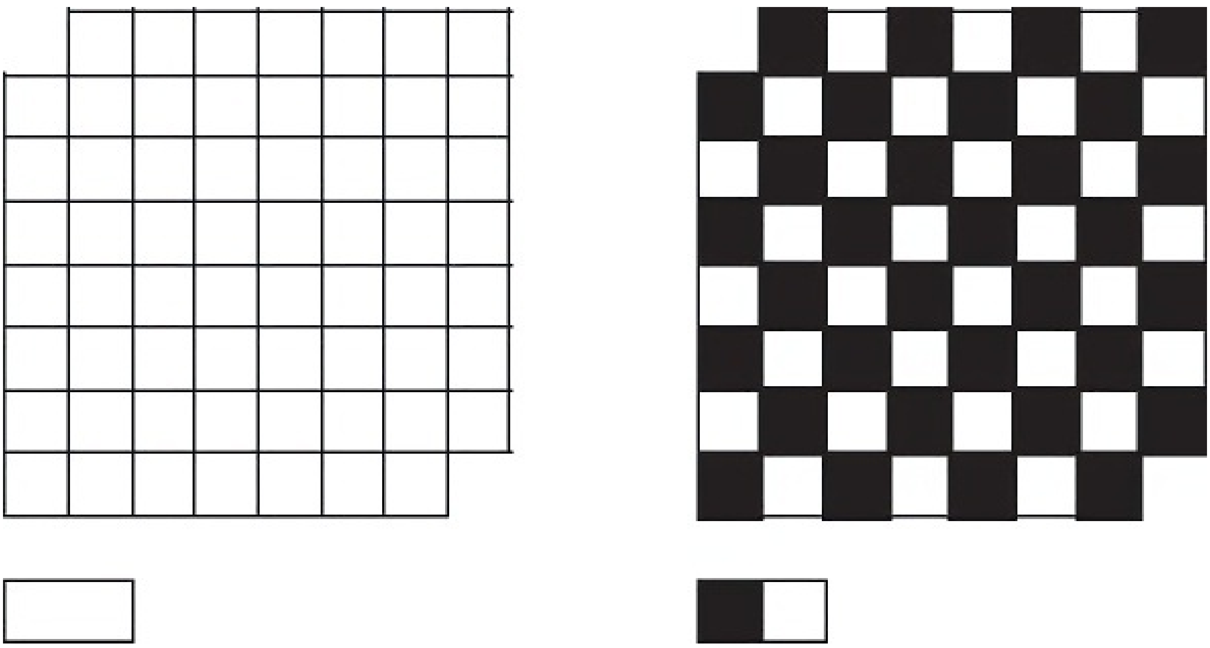
«No. Hay una cuestión de paridad más sutil. Es un viejo acertijo numerosófico. Por ejemplo, supongamos que se han eliminado las dos esquinas opuestas del cuadrado (figura 2a). ¿Es posible cubrir con dominós los 62 cuadrados restantes?».

«Me rindo», dijo Rocky.

«Debería serlo», dijo Pnerd. «Hay mucho espacio para ensayar diferentes configuraciones y no puede quedar un cuadrado fuera».

«Cierto. Pero podrían quedar dos fuera». Snitchswhiser revolvió en un rincón de la cabaña *y* encontró un tablero en el que había marcada una cuadrícula de 64 cuadrados y una caja de rectángulos de madera, cada uno de ellos del tamaño justo para cubrir dos cuadrados adyacentes. Ella colocó sendos guijarros en dos esquinas opuestas. «Inténtalo».

Pnerd empezó a jugar con los cuadrados. Rocknuttersson se acercó sigilosamente a Snitchswhiser y le preguntó para qué eran el tablero y las piezas de madera. «Tuve una idea para un juego», dijo ella. «El tablero representa un río, y hay que utilizar las piezas de madera para construir una especie de arco sobre él, sin que se caiga. Iba a llamarlo “puente”».



(a) (b)

FIGURA 2

(a) Una cuadrícula 8×8 de la que se han eliminado dos esquinas opuestas. ¿Puede cubrirse con 31 dominós?

(b) Si la cuadrícula se colorea como un tablero de ajedrez, hay 32 cuadrados negros y 30 blancos. Por lo tanto, dos cuadrados negros deben quedar descubiertos.

«No tendrá éxito, no con ese nombre», dijo Rocky.

Pnerd, frustrado, dio un golpe en la mesa. «¡No encajan! ¡Lo he intentado una docena de veces pero no encajan!».

Snitchswhiser Whisnitchersdorter sonrió. «Y nunca lo harán, Pnerd. Déjame llamarte la atención sobre los diferentes colores de los cuadrados (figura 2b)».

«Ésa es una bonita pauta».

«Sí, yo la llamo “ajedrezado”».

«¿Por qué?».

«Porque cuando la dibujas tienes que tener cuidado en comprobar[1] que no has cometido un error. Yo hice los cuadrados negros con carboncillo y los blancos con extracto de raíces maceradas en las sombras de la noche».

«¿Por qué no utilizas tiza?».

«¡Ésa es una idea brillante, Pnerd! Nunca se me ocurrió que se podía utilizar tiza para escribir. ¡Imagínate, escribir con una piedra en lugar de un palo quemado! En cualquier caso, si piensas en la manera de colocar un dominó en el tablero, verás que siempre debe cubrir un cuadrado blanco y uno negro, porque no hay dos cuadrados negros adyacentes, y lo mismo es cierto para los blancos. Pnerd: ¿cuántos cuadrados blancos hay, sin contar las dos esquinas?».

Pnerd contó laboriosamente. «Treinta».

«Correcto. ¿Y cuántos negros?».

«Umm… treinta y dos».

«Exactamente. Puesto que cualquier dominó cubre uno de cada color, al menos dos cuadrados negros deben quedar sin cubrir. Tú tienes razón en que no habías dejado fuera sólo un cuadrado. Pero eso no descarta haber dejado fuera dos. Es un principio general de paridad para dominós: mientras el número total sea par, uno siempre tiene que tener números iguales de cuadrados blancos y cuadrados negros».

«Eso —declaró Rocknuttersson— es absolutamente brillante, Snitchswhiser. Salvo que —añadió— los cuadrados en el mercado de

Quagville son *todos del mismo color*». Le lanzó una mirada fulminante. «Típica teórica rubicunda, sin ningún sentido práctico».

«Pero —dijo Snitchswhiser— tú siempre puedes *imaginar* que los cuadrados están coloreados, y se aplica el mismo argumento». Rocknuttersson pensó sobre esto durante algunos minutos y luego se puso colorado. Para disimular su bochorno, envió de nuevo a Pnerd a Quagville para comprobar que las estatuas de Gog y Magog no habían sido colocadas en cuadrados que, si uno *imaginaba* el mercado coloreado en un ajedrezado negro y blanco, tenían el mismo color.

Pasaron otros dos días durante los cuales, Rocky ayudó a Snitchswhiser a preparar sopa suficiente para mantenerla a ella y su anciano padre durante el próximo invierno. Entonces reapareció Pnerd.

«Bog, fue aburrido. Durante el camino escribí un poema para divertirme, Snitchswhiser. ¿Te gustaría oírlo? Trata de una temible criatura de la selva».

«Habla».

Pnerd tomó aliento y sacó su flaco pecho. «Conejo, conejo. Que brillas ardiente en los bosques de la noche. Qué mano u ojo inmortal…»[2].

«¡Que te conviertas en un pastel de conejo!», dijo Rocky. «Deja de perder el tiempo, Pnerd, e infórmanos de la colocación de las estatuas».

«¡Tenemos suerte, Rocky! ¡Una estatua está en un cuadrado blanco y la otra en uno negro!».

«¿Cuál?».

«¿Eh?».

«¿Gog, está en un cuadrado blanco o en uno negro?».

«Glups, Rocky».

«Mira, podría ser importante, Pnerd. Los sacerdotes de Gog llevan túnicas negras, mientras que los de Magog las llevan…».

«¡Oh! Mira, eran sólo colores imaginarios, Rocky, yo siempre podría cambiarlos…».

Rocky movió repentinamente la cabeza. «No es tan fácil, Pnerd. Acabo de darme cuenta de que los sacerdotes de Magog llevan sombreros negros, mientras que los de Gog…».

«¡Por el amor de Bog!», gritó Snitchswhiser. «¿A quién le importa?». Agarró a Pnerd por el hombro. «¿Recuerdas dónde estaban las dos estatuas?».

«No».

«¡Oh, vaya!».

«¿*Importa* eso?», preguntó Rocky.

«No estoy segura. Podría. Deberíamos enviar de nuevo a Pnerd a… No, eso llevaría días».

«Dos días», dijo Pnerd. «Y, en cualquier caso, estoy harto de ir al mercado de Quagville».

Snitchswhiser miraba pensativa. «¿Sabes?, quizá no importe», dijo. «Pero habría que ensayar un enorme montón de posibilidades para estar seguro. Creo que esta vez consultaré a mi padre».

«Su padre es un taumaturgo», recordó Pnerd a Rocky. «Entra en contacto con los espíritus, y cosas así». Rocky parecía escéptico, posiblemente porque él siempre había acabado con los bolsillos vacíos cuando estaba por medio la taumaturgia, pero Snitchswhiser corrió por la ciénaga para ir a buscarlo. Pronto reaparecieron ella y el viejo, de nombre Wishsnitcher Dishpitchersson. Convenientemente remunerado con plata del monedero de Rocknuttersson, él sacó de su vestimenta unas cartas de Tarot y empezó una adivinación.

«Abajo… la Luna. Arriba… la Vaca que Salta. A oeste y este…». «El Gato y el Violín», sugirió Rocky.

«Sí, pero el Gato está invertido, lo que significa borrachera… Abajo el Sabueso que Ríe…».

«Lo que significa que todos estos procedimientos son una farsa…».

«Lo que significa risas. Más cartas… el Plato, la Cuchara…».

«Y el Cuchillo y el Tenedor».

«No: el par de tenedores». El viejo agitó la cabeza. «Lo que es extraño, puesto que no hay tenedores en el mazo… ¡Ah! Un nombre… Un espíritu del futuro… un seguidor del “Big Blue”, cualquiera que sea el ser místico… Ralph… Ralph…»[3].

«Ése es el sabueso. Ellos siempre acuden a “¡Ralph! ¡Ralph!”. Pero se le llama “ladrador”, no “sonriente”».

«No, es un nombre… Ralph… er… ¿Grimoire? ¿Grimory? No, Ralph Gomory, un futuro numerosofista de gran ingenio… Un tenedor de tres puntas y un tenedor de cuatro puntas, una marca de enorme poder y belleza. ¡Rápido, el carboncillo! El viejo dibujó líneas rápidas en el tablero (figura 3). Luego salió del trance.

Rocknuttersson soltó con pesar otra pieza de plata. «Creo que tu padre se ha quedado a medias, Snitchswhiser».

Ella olfateó y estudió las líneas de carboncillo. «Yo no estoy tan segura, Rockchopper Rocknuttersson. Imagina que las puntas de los dos tenedores son paredes. Entonces puede colocarse entre ellas una línea de dominós, en un lazo sin fin. Si dos cuadrados están ocupados por estatuas, el lazo queda cortado en dos secciones. Quizá sólo en una, si los cuadrados son adyacentes. Si las estatuas están en cuadrados de distinto color, entonces cada sección contiene un número par de cuadrados, de modo que la cadena de dominós puede llenarla por completo. El diagrama representa una prueba de que, independientemente de cuáles sean los dos cuadrados ocupados por estatuas, con tal de que sean de distinto color, el resto puede ser cubierto por dominós. De hecho, es una prueba constructiva que muestra exactamente cómo conseguir ese resultado para cualquier caso dado» (figura 4).

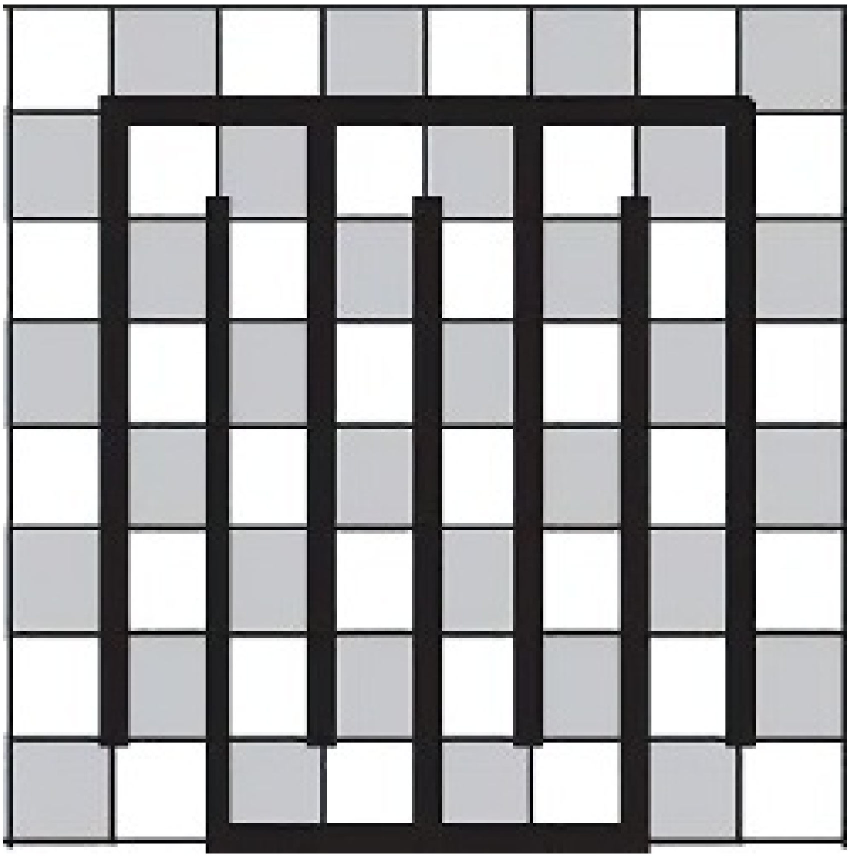


FIGURA 3. La marca de Gomory crea una cadena que puede llenarse mediante dominós consecutivos.

Rocky estaba impresionado. «Snitchswhiser, me disculpo ante tu padre por mi escepticismo. Él ha descubierto una verdad extraordinaria». El viejo murmuró algo sobre «bonitas palabras», «mantequilla», y «chirivías», y Rocky le dio otra pieza de plata para evitar más vergüenza. «¡Pnerd! ¡Ve a por mi cincel de escribir y la losa más fina que se pueda llevar! Encabezaremos el documento "PRESUPUESTO PARA LA RENOVACIÓN DEL MERCADO DE QUAGVILLE, ROCKCHOPPER ROCKNUTTERSSON, RENOVADORES DE ROCAS, MURKLE MIRE"».

«Muy bien», dijo Pnerd. «¡Oh!, nunca te dije lo de las dos nuevas estatuas, ¿no es verdad?».

Rocky le miró fijamente. «Dos… nuevas…».

«Demagog y Wolligog. Los sacerdotes decidieron cubrir algunas grietas más».

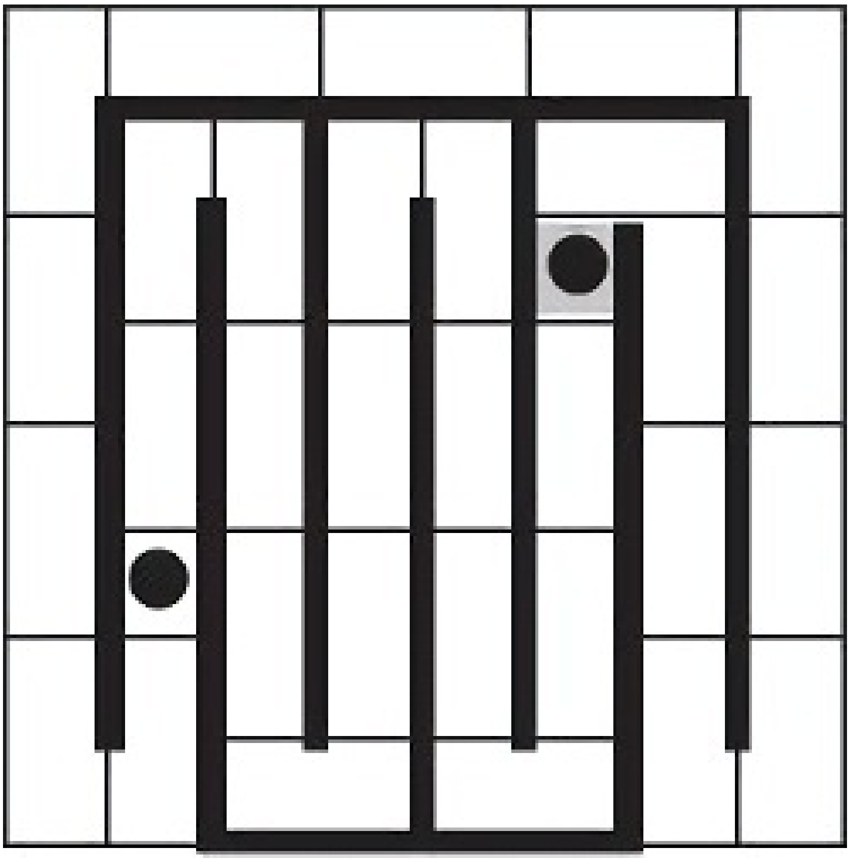


FIGURA 4. Cómo rellenar los dominós si los dos cuadrados omitidos son de distinto color.

«Oh, Gog mío», dijo Rocky.

«Están en cuadrados de distinto color», dijo Pnerd. «Dos estatuas en cuadrados negros y dos en cuadrados blancos».

«Tú no recordarás exactamente cuáles… No, por supuesto no lo recuerdas. Snitchswhiser: ¿funciona la marca de Gomory cuando faltan cuatro cuadrados, dos de cada color?».

Snitchswhiser Wishsnitchersdorter frunció el ceño. «Funciona si, cuando se recorre el lazo de dominós, los cuadrados que faltan aparecen en orden alterno negro y blanco», dijo ella. «Pero si negro viene seguido de negro, entonces el número de cuadrados interpuestos es impar, y la prueba se viene abajo».

«¿Y podría suceder eso?».

«No veo por qué no. Todo es bastante confuso».

«En eso tienes razón». Hubo una larga pausa. Rocky empezó a decir algo, pero fue interrumpido.

«¡No, tranquilo! Tengo una idea… Sí, claro. Corta el tablero en dos partes, tales que cada una de ellas contenga sólo uno de los cuadrados que faltan de cada color. Hazlo de modo que cada parte pueda ser cubierta por un lazo sin fin de dominós, con una marca de Gomory de la forma requerida. Utiliza entonces el mismo argumento para demostrar que cada parte puede ser cubierta».

«¿Existen esas piezas que llevan la marca?».

Ella pensó por un momento. «Muchas. Te dibujaré algunas». (Véase figura 5.) «Hmmm… No he tenido tiempo de entrar en todos los detalles; pero estoy completamente segura de que se puede demostrar que los únicos casos en que el tablero no puede dividirse de esta forma son aquellos en que se han omitido los dos cuadrados negros o los dos cuadrados blancos en la misma esquina (figura 6). En una disposición, es obvio que el cuadrado de la esquina está aislado de todos los demás y no puede encontrarse ninguna solución. En el otro caso… el tablero puede dividirse otra vez en dos regiones, cada una de las cuales contiene sólo un cuadrado omitido de cada color, y todas ellas poseen una marca de Gomory propia (figura 7). Una región tiene que tener un hueco, pero eso no altera el argumento. Creo que un análisis cuidadoso mostrará que siempre es posible cubrir el tablero con dominós, excepto cuando se dé una configuración en la esquina tal como la de la figura 6, para uno u otro color». Se encogió de hombros. «No es una prueba elegante como la de Gomory, no obstante. Quizá algún numerosofista futuro pueda hacerlo mejor».

«En cualquier caso —dijo Rocky—, parece probable que tengamos trabajo». Se levantó de un salto. «Lo que necesitamos es alguien que vaya y compruebe que las estatuas no han aislado uno de los cuadrados de las esquinas. Para estar seguros, Pnerd, esta vez puedes hacer también un mapa de las posiciones de las estatuas, de modo que sepamos exactamente a qué nos enfrentamos. Luego podemos utilizar las piezas de madera de Snitchswhiser para encontrar una solución antes de pujar en el concurso».

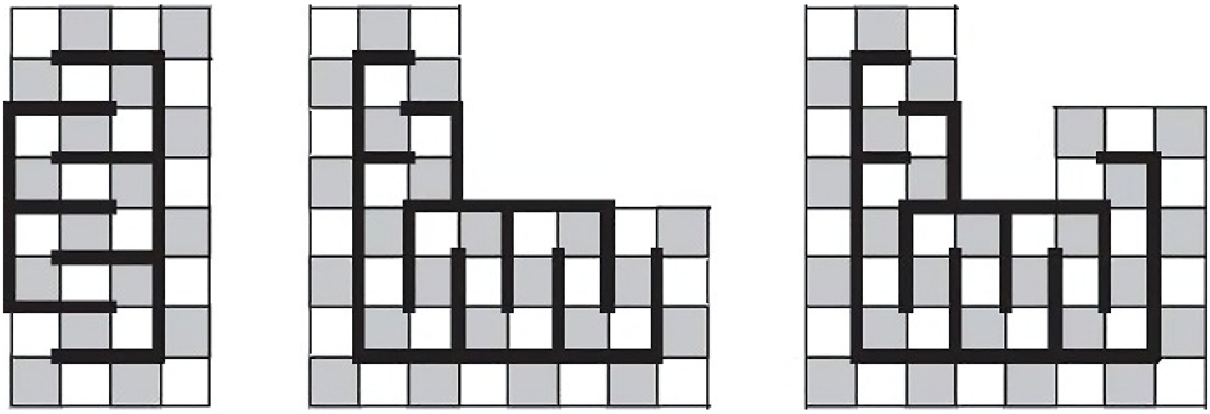


FIGURA 5. Algunas regiones portadoras de marca.

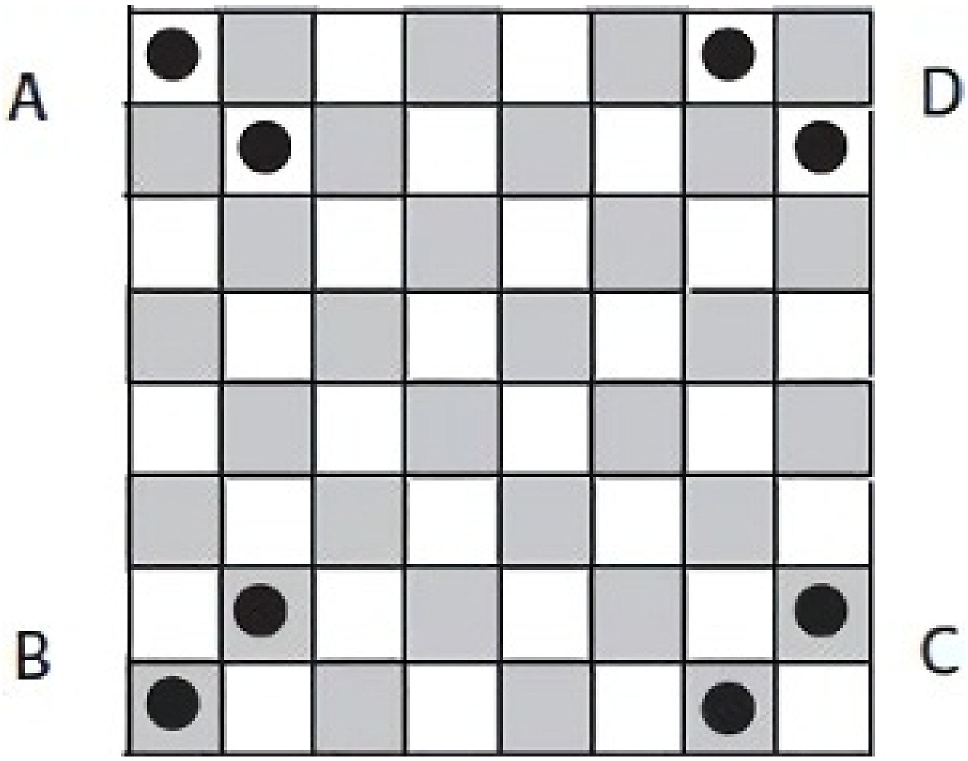


FIGURA 6. Cuatro configuraciones de esquinas problemáticas. C y D bloquean la colocación de un dominó para cubrir el cuadrado de la esquina, pero A y B son inocuos.

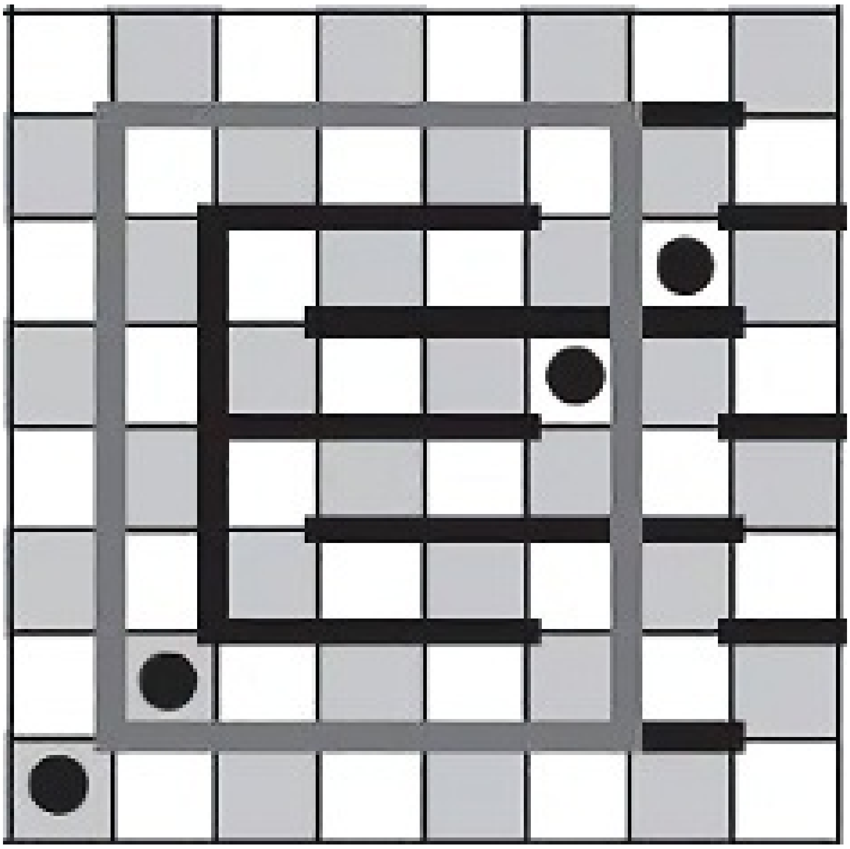


FIGURA 7. Un ejemplo de cómo manejar el caso A de la figura 6. Cada región portadora de marca contiene precisamente un cuadrado omitido de cada color.

Pnerd gruñó. «¿Por qué yo? Yo ya he estado dos veces y es un camino de dos días cada vez».

«*Tú*, Pnerd, eres el aprendiz. Yo soy presidente del Gremio de Fabricantes de Obeliscos».

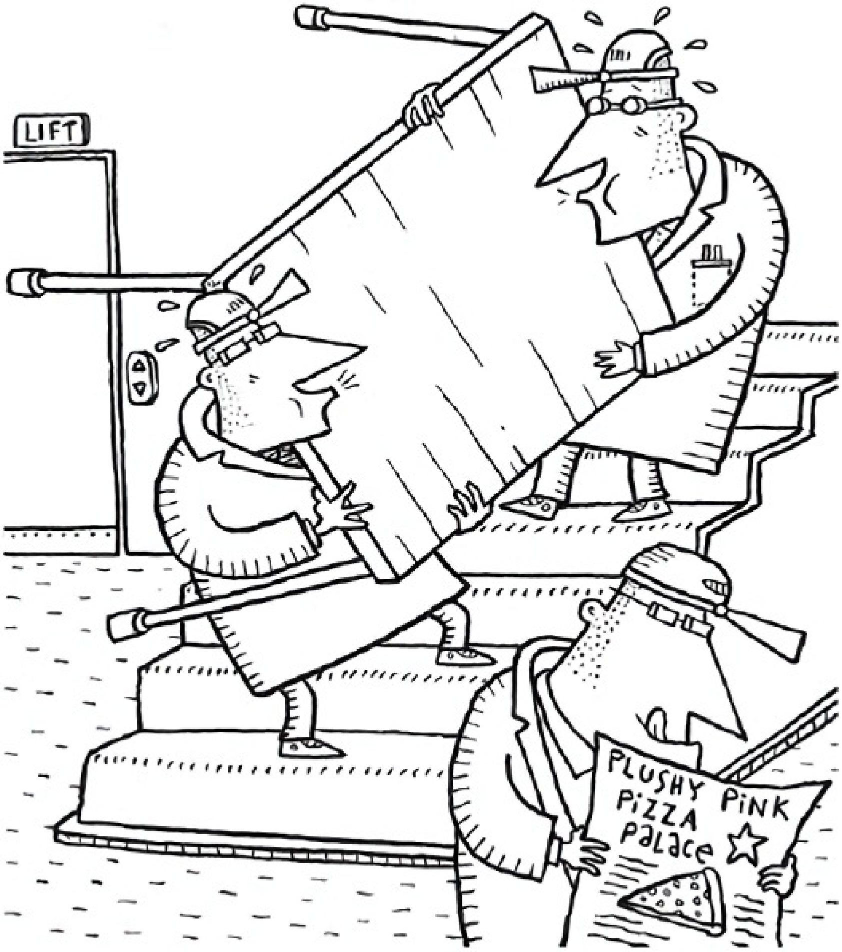
«Oh, muy bien. Me pondré en marcha entonces». Cogió unas pocas tiras de carne de cabrito para comer durante el viaje, y se dirigió a la puerta.

«¡Ah!, ¿Pnerd?».

«Sí, Rocky».

«Estaría bien que estuvieses de vuelta antes de que los sacerdotes coloquen más estatuas».

3
Girando las mesas



Cuando se trata de reordenar el mobiliario, pero el espacio es limitado, el orden en que uno mueva los objetos puede suponer una gran diferencia. Pero ¿cómo se puede encontrar el orden correcto y los movimientos correctos? Para encontrar el camino en una ciudad, o en un laberinto, es útil tener un mapa. De modo que lo que se necesita es un mapa del rompecabezas: un mapa conceptual de un laberinto lógico.

En el piso 67 de la Torre Ruff, dos empleados de la Empresa de Transportes Nosotros-lo-Subimos-4U luchaban con la última de las nueve macizas mesas de roble que habían subido a mano por la estrecha y retorcida escalera que normalmente estaba reservada como salida de emergencia en caso de incendio. Ellos habrían utilizado el ascensor pero Goofy Ruff, el propietario de la Torre Ruff, temía que el peso de las mesas fuera demasiado para los cables de suspensión.

Arrastraron la mesa al interior del almacén para juntarla a las otras ocho. La puerta se cerró tras ellos con un chasquido.

«Hecho», dijo Dan, respirando pesadamente. «Una comprobación final y luego pago un almuerzo en el Plushy Pink Pizza Palace. Dos mesas cuadradas grandes, seis mesas rectangulares enormes y una megamesa descomunal».

«Correcto», dijo Max punteando en una lista sujeta en una desgastada tablilla portapapeles. «Una de uno por uno, seis de dos por uno, y una de dos por dos». Su lápiz garabateó en la página. Levantó la vista. «Oye, esto está bastante lleno».

«Hasta los topes. Mesas de pared a pared, salvo donde nosotros estamos».

«Hicimos bien en encajarlas. Me pregunto por qué quieren tantas».

«Creo que sólo están utilizando esta habitación como almacén temporal hasta que acaben la redecoración de la sala de baile en la planta baja. Se rumorea que Rasputina Ruff le dijo a Goofy que en realidad ella prefería la piedra verde a la turquesa».

Max gruñó. «¿Quieres decir que después de hacernos subir todo esto hasta aquí ellos querrán que lo bajemos de nuevo?».

«Sí. La próxima semana. Es el negocio, Max, no le des vueltas. Considéralo un desafío, un test del carácter mental y la fuerza física. Yo no puedo resistir un desafío, ¿tú puedes?».

«Yo tengo suficiente carácter mental y fuerza física para resistir *cualquier* desafío, te lo agradezco mucho. Creo que buscaré un trabajo para cavar alcantarillas, eso está más cerca del suelo».

«Hablando de eso, también lo está el Plushy Pink Pizza Palace». «Correcto. Vamos. ¡Woops!».

«¿Qué quiere decir ese woops?».

«La puerta debe haberse cerrado detrás de nosotros».

El rostro de Dan era un cuadro. Recuperó su ánimo. «Que no cunda el pánico, se supone que hay un teléfono de emergencia en alguna parte».

«Lo sé», dijo Max. «Está detrás de esa portezuela en la pared donde dice “teléfono de emergencia”».

«¡Bien!».

«Que está bloqueada por esa maciza mesa de roble».

«Ya no tan bien. Tendremos que moverla».

«Están muy encajonadas», observó Max. «No va a ser fácil». «¿No podemos apilarlas de alguna manera y hacer un poco de hueco?».

«No es posible. El techo es demasiado bajo».

Tras media hora de vanos esfuerzos, hicieron un alto. «Dan, tenemos que reflexionar sobre esto antes de que agotemos las energías. Calculo que estaríamos bien si pudiéramos mover la mesa más grande a esa esquina (figura 8). Luego podemos deslizar las mesas en el espacio que quede, una por una, creando así nuevos espacios para deslizar en ellos otras mesas».

«¿No quedaremos atrapados?».

«No, podemos arrastrarnos por debajo», dijo Max.

Dan se agachó para mirar por debajo de una mesa. «Tienes razón, hay mucho sitio». Se rascó la cabeza, pensando. «Sabes —dijo— cuando yo era niño tenía un juguete. Se llamaba “Rompecabezas de papá”, y consistía en deslizar bloques cuadrados y rectangulares para que papá pudiera mover su piano. Era muy parecido a esto». Hizo una pausa. «De hecho, era sospechosamente igual que esto. En cualquier caso, me llevó tiempo, pero al final aprendí a resolverlo».

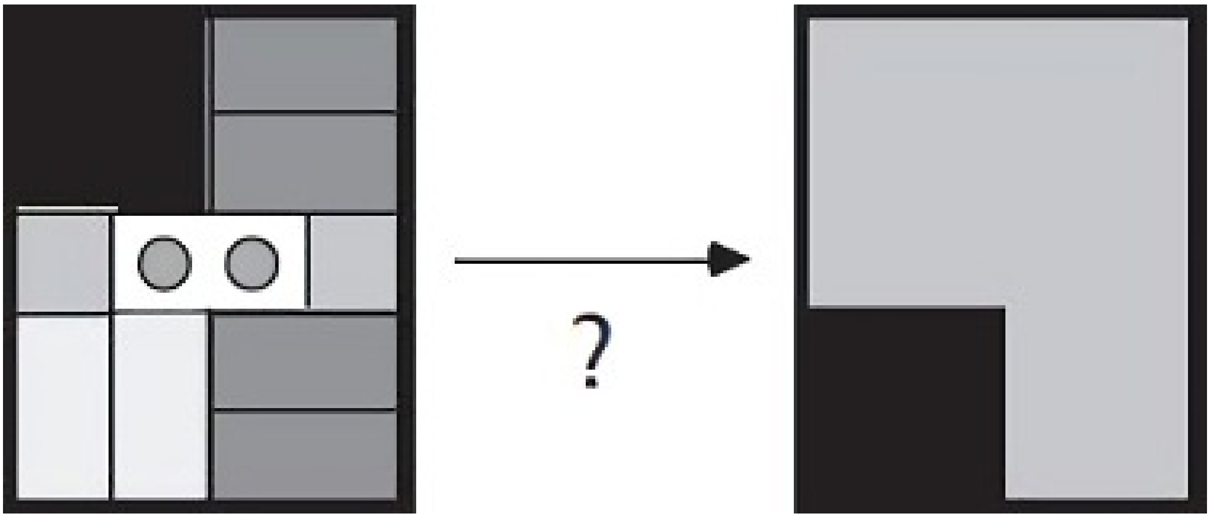


FIGURA 8. ¿Puede usted deslizar las mesas hasta que el gran cuadrado negro pase al rincón inferior izquierdo? Dan y Max, representados por dos círculos, están de pie en el único espacio abierto.

«¡Perfecto! ¿Puedes recordar cómo?».

«Sí. Uno desliza los bloques hasta que los tiene donde quiere». Max hizo una mueca. «Creo que necesitamos algo más concreto, Dan».

Dan se encogió de hombros, no era culpa suya que él no pudiera recordar cómo se resuelve un rompecabezas que le habían regalado para su sexto cumpleaños. «Aún puedo recitar todo *El Gato en el Sombrero*»[4], dijo, para demostrar que pese a todo él poseía una memoria superpotente.

«Sí. "Y todo lo que pudimos hacer era quedarnos sentaditos. Y no nos gustaba, ni un poquito". Muchas gracias, Dan».

«No hay que desanimarse. Desplacemos algunas de las mesas y veamos dónde nos lleva eso».

Pasó otra media hora, tras la cual habían conseguido mover con éxito la mesa más grande desde el rincón superior izquierdo al centro de la pared derecha (figura 9). Era un avance, pero —como observó Dan— ¿en qué dirección?

«Lo que necesitamos —meditó Max— es un mapa».

«Max, podemos *ver* dónde están todas las mesas».

«No me refiero a un mapa de la *habitación*».

«Entonces ¿qué?».

«Un mapa del *rompecabezas*».

Dan le miró fijamente. «¿Te has vuelto loco? Los rompecabezas no tienen mapas».

«Lamento contradecirte, colega. Aunque, pensándolo bien, me gusta contradecirte. En cualquier caso, los rompecabezas tienen mapas. Mapas conceptuales. Mapas imaginarios en el cerebro. Mapas que te dicen cuáles son todas las posiciones en el rompecabezas, y cómo pasar de una a otra. Laberintos mentales que te dicen qué movimientos hay que hacer y en qué orden».

Dan asintió con la cabeza. Por supuesto. Salvo que… «Va a ser un mapa muy complicado, Max. Hay un montón de posiciones y un montón de movimientos».

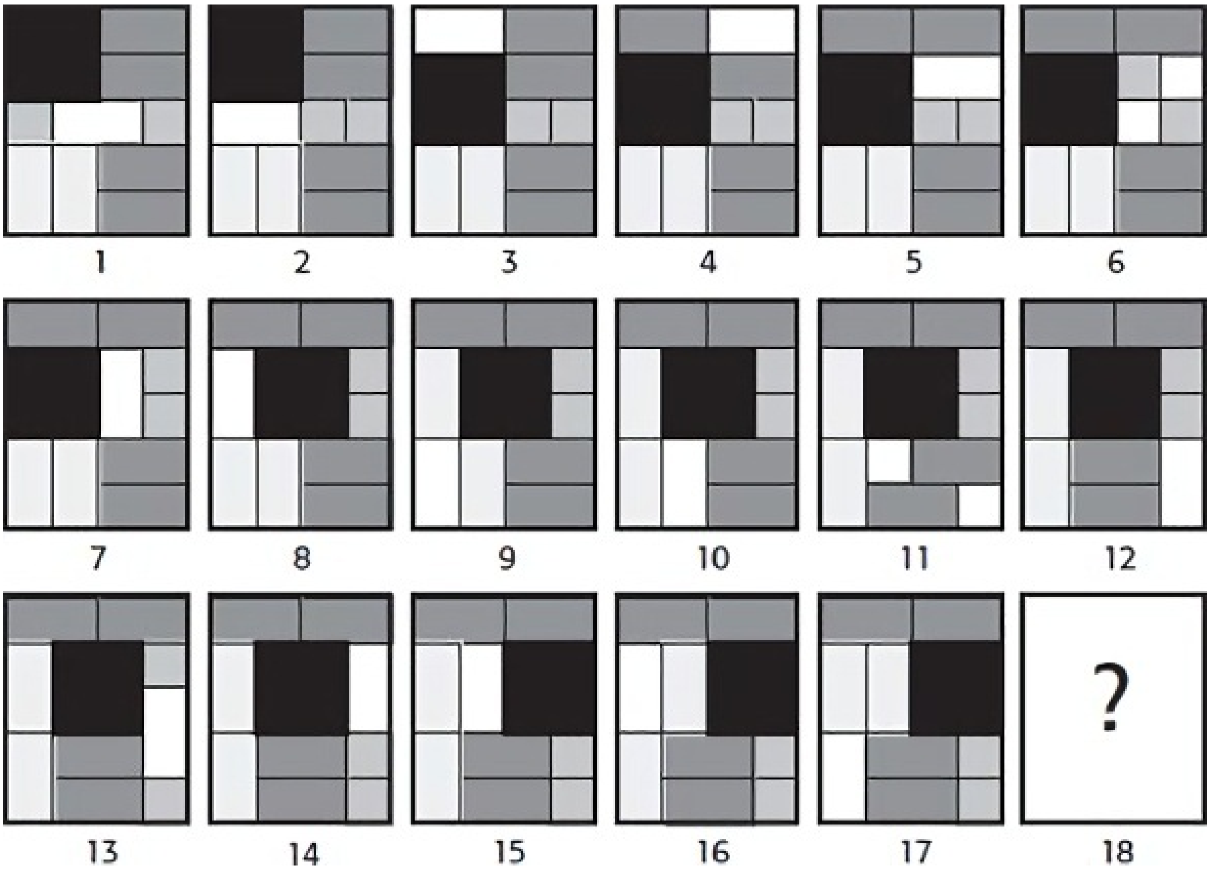


FIGURA 9. Una secuencia de movimientos posible.

«Cierto. De modo que haríamos mejor en encontrar alguna forma de reducirlos. Dividamos el problema en piezas más sencillas. ¡Hey! Sí, eso es. Lo primero de todo, descubramos lo que podemos hacer *fácilmente*. Luego podemos tratar de encadenar esas cosas».

«Bien, para empezar, si conseguimos un hueco cuadrado con las dos mesas más pequeñas en él, podemos mover esas mesas con toda libertad», dijo Dan. (Véase la figura 10a).

«Sí, ésa es la idea. Una especie de "subrompecabezas" donde uno mueve sólo algunas mesas dentro de alguna frontera bien definida». (Las posiciones 5-6-7, de la figura 9 utilizan precisamente un subrompecabezas semejante). Se detuvo y pensó. «Humm. Hay otro, un poco más complicado, donde tenemos una región rectangular que contiene dos mesas rectangulares y dos cuadradas, y el resto es espacio libre». (Véase la figura 10b).

«De modo que podríamos suponer que las posiciones que difieren unas de otras en cambiar mesas dentro de uno de estos subrompecabezas son prácticamente la misma», dijo Dan. «Eso debe reducir bastante la lista de posiciones».

«Sí. Y hay otra cosa. A veces sólo hay una manera razonable de seguir moviendo las mesas, si no quieres volver atrás». (Las posiciones 3-4-5 de la figura 9, o la secuencia más larga 7-17, son ejemplos).

«Así que con tal de que sepas de dónde partes y a dónde tratas de ir, las secuencias como ésa pueden quedar fuera del mapa».

«Exactamente. Pásame esa tablilla y un lápiz». En resumen, Dan y Max estaban mirando un mapa de parte del laberinto conceptual de las posiciones y movimientos posibles (figura 11).

(a)

(b)

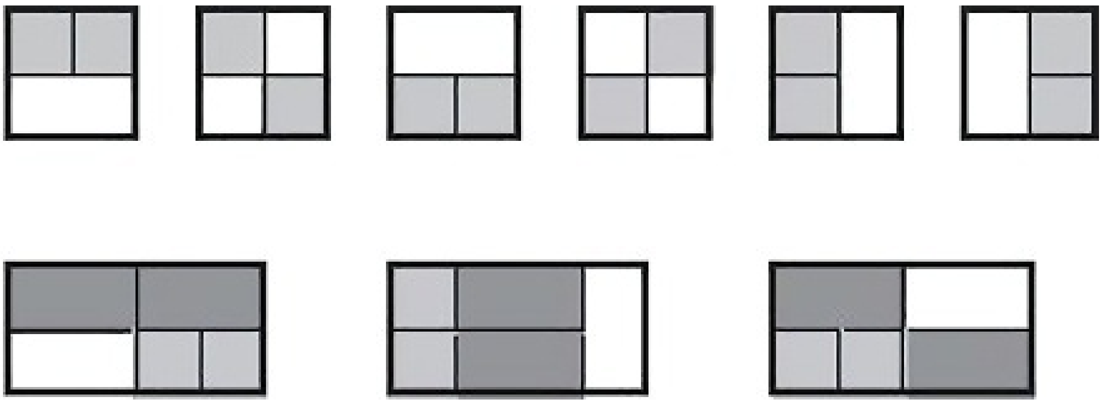


FIGURA 10. Algunas maniobras útiles. En cada subrompecabezas las mesas pueden reordenarse fácilmente sin salir de las fronteras señaladas.

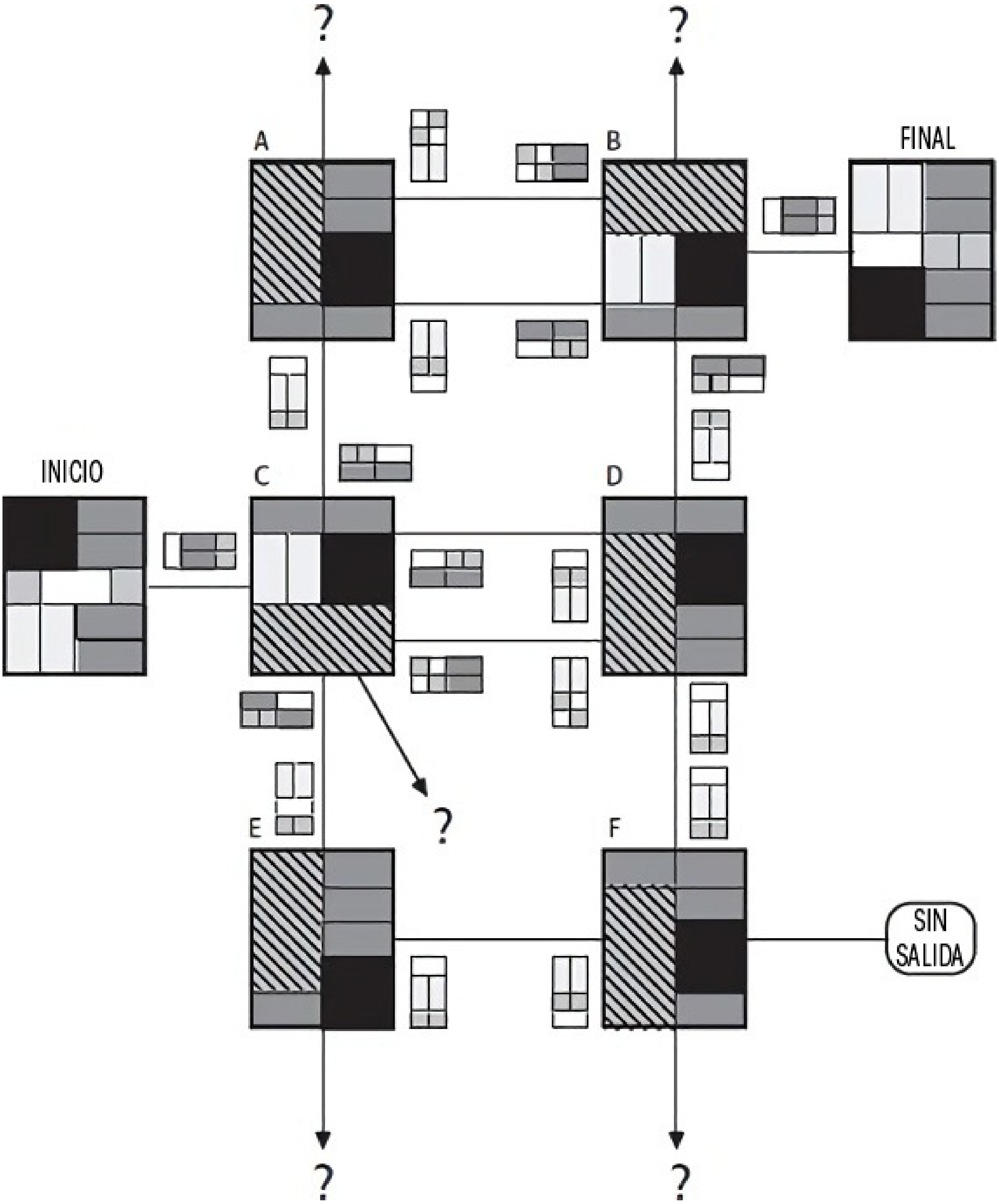


FIGURA 11. Un mapa parcial del rompecabezas. Las regiones rayadas representan subrompecabezas que hay que resolver utilizando las maniobras útiles de la figura 10. Las líneas indican secuencias de movimientos, a veces muy largas, que son esencialmente «obligados» si uno sabe dónde quiere ir. Por ejemplo, la línea desde INICIO a C representa la secuencia de 17 movimientos mostrada en la figura 9. Los diagramas pequeños muestran cómo tienen que estar dispuestos los subrompecabezas en el inicio y el final

de dichas secuencias. Utilizando este mapa como una guía, el rompecabezas se hace relativamente fácil de resolver.

«He marcado las posiciones inicial y final», dijo Max. «Entonces hay varias maneras de colocar las mesas clave, que he marcado como A, B, C, D, E, F».

«Yo hubiera esperado que fueran más de seis».

«Las hay. Esto es sólo *parte* del mapa. Pero es más que suficiente para resolver el rompecabezas. Ahora, calla y escucha. Las líneas muestran secuencias de movimientos obligados, en el sentido de que si tú sabes dónde empezar y dónde acabar, los movimientos intermedios son obvios porque en general sólo puedes hacer una elección en cada paso, ¿de acuerdo?».

«Muy bien, lo veo. Una vez que has jugado con un rompecabezas durante un tiempo, no puedes dejar de advertir una cosa así».

«Tú lo has dicho. Ahora he sombreado regiones rectangulares donde hay un subrompecabezas que resolver. Para mostrar qué subrompecabezas, he hecho pequeños dibujos de las posiciones inicial y final dentro del rectángulo en los extremos adecuados de las líneas que las conectan».

La boca de Dan se abrió como la de un pez de colores. «Lo siento, no te sigo del todo».

«Bien, supongamos que quieres calcular cómo pasar de C a E. Considera la línea vertical que las une. Además de ella hay dos pequeños diagramas. Si reemplazas el área rayada en C por el diagrama superior, y el área rayada en E por el inferior, eso te da las posiciones inicial y final. Puesto que los movimientos intermedios son "obligados", no se necesita mucho tiempo para calcularlos. Si haces una copia del rompecabezas con trozos de cartón, puedes moverlos y comprobarlo».

«¿Qué significa CALLEJÓN SIN SALIDA?».

«¿Qué *crees* que significa? Ahora ¿qué nos dice el mapa?».

«Nos dice dónde están las cosas y cómo pasar de una a otra. Bueno, las claves para estas cosas».

«Nos dice más que eso. Nos dice que una manera de resolver el rompecabezas es ir por la ruta INICIO-C-A-B-FINAL. Simplemente usa los pequeños diagramas que hay junto a las líneas apropiadas para rellenar los trozos sombreados de los diagramas grandes, y luego sigue las secuencias de movimientos obligados».

El rostro de Dan se iluminó con admiración. «¿Podríamos seguir INICIO-C-D-B-FINAL en su lugar?».

«Seguro. O incluso INICIO-C-E-F-D-B-FINAL; pero ésa sería una ruta innecesariamente complicada».

Dan lo estaba entendiendo ahora. «O INICIO-C-D-F-E-C-D-B-A-B-D-C-E».

Max lo interrumpió antes de que su amigo se desmayara por falta de respiración. «Sí. Pero ésa sería una ruta aún más innecesariamente complicada».

«Me conformaré con la más simple».

«Por mí vale. ¡Pongamos las mesas en movimiento!».

Necesitaron algún tiempo para cogerle el tranquillo, pero una vez que lo hicieron no necesitaron mucho tiempo para tener la mesa grande en el rincón inferior izquierdo de la habitación. Después de eso, Max pudo alcanzar el teléfono de emergencia y llamar al portero que estaba en el vestíbulo. Cuando llegó la ayuda resultó que la nueva disposición de las mesas estaba bloqueando la puerta de modo que no se abría, pero ahora Dan y Max sabían a ciegas su camino por el mapa del Rompecabezas de papá.

No mucho después de la medianoche estaban libres.

Algo agitados por la experiencia, tomaron un taxi y se dirigieron al Plushy Pink Pizza Palace, que estaba abierto toda la noche. Primero tenían que recuperar el almuerzo, y luego tenían que cenar.

«Sabes —dijo Dan—, no fue tan difícil».

«No una vez que elaboramos el mapa. Pero hemos tenido suerte, era un mapa bastante sencillo».

«Sí. Pero eso es porque utilizaste algunos trucos para simplificarlo».

Max se frotó la barbilla —para encontrar una barba crecida—. «Los trucos ayudan, pero hay muchos rompecabezas de bloques deslizantes con mapas mucho más complicados, incluso cuando utilizas todos los trucos que puedas imaginar».

«¿Como cuál?».

«Bien, existe uno llamado El Rompecabezas del asno, que es probablemente del siglo XIX y casi con certeza francés. Es bastante más difícil. El rompecabezas de la Centena, inventado alrededor de 1980, es aún más difícil. Tienes que hacer cien movimientos para resolverlo. Y si añades que la posición final debe ser como la inicial pero invertida, entonces es realmente difícil. Esa versión se llama El Rompecabezas de la centena y media porque requiere 151 movimientos». (Véase figura 12).

El taxi chirrió al pararse en la puerta del Plushy Pink Pizza Palace; Dan pagó al taxista. Entraron y se sentaron. Max pidió una gruesa pizza con queso extra. Dan se decidió por una especial con muchos ingredientes extra: pepperoni, atún, alcaparras, anchoas, ternera, piña, tamales calientes, un plátano entero, goma de mascar, caramelo de regaliz y una bengala encendida. «Mi favorita», explicó a una camarera perpleja. «Asegúrese de que la prepara de abajo a arriba en el orden que he especificado».

Las pizzas llegaron. La de Dan no tenía muy buen aspecto. La mayoría de los ingredientes estaban al revés, incluyendo la corteza. La camarera había incluido un gran trozo de atún y trataba de inflamar el caramelo.

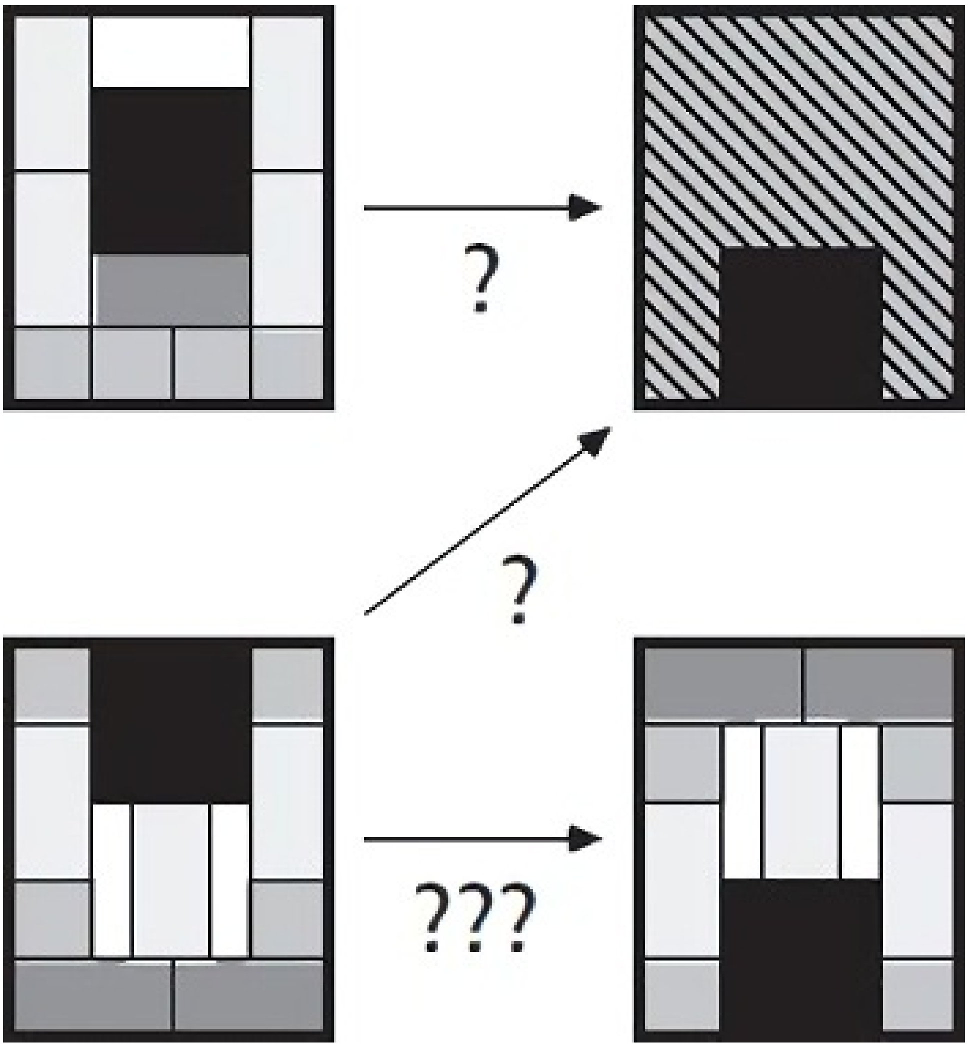


FIGURA 12. Tres rompecabezas de bloques deslizantes más difíciles. Cualquier disposición de bloques está permitida en la región rayada.

Flecha superior: el rompecabezas del asno.
Flecha central: el rompecabezas de la centena.
Flecha inferior: el rompecabezas de la centena y media.

«Disfrute de su rompecabezas, señor», dijo por encima del hombro. «Devuélvela», sugirió Max.

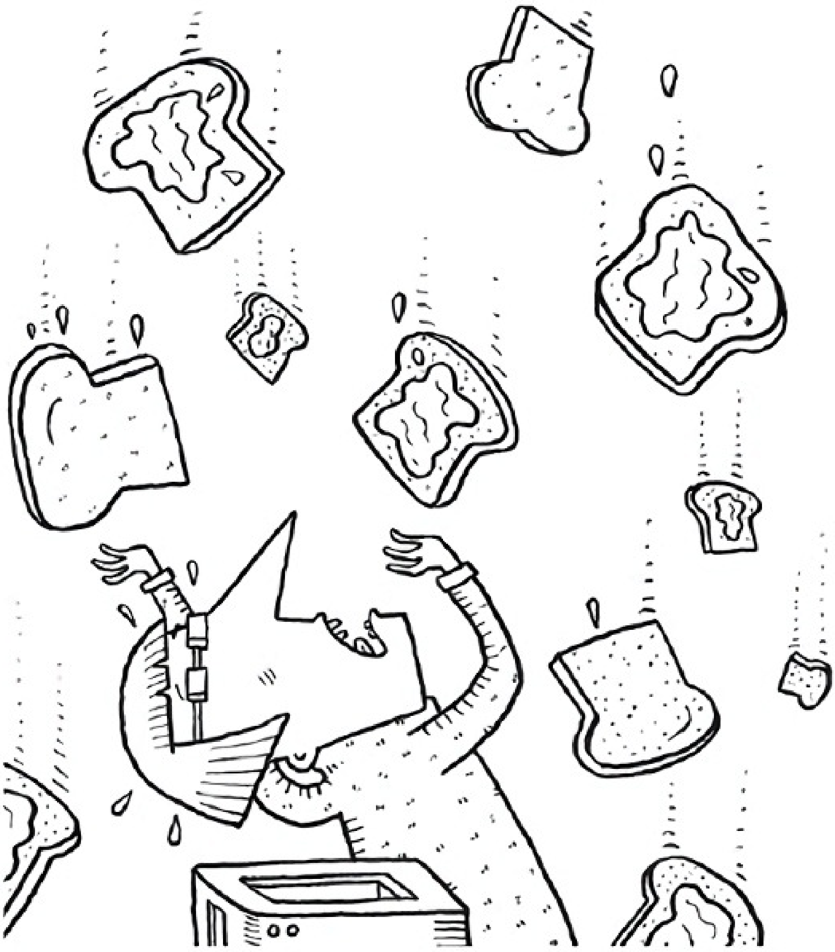
«No, no, ya oíste lo que dijo. Yo no puedo resistir un desafío, es un test de carácter. Solo tengo que reordenar la pizza». Dan cogió el atún, trató de encontrar algún lugar donde ponerlo mientras apagaba el caramelo. ¿Dónde había ido el pepperoni? Oh, sí, dentro de la piña. El plato no era suficientemente grande… Suspiró, volvió a poner el atún, y casi estaba a punto de llamar al encargado para quejarse de que su pizza era demasiado difícil de resolver.

Entonces enderezó su espalda, cuadró sus hombros y buscó la tablilla.

«¿Qué estás haciendo?», preguntó Max.

«Puedo arreglarlo. Simplemente espera hasta que haya hecho un mapa de esta pizza».

4
El principio antropomúrfico



La Ley de Murphy dice que si algo puede ir mal, irá mal. Y que si algo no puede ir mal, irá mal de todas formas. Por ejemplo, si una tostada untada con mantequilla cae de la mesa, siempre llegará al suelo con el lado de la mantequilla hacia abajo. (A menos que usted la haya untado por el lado equivocado…). Pero ¿es éste realmente un caso de la Ley de Murphy o podría ser una propiedad inevitable del universo físico?

Nunca he tenido una tostada
tan especialmente larga y ancha
pero cayó al suelo arenoso
y siempre por el lado de la mantequilla[5].

Así escribía el poeta James Payn parodiando los versos de Thomas Moore sobre una gacela en *The Fire Worshippers*. El suceso descrito es el ejemplo arquetípico de la Ley de Murphy: «Si algo puede ir mal, entonces irá mal». Tiene su origen en experimentos llevados a cabo a finales de los años cuarenta del siglo pasado por un capitán de la Fuerza Aérea de EE. UU. (no hay premio por adivinar su apellido). Existen muchas variantes y extensiones, tales como «Incluso si no puede ir mal, seguirá yendo mal», y se presenta con otros nombres distintos del de Murphy.

En 1991, la serie televisiva *QED* de la British Broadcasting Corporation realizó experimentos en los que la gente lanzaba tostadas al aire en diferentes circunstancias y, en todos los casos, los resultados fueron estadísticamente indistinguibles del puro azar. Y allí podría haberse quedado la cosa si no fuera por Robert Matthews. Matthews es un periodista británico con una veta matemática: un cálculo típico de Matthews empieza con, pongamos por caso, una fotografía de un edificio cuyas ventanas han reventado y termina con una estimación de la velocidad del viento. En el *European Journal of Physics* (véase Lecturas adicionales) él observa que hay dos problemas con los experimentos de *QED*. El primero es que, por su propia naturaleza, la Ley de Murphy puede conspirar para falsificar cualquier experimento orientado a comprobarla. El segundo es que, en las circunstancias normales en un desayuno, la tostada no se lanza aleatoriamente al aire. (Muy bien, *su* familia puede tener su propia manera de hacer las cosas, pero mi punto básico sigue en pie). En general, la tostada recibe un golpe lateral cuando está en el borde de una mesa, y cualquier experimento debería incorporar este aspecto fundamental en el diseño y el análisis del mismo.

Antes de seguir vale la pena aclarar un error muy común. El comportamiento asimétrico de la tostada que cae no es el resultado de la masa extra de la mantequilla. Una tostada típica pesa unos cuarenta gramos, la mantequilla es como mucho el diez por 100 del total y en cualquier caso está básicamente absorbida en la región central. Su efecto en la dinámica de la tostada es despreciable. Y su efecto en la aerodinámica de la tostada, resultante de los cambios de la viscosidad en la superficie, es todavía más despreciable.

Matthews localiza la Ley de Murphy en una asimetría mucho más simple: es la superficie superior de la tostada la que está untada de mantequilla, y esa superficie sigue estando arriba cuando la tostada es empujada en el extremo de la mesa. Cuando la tostada cae hacia el suelo, rota con una velocidad angular determinada por lo que inicialmente sobresale su centro de masas. ¿Podría darse el caso de que la altura de una mesa normal y la fuerza gravitatoria de la Tierra conspiren para crear un predominio de rotaciones de un múltiplo *impar* de 180°? Si es así, caerá siempre con el lado de la mantequilla abajo. Y la breve respuesta es que, según los cálculos de Matthews, sí existe tal conspiración. De hecho, una rotación que voltee la tostada sólo una vez, lo que lleva a un estado final con la mantequilla abajo, es con mucho la más habitual.

Antes de que consideremos las razones más profundas de esta desgraciada coincidencia, vale la pena resumir los argumentos matemáticos que llevan a esta conclusión. La figura 13 muestra la configuración inicial de la tostada y las principales variables involucradas, junto con algunas fórmulas clave derivadas de las leyes de movimiento de Newton. La conclusión principal es que la tostada no puede aterrizar con la mantequilla arriba a menos que el «parámetro de resalte crítico» —el porcentaje de la tostada que sobresale inicialmente del borde con respecto a la mitad de la anchura de la tostada— es al menos del seis por 100. El experimento muestra que para el pan el valor es del dos por 100, y para la tostada del 1,5 por 100. Ambos son mucho menores de lo que se requiere para que el pan o la tostada roten más de 360° en su camino hasta el suelo. Puesto que se puede demostrar que la rotación es al menos de 180°, esto implica que la mantequilla abajo es la regla inviolable.

LA MURFODINÁMICA DE LA TOSTADA

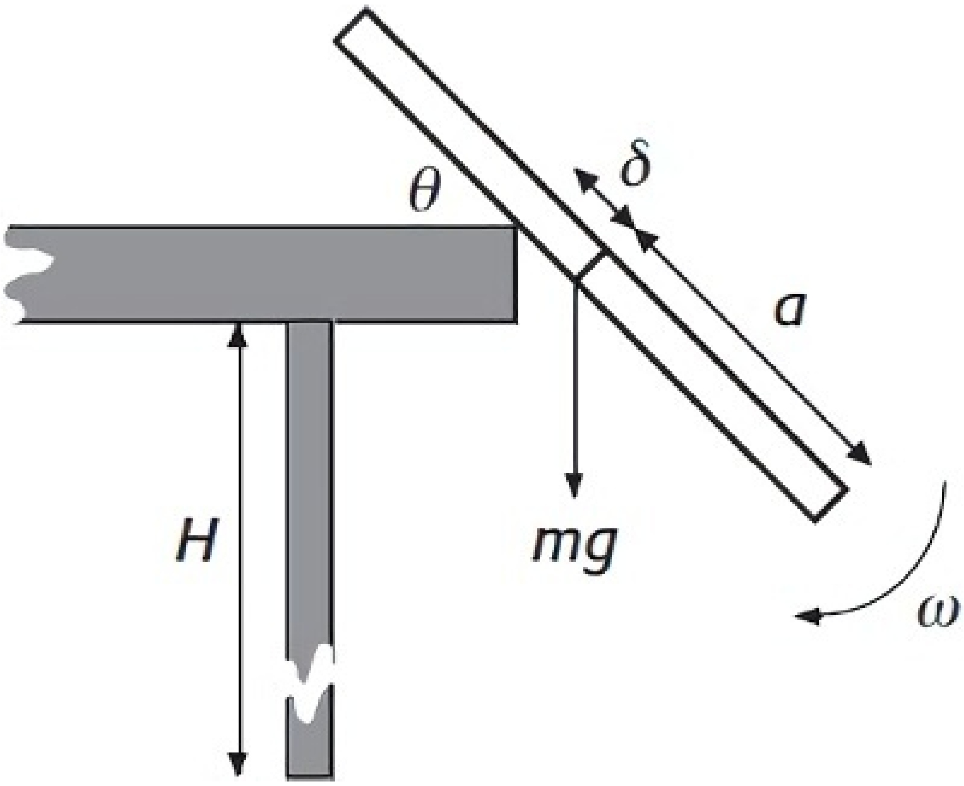


FIGURA 13. Variables para la dinámica de la tostada.

Las variables clave (véase figura 13) son:

g = aceleración debida a la gravedad
m = masa de la tostada
a = semianchura de la tostada
δ = resalte inicial
θ = ángulo de rotación
ω = velocidad angular de rotación
H = altura de la mesa

Definimos el parámetro de resalte $\eta = \delta/a$. Entonces, las leyes del movimiento de Newton llevan a la relación

$$\omega^2 = (6g/a)(\eta/(1 + 3\eta^2)) \operatorname{sen} \theta$$

siempre que la tostada esté pivotando sobre el borde de la mesa. La tostada se empieza a deslizar cuando la fuerza de fricción en el borde de la mesa es superada por la componente correspondiente del peso de la tostada. Cualquiera que sea la velocidad de rotación en dicho instante, a partir de entonces la tostada rotará a la misma velocidad durante su caída.

Estimaciones sencillas muestran que la tostada rotará al menos 180° en su trayectoria hacia el suelo. Para aterrizar con la mantequilla hacia arriba, debe rotar más de 360°. Sabemos con qué rapidez está rotando la tostada, y *H* (junto con *g*) nos dice cuánto tarda en llegar al suelo. Para mesas y tostadas de dimensiones convencionales, Matthews demuestra que rota más de 360° sólo cuando el parámetro de resalte crítico es mayor que 0,06. El resalte crítico se da cuando la tostada se desprende y empieza a caer libremente.

Este análisis hace algunas hipótesis. Una es que la tostada no rebota cuando da en el suelo. Puesto que la mantequilla es muy viscosa, esto es razonable: el resultado normal es un *plaf*, no un *boing*. Otra hipótesis es que la tostada se desliza lentamente por el borde de modo que se desprende cuando el resalte alcanza el valor crítico. Un análisis más detallado muestra que la velocidad horizontal impartida a la tostada cuando sale del borde de la mesa no tiene gran efecto sobre las conclusiones a menos que sea mayor de 1,6 metros por segundo, lo que requiere un golpe bastante fuerte. Este resultado lleva a una estrategia para impedir una caída con la mantequilla abajo: si usted advierte que la tostada resbala por el borde, golpéela fuertemente con la mano para enviarla volando al otro lado de la habitación. Es muy probable que esta estrategia tenga otros efectos adversos —por ejemplo, si el gato de la familia está situado en el punto de impacto— pero eso evitaría manchar la alfombra de mantequilla.

Todo este análisis está muy bien, pero sugiere que la Ley de Murphy es una mera coincidencia, un extraño caso de «resonancia múrfica»[6] resultante de los valores más bien arbitrarios que la cultura humana asigna a mesas y tostadas, junto con el valor igualmente arbitrario del campo gravitatorio de la Tierra. Matthews señala que nada podía estar más lejos de la verdad. La Ley de Murphy, tal como está encarnada en la tostada giratoria, es una consecuencia profunda de las constantes fundamentales de la naturaleza. Cualquier universo que contenga criaturas remotamente similares a nosotros, necesariamente impondría la Ley de Murphy a dichas criaturas —al menos si comen tostadas y se sientan en mesas.

El argumento exacto es técnico y complicado, pero las líneas generales son simples. El hecho clave fue establecido por W. H. Press quien, en 1980, argumentó que la altura de un organismo bípedo está limitada por el campo gravitatorio en el que vive. Comparados con los cuadrúpedos, los bípedos son intrínsecamente inestables: es mucho más probable que pierdan el equilibrio porque basta que la vertical de su centro de masas quede fuera de la planta de sus pies para que caigan. Los cuadrúpedos tienen una región de estabilidad mucho mayor. (No es una coincidencia que las jirafas sean más altas que los seres humanos).

La altura crítica es aquella para la que es probable que el impacto de la cabeza con el suelo cause la muerte. Por supuesto, este argumento supone que el equipamiento crucial está localizado en la parte superior del bípedo, pero esta circunstancia ofrece ventajas evolutivas tales como la capacidad de ver más lejos. La mitad de la diversión en este tipo de discusiones consiste en hacer hipótesis plausibles y ver dónde llevan. La otra mitad, que dejo para que usted reflexione sobre ellas, consiste en negar dichas hipótesis y ver dónde *eso* nos lleva.

Es también razonable suponer que la altura de una mesa utilizada por un bípedo inteligente será aproximadamente la mitad de la propia altura de la criatura. En la Tierra, una mesa tiene que ser de unos tres metros de altura para que se viole la Ley de Murphy, de modo que nosotros tendríamos que ser de seis metros de altura para escapar a las desafortunadas consecuencias de la resonancia múrfica. La cuestión más profunda es: ¿Podría ser murfológicamente inmune alguna raza de extraterrestres en algún planeta lejano?

Para responder a esta pregunta, Matthews modela los citados extraterrestres como cilindros de polímero cuya componente crítica es una esfera situada en la parte superior. Llamaré a un organismo semejante un polimurfo. La ruptura de enlaces químicos en una capa de polímero ocasiona la muerte. Su análisis lleva a la conclusión de que la altura de un polimurfo viable es como máximo

$$(3nq/f)^{1/2}\mu^2 A^{-1/6}(\alpha/\alpha_C)^{1/4}a_0$$

donde

- n = número de átomos en un plano en el que tiene lugar una rotura (típicamente unos 100)
- q = 3×10^{-3} es una constante relacionada con los polímeros
- f = la fracción de energía cinética que interviene en la rotura de los enlaces poliméricos
- μ = el radio de los átomos del polímero en unidades del radio de Bohr

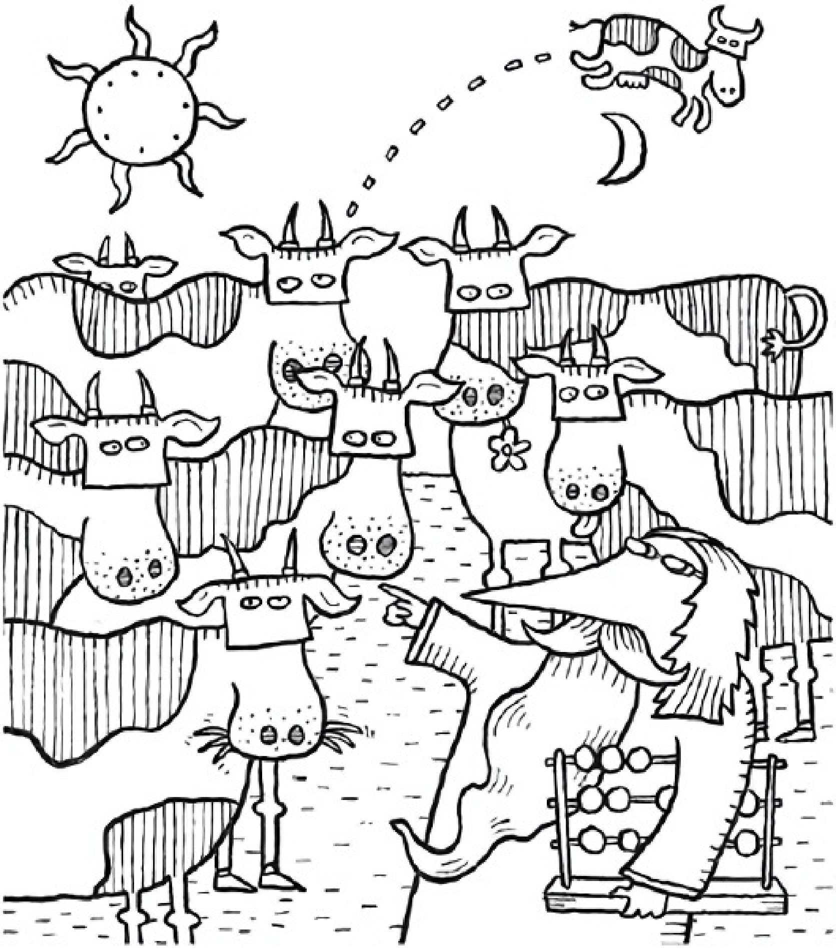
A = la masa atómica del material polimérico
α = la constante de estructura fina electrónica $e^2/(2\pi h\varepsilon_0 c)$ donde e es la carga del electrón, h es la constante de Planck, ε_0 es la permitividad del vacío, y c es la velocidad de la luz
α_C = la constante de estructura fina gravitatoria $2Gm_p^2/hc$ donde G es la constante gravitatoria y m_p es la masa del protón,
a_0 = el radio de Bohr.

Introduciendo los valores relevantes para nuestro universo encontramos que la máxima altura segura para un polimurfo es de tres metros. (El ser humano más alto del que hay noticia, dicho sea de paso, es un tal Robert Wadlow, de 2,72 metros). Esto queda muy lejos de los seis metros necesarios para evitar que se manche de mantequilla la alfombra de la cocina.

Es interesante que este límite superior para la altura de un polimurfo no depende de en qué planeta viva el extraterrestre. La razón es que el balance entre las fuerzas gravitatorias y electrostáticas internas y los efectos de degeneración electrónica, requeridos para que el polimurfo no se caiga a pedazos, relaciona la gravedad del planeta con constantes más fundamentales. Encontramos así que la Ley de Murphy no es una coincidencia en absoluto, sino la consecuencia de un profundo «principio antropomúrfico»: cualquier universo construido según líneas convencionales que contenga polimurfos inteligentes se conformará a la Ley de Murphy. Matthews concluye: «Según Einstein, Dios es sutil pero no malicioso. Quizá sea así, pero es claro que Su influencia en las tostadas que caen deja mucho que desear».

Mi columna original terminaba aquí, pero atrajo un nivel de comentarios tan sin precedentes (incluyendo historias alternativas del origen de la frase «Ley de Murphy» y objeciones a su uso para describir comportamiento inanimado) que vale la pena registrar algunas de las respuestas de los lectores. David Carson de la Universidad de Mississippi para Mujeres informó de una serie de experimentos llevados a cabo por un grupo de profesores y estudiantes, en los que la tostada era (a) arrojada aleatoriamente desde la altura de la cintura, (b) empujada en el borde de una mesa, y (c) empujada desde una escalera de aluminio de tres metros. En los casos (a) y (c) la frecuencia observada de la tostada aterrizando con la mantequilla hacia abajo fue del 47 por 100 y 48 por 100 respectivamente, pero en el caso (b) fue del 78 por 100. ¡Gratificante! Sin embargo, ellos también advirtieron que su tostada a menudo caía «boing» más que «plaf». Carlo Séquin, de la Universidad de California en Berkeley, señalaba que la fuente del problema no es el diseño que hizo Dios del universo, sino el «Comité de Normas Americanas para las Dimensiones de la Tostada», que evidentemente ha decretado que la tostada se haga del tamaño equivocado. Y John Steadman, del St. John’s College, ofreció una serie de argumentos totalmente convincentes de que «no sólo la Ley de Murphy es una consecuencia profunda de las leyes (no sólo las constantes) de la naturaleza, sino que también las leyes de la naturaleza son una consecuencia profunda de la Ley de Murphy». Por ejemplo, la Segunda Ley de la Termodinámica, es «las acciones tienen consecuencias irrecuperables», que es Murphy con una dimensión moral, y la física cuántica es simplemente una versión pesimista de Murphy: «Si algo puede ir mal, *ya ha ido*».

5
Contando el Ganado del Sol



«Si eres diligente y sabio, ¡oh extranjero!, calcula el número de cabezas de ganado del Sol, que en un tiempo pastaba en los campos de la isla Tracia de Sicilia…». Así escribía el antiguo griego Arquímedes a su amigo Eratóstenes de Cirene. La respuesta, encontrada por primera vez en 1880, tiene 206 545 dígitos. Pero con algunas ideas modernas en teoría de números, y un poco de álgebra de computador, podemos encontrar una fórmula exacta.

En su libro de 1917, *Amusements in Mathematics*, el autor de acertijos inglés Henry Ernest Dudeney describe «un curioso pasaje en una antigua crónica monástica» referente a la Batalla de Hastings. En 1773, el dramaturgo alemán Gotthold Ephraim Lessing publicó un problema que había encontrado en la biblioteca de Wolfenbüttel: adoptaba la forma de 22 pareados elegíacos acerca del Ganado del Sol y tenía su origen en Arquímedes alrededor del 250 a. C. Los dos acertijos tienen un elemento matemático común, la denominada «Ecuación de Pell», (mal)llamada con el nombre de un oscuro matemático inglés del siglo XVII cuyas contribuciones al área no eran originales. El «Problema del Ganado» de Arquímedes ha recibido recientemente nuevo impulso por parte de Ilan Vardi (Occidental College, Los Ángeles) con la ayuda del paquete informático Mathematica®. Las matemáticas involucradas son en sí mismas bastante enigmáticas y, aunque la mayor parte de ellas son clásicas, algunos aspectos aún ponen a prueba el ingenio de los matemáticos investigadores.

En el acertijo de Dudeney «Los hombres de Harold estaban muy juntos, como era su costumbre, y formaban sesenta y un cuadrados, con el mismo número de hombres en cada cuadrado… Cuando Harold se unió a la lucha, los Sajones formaron un poderoso cuadrado de hombres, que se lanzaron a la batalla a los gritos de “¡Ut!”, “¡Olicrosse!”, “¡Godemite!”»[7]. ¿Cuál es, preguntaba Dudeney, el mínimo número de hombres que podía haber? En términos matemáticos queremos encontrar un cuadrado perfecto que, cuando se multiplica por 61 y se le añade 1, da otro cuadrado perfecto (figura 14). Es decir, buscamos las soluciones enteras de la ecuación $y^2 = 61x^2 + 1$. Para evitar la respuesta trivial $x = 0$, $y = 1$ (Harold más un ejército de tamaño 0, que no es un «poderoso cuadrado de hombres») exigimos que x sea al menos 1. Quizá quiera usted tratar de resolver esta ecuación antes de seguir leyendo. No obstante, le recomendamos que no gaste demasiado en ello.

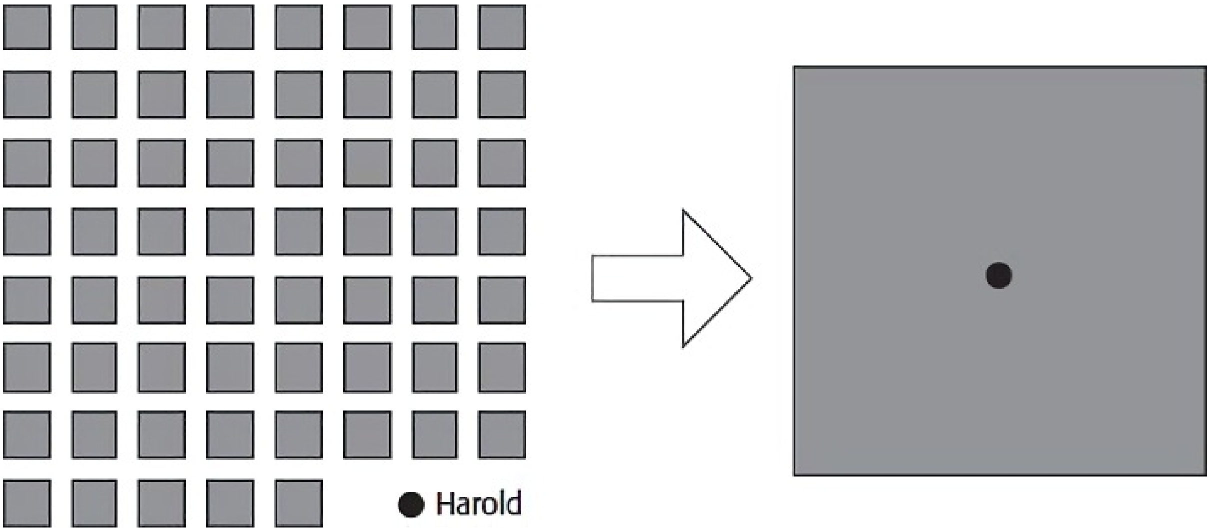


FIGURA 14. Si Harold y sus 51 cuadrados idénticos de guerreros pueden formar un solo cuadrado, ¿cuál es el mínimo número de hombres que puede tener?

Según la teoría desarrollada por matemáticos tales como Pierre de Fermat y Leonhard Euler entre 1650 y 1750 aproximadamente, las ecuaciones de este tipo general, donde 61 puede ser reemplazado por cualquier entero positivo no cuadrado, tienen siempre infinitas soluciones. Si se reemplaza 61 por un cuadrado, entonces la ecuación pide dos enteros consecutivos que sean cuadrados, y la única solución es $x = 0$, $y = 1$, que es demasiado trivial para ser interesante. La técnica para calcular las soluciones implica «fracciones continuas»: puede encontrarse en la mayoría de los libros de texto de teoría de números y también en el entretenido *Recreations in the Theory of Numbers* de Albert H. Beiler (véase Lecturas adicionales). A modo de calentamiento, echemos una mirada a la menos conocida Batalla de Brighton (1065), en la que los hombres del rey Harold formaban 11 cuadrados y todo lo demás permanece igual. Ahora la ecuación es $y^2 = 11x^2 + 1$, y un poco de ensayo y error muestra la solución $x = 3$, $y = 10$ (figura 15). Es decir, $100 = 11 \times 9 + 1$. La siguiente solución es $x = 60$, $y = 199$, y hay un procedimiento general para encontrar todas las soluciones una vez que se ha encontrado la más pequeña.

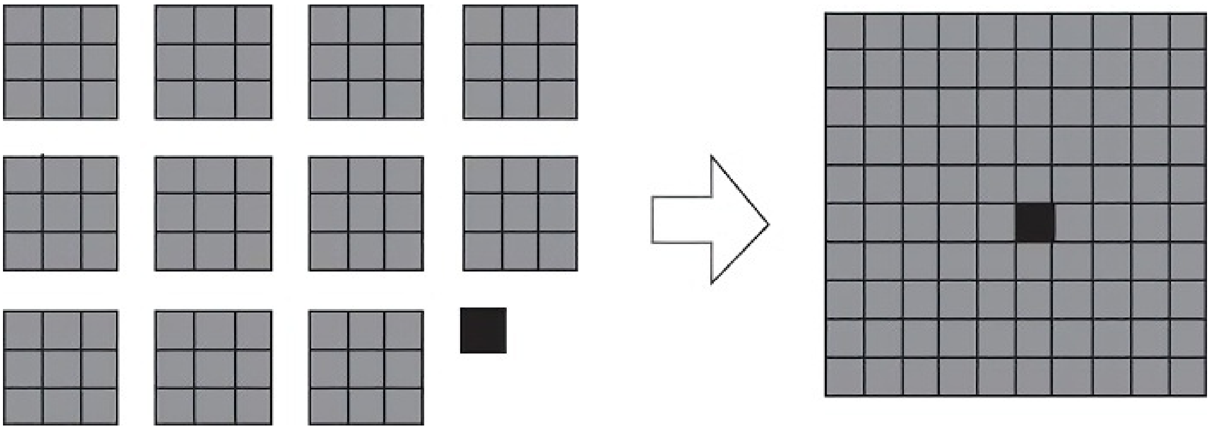


FIGURA 15. La Batalla de Brighton (1065), en donde el rey Harold tenía que resolver la ecuación $y^2 = 11x^2 + 1$. La solución es $x = 3$, $y = 10$.

Sin embargo, ensayo y error no resolverán el acertijo de Dudeney —bueno, quizá lo hagan con un computador, pero no a mano— porque la solución más pequeña es $x = 226\,153\,980$, $y = 1\,766\,319\,049$. Las soluciones de la «Ecuación de Peli», $y^2 = Dx^2 + 1$ varían de forma incontrolada con D. Los valores «difíciles» de D hasta 100 (es decir, los que requieren un valor de x mayor que 1 000) son $D = 29$, 46, 53, 58, 61, 67, 73, 76, 85, 86, 89, 94 y 97. El peor con mucho es 61, de modo que Dudeney eligió sabiamente. Con un poco de esfuerzo, usted debería ser capaz de descubrir lo que sucede para $D = 60$ y $D = 62$, por debajo y por encima del astuto 61 de Dudeney: vea las respuestas al final de este capítulo.

Le advierto que él podría haber hecho el acertijo mucho más difícil: con $D = 1597$ las soluciones más pequeñas son:

$$x = 13\,004\,986\,088\,790\,772\,250\,309\,504\,643\,908\,671\,520\,836\,229\,100$$
$$y = 519\,711\,527\,755\,463\,096\,224\,266\,385\,375\,638\,449\,943\,026\,746\,249$$

y $D = 9781$ es mucho peor.

El acertijo que Arquímedes incluía en su carta a Eratóstenes empieza: «Si eres diligente y sabio, ¡oh extranjero!, calcula el número de cabezas de ganado del Sol, que en un tiempo pastaba en los campos de la isla Tracia de Sicilia…». En la *Odisea* de Homero hay 350 cabezas de ganado del Sol, pero Arquímedes tiene en mente una cifra mucho mayor. Él establece condiciones que, en notación moderna, se reducen a una serie de ecuaciones matemáticas. El rebaño se divide en B toros blancos, N toros negros, A toros amarillos y P toros pintos, junto a números correspondientes b, n, a y p de vacas. Hay siete condiciones «fáciles» y dos mucho más antipáticas. Las condiciones fáciles son:

$B = (1/2 + 1/5)N + A$
$N = (1/4 + 1/5)P + A$
$P = (1/6 + 1/7)B + A$
$b = (1/3 + 1/4)(N + n)$
$n = (1/4 + 1/5)(P + p)$
$a = (1/6 + 1/7)(B + b)$
$p = (1/5 + 1/6)(A + a)$

Las antipáticas son

$B + N =$ un cuadrado perfecto
$A + P =$ un número triangular

Aquí, un número triangular es un número de la forma $1 + 2 + 3 +\ldots + n$, que es igual a $n(n + 1)/2$.

Las siete primeras ecuaciones se reducen a un simple hecho: las ocho incógnitas son mutuamente proporcionales en razones fijas. Desenmarañando los detalles, encontramos que todas las soluciones de la siete primeras ecuaciones son de la forma

$B = 10\,366\,482j$
$N = 7\,460\,514j$
$A = 4\,149\,387j$
$P = 7\,358\,060j$
$b = 7\,206\,360j$
$n = 4\,893\,246j$
$a = 5\,439\,213j$
$p = 3\,515\,820j$

para cualquier j entero. Para detalles ver el libro de Beiler o el artículo de Vardi (Lecturas adicionales). Lessing ofreció su propia solución al acertijo, que equivale a tomar $j = 80$, pero esto no satisface todas las condiciones. En 1880, A. Amthor analizó algunas propiedades de la solución, y descubrió que el tamaño total del rebaño ¡es un número con 206 545 dígitos! Él no calculó este número exactamente, pero dio los cuatro primeros dígitos. Entre 1889 y 1893, el Club Matemático de Hillsboro, Illinois (A. H. Bell, E. Fish y G. H. Richard) amplió este resultado hasta dar los 32 primeros dígitos (30 correctos). La primera solución completa fue encontrada por H. C. Williams, R. A. German y C. R. Zarnke (Universidad de Waterloo) en 1965. La lista completa de los 206 545 dígitos fue publicada por primera vez en 1981 por Harry L. Nelson (véase Lecturas adicionales). Utilizó un supercomputador CRAY-1 y el cálculo duró diez minutos.

Antes, en 1830, J. F. Wurm había resuelto un problema ligeramente más sencillo, en el que se ignora la condición de que $B + N$ sea un cuadrado perfecto. (Hay una ambigüedad en la redacción del enunciado original del problema, relacionada con el hecho de que un toro es más largo que ancho, de modo que los toros pueden «formar un cuadrado» incluso si su número no es un cuadrado. Wurm explotó esta laguna). La condición de que $A + P$ sea un número triangular lleva, tras algo de álgebra, al requisito de que 92 059 576 $j + 1$ debe ser un cuadrado. La solución más pequeña de esta ecuación lleva a un número total de cabezas de ganado que es simplemente 5 916 837 175 686.

En la «solución» de Wurm, el número $B + N$ no es un cuadrado perfecto. Sin embargo, existen infinitas soluciones para j, y entre ellas podemos buscar la más pequeña que satisfaga esta última condición. Como Amthor demostró, j debe ser de la forma $4\,456\,749\,m^2$, donde m satisface una «Ecuación de Pell»:

$$410\,286\,423\,278\,424m^2 + 1 = \text{un cuadrado perfecto.}$$

Ahora basta con utilizar el método general de «fracciones continuas», cuya eficacia fue demostrada por Euler, para encontrar el más pequeño de tales m.

Aquí terminaba la historia hasta hace poco tiempo. Sin embargo, los matemáticos de hoy tienen herramientas conceptuales más sofisticadas que las que estaban disponibles para Amthor, y también tienen computadores rápidos que pueden hacer cálculos aritméticos con centenares de miles de dígitos en un abrir y cerrar de ojos. Vardi encontró que Mathematica® puede rehacer todo el análisis anterior en unos pocos segundos. Con un poco más de esfuerzo encontró que Mathematica también puede dar una fórmula exacta para el tamaño del rebaño —algo cuya existencia no había sido sospechada previamente—. En una estación de trabajo Sun —una elección apropiada dado el propietario del ganado— el cálculo necesitó una hora y media. El resultado es que el número total de reses es el entero más pequeño que excede de

$$(p/q)(a + b\sqrt{4\,729\,494})^{4658}$$

donde

$p = 25\,194\,541$
$q = 184\,119\,152$
$a = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$
$b = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$

Hay algún debate entre los estudiosos acerca de si realmente Arquímedes planteó el problema. La opinión general es que sí lo hizo, aunque el texto desenterrado por Lessing estaba basado en un informe de algún otro (no sabemos quién). Sin embargo, hay poco debate acerca de si Arquímedes pudo haber resuelto por completo su propio problema. Decididamente no pudo haberlo hecho: es demasiado grande. El puro tamaño no hubiera sido un obstáculo para Arquímedes, cuyo *Arenario* incluye un sistema numérico más que capaz de manejar los simples 206 545 dígitos; pero el cálculo a mano hubiese necesitado demasiado tiempo, incluso con la notación moderna.

¿Tenía Arquímedes alguna razón para saber siquiera que existía una solución? Probablemente no (de hecho, ni siquiera hoy tenemos una buena caracterización de aquellos D para los que existen soluciones para la «Ecuación de Pell Negativa», $y^2 = Dx^2 - 1$). Ciertamente, Arquímedes era suficientemente inteligente para imaginar que se necesitaba alguna ecuación tipo Pell (los griegos no tenían nuestra álgebra, pero tenían otras maneras de expresar tales ideas), pero probablemente no pudo haber estado seguro de que tales ecuaciones tienen siempre soluciones. Salvo que, como David Fowler ha señalado (Lecturas adicionales), los antiguos griegos también tuvieran su propia versión de las fracciones continuas, así que *es posible*…

Una vez más, esta columna tuvo mucha realimentación útil. Chris Rones, de la Drexel University, me dijo que puede encontrarse más información sobre el problema del Ganado del Sol (columna de abril) en un artículo «Una solución simple al problema del ganado de Arquímedes» de A. Nygren de la Universidad de Oulu, Linnanmaa, Oulu, Finlandia. Éste describe un algoritmo para resolver el problema cuya ejecución sólo requiere cinco segundos en un Pentium II PC utilizando Maple® o Mathematica®. Enlaces a archivos PDF y postscript de este artículo se encuentran en la página web de Rorres:

www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Solution2

y los programas Maple® y Mathematica® para implementar el algoritmo de Nygren se encuentran en:

www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/computer2/computer_output

El programa puede copiarse en el portapapeles de su computador, pegarse a una hoja de trabajo Maple® o Mathematica® y ejecutarse. La solución más pequeña (nueve números de 206 000 dígitos decimales cada uno de ellos) puede encontrarse también en la misma página web.

RESPUESTAS

$31^2 = 60 \times 4^2 + 1$
$63^2 = 62 \times 8^2 + 1$

6
El gran robo de la alcantarilla[8]

Cuando fue robado el Rinoceronte de Robbingham, una obra de escaso valor, incluso el gran Sherlock Holmes quedó desconcertado. Hasta que por azar, el doctor Watson señaló un nuevo aspecto de la geometría de las alcantarillas y eso aceleró la mente del gran detective. «Cuando se ha eliminado lo imposible —declaró—, entonces lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad». Pero ¿lo era?

Cuando entré en el apartamento de Holmes en Baker Street le encontré reuniendo periódicos, leña y carbón. Fuera estaba nevando y la habitación parecía una caja de hielo. Se levantó y me pasó una carta. «Lea esto, Watson, y dígame lo que piensa».

Eché un vistazo rápido a la página. «Es del Duque de Robbingham».

«Una deducción bastante simple, Watson, puesto que su nombre está en el encabezamiento».

«Excúseme, Holmes, simplemente estaba pensando en voz alta. Le dice, creo que de forma un poco brusca, que el Rinoceronte de Robbingham ha sido robado. "Una estatua menor, realizada de forma algo tosca, sin gran valor económico". Mi consejo, Holmes, es buscar un caso más desafiante».

Holmes esbozó una sonrisa. «Watson, Watson, ¿qué puedo hacer para abrirle los ojos? ¿No le suena curiosa la frase final, dada la reconocida intranscendencia de la estatua robada?».

Releí la carta. Terminaba: *Solicito su ayuda para encontrar la propiedad robada*. «No, Holmes —dije—. Me parece completamente normal».

«¡La *letra*, hombre! —gritó Holmes—. ¿No puede ver que el escritor estaba en un estado de terror mortal? Los descensos en las *p* son un signo seguro, por no mencionar los lazos en las *e*. He prestado algunos pequeños servicios al duque de Robbingham en el pasado y estoy profundamente preocupado por su seguridad. Tenga la bondad de comprar billetes de tren para Robbingham Hall mientras yo hago los preparativos».

Durante el largo viaje, Holmes se divertía con su violín mientras yo me disponía a leer un pequeño volumen de paradojas matemáticas. «Mire, Holmes, aquí hay una interesante. Un hombre está en el centro de un río de orillas paralelas y doscientos metros de ancho, cuando repentinamente cae la niebla y él pierde por completo el sentido de la orientación. ¿Cuál es el camino más corto que puede tomar de modo que minimice el tiempo necesario para llegar a tierra?».

«Él puede deducir la dirección a la orilla observando la corriente del río —dijo Holmes— y entonces no tiene más que nadar en línea recta perpendicularmente a la corriente».

«No, no puede hacerlo. Supongamos que es un lago».

«Pero usted dijo que era un río. ¡Oh!, muy bien, ¿cuál es el camino entonces?».

«Nadie lo sabe».

«Maravilloso».

«Pero *creen* que es uno que va en línea recta durante un poco más de cien metros, luego hace un giro brusco a la izquierda, seguido por un pequeño tramo recto, un arco de circunferencia, y otro pequeño tramo recto (figura 16a). Hay un problema parecido cuando el nadador está en el mar y a cien metros de la costa que es recta (figura 16b), y de nuevo la respuesta es sólo una conjetura».

«Fascinante», dijo Holmes, ocultando apenas su sarcasmo. «Me alegro de que esté interesado en cuestiones prácticas, Watson». Volvió a su violín y yo traté de seguir leyendo, pero mi placer había quedado contrariado por su desaprobación.

A nuestra llegada a Robbingham Hall, una doncella nos llevó a la suite del duque. Parecía pálido y ojeroso, como si hubiese pasado una noche de insomnio. «Gracias, Lucinda, ahora puedes dejarnos. Holmes, estoy encantado de verle», dijo, con obvia agitación. Holmes procuró calmarle, y finalmente empezó a reconstruir la historia. El Rinoceronte de Robbingham era una reliquia de la familia, traído de la India por el décimo duque al final de su exitosa campaña contra el Marajá Loco de Marzipur. Estaba hecho de bronce y prácticamente no valía nada, pero tenía un vientre hueco con un cajón secreto en cuyo interior se guardaban tradicionalmente documentos importantes. Cuando Holmes preguntó por la naturaleza de dichos documentos, el rostro del duque se puso aún más pálido. «No puedo revelar su contenido, Holmes. Es una antigua mancha en el blasón de la familia. Si el asunto se hiciera público, sería el fin de los Robbingham».

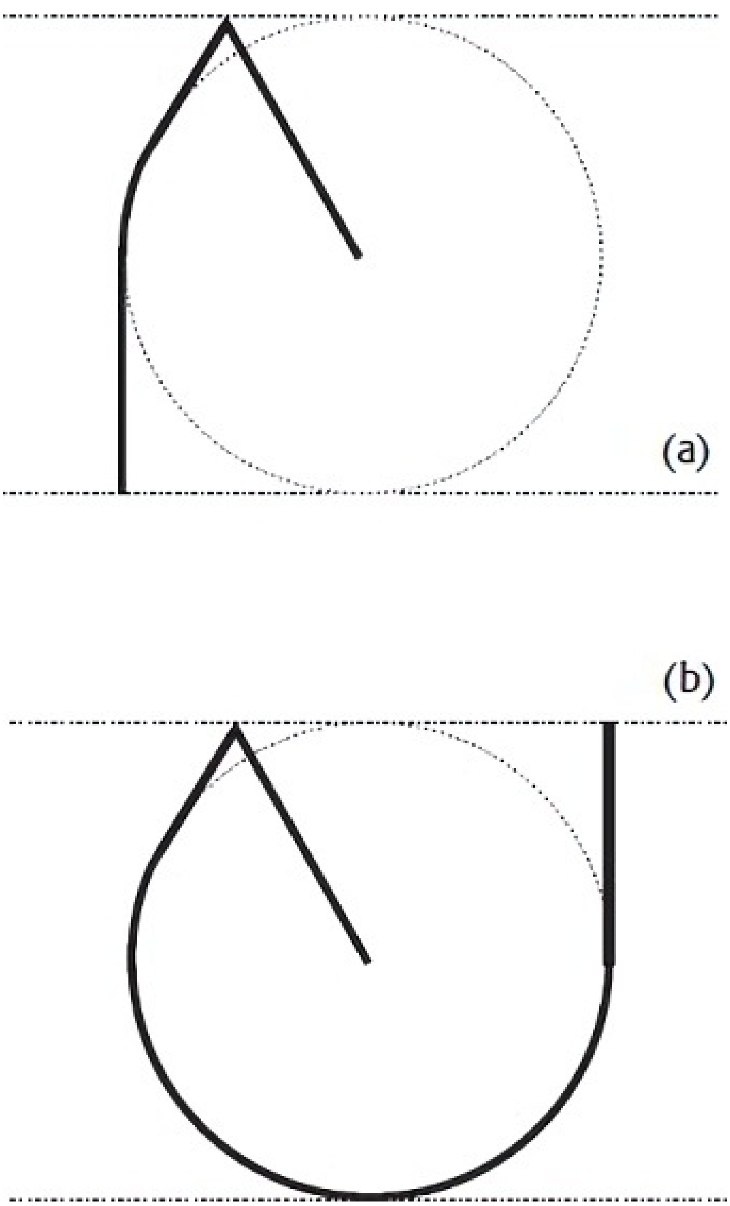


FIGURA 16. Conjeturas sobre los mejores caminos a seguir por un nadador perdido en la niebla.

(a) Cuando el nadador está en el medio de un río con orillas rectas paralelas.
(b) Cuando el nadador está a una distancia conocida de una costa recta. (Cada línea de puntos muestra una posición posible de una orilla o de la costa: la posición real es una rotación de la línea mostrada.)

«Entonces debemos confiar en que el animal pueda recuperarse sin más publicidad. Muéstreme la habitación donde se guardaba».

El duque llamó a Lucinda, la doncella, y le dijo que fuera a buscar una linterna. Nos dirigimos por el laberinto de corredores del Hall a un sótano pequeño y con mucha corriente, lleno de telarañas, cuya única luz procedía de una herrumbrosa reja de hierro en el techo que daba a una estrecha abertura al nivel del suelo. Había un olor desagradable, y el suelo estaba bajo centímetros de polvo. Incluso yo pude ver innumerables pisadas. En un rincón había una gran caja fuerte. «El rinoceronte estaba ahí», dijo el duque.

Holmes estudió el suelo y sus ojos siguieron el rastro de las pisadas. Sacó una lupa y se acercó para examinar la reja. De la misma manera inspeccionó el candado de la puerta del sótano y de la caja fuerte. Poniéndose de rodillas, buscó en el polvo hasta que encontró un pequeño papel arrugado que pareció adherirse a sus dedos. Olió el aire y echó una mirada hacia una pila de viejas cajas de cartón. «¿Qué tamaño tenía la estatua?».

«Bastante grande», dijo el duque, separando sus manos aproximadamente un metro.

«Entonces toda la historia está aquí, Excelencia, para que la lea quien comprenda los arcanos de la observación. Al principio temí que el rinoceronte pudiera haber dejado el nido, pero esto es harina de otro costal».

Los ojos del duque se iluminaron. Yo lancé a Holmes una mirada significativa y él explicó su razonamiento. «La puerta de la habitación está intacta. El ladrón entró y salió a través de la reja. Abrió la caja fuerte y sacó el rinoceronte. Pero al no saber cómo abrir su cajón secreto, y teniendo en cuenta la dificultad de descerrajarlo en este sótano, así como el peligro de ser descubierto, lo sacó».

«Pero ¿cómo salió?», preguntó el duque. «El hombre habrá pasado a duras penas por la abertura, y el rinoceronte es considerablemente mayor».

«¡Ah! Él le puso un flotador hinchable, y lo dejó caer en la alcantarilla para que llegase flotando al exterior y recogerlo fuera de los terrenos del Hall».

«Holmes, eso es ridículo», le dije. «Usted no puede saber todo eso. En cualquier caso, no hay ningún agujero de alcantarilla en este sótano».

«Watson, usted subestima mi capacidad, como siempre. En el suelo encontré los restos de un parche para reparar pinchazos como el que se utiliza para las bicicletas. Obviamente, el flotador sufrió un pinchazo mientras era introducido a través de la reja y hubo que hacer una reparación sobre la marcha. El olor que usted no puede haber dejado de notar indica que hay una alcantarilla próxima. En cuanto a la falta de un desagüe… véalo usted mismo». Holmes apartó de una patada las cajas de cartón y apareció una gran losa con dos anillos de hierro en ella. «Tenía que estar ahí, por el camino que llevaban las pisadas».

«Pero tengo razones para creer que el ladrón no tuvo suerte, Watson. He hecho un largo estudio de los olores de las alcantarillas —quizá usted recuerde que publiqué una pequeña monografía sobre el tema— y estoy seguro de que ésta ha sido obstruida recientemente. Ahora, Watson, si usted me presta su considerable fuerza física, creo que podemos levantar esta losa».

A la luz de la linterna vi un pozo profundo, revestido de piedra, de aproximadamente un metro cuadrado. En el fondo, a unos quince metros por debajo de nosotros, el cieno hediondo estaba estancado.

«El pozo es sorprendentemente profundo, teniendo en cuenta que estamos en un sótano», murmuró Holmes.

«El terreno se eleva cerca del Hall», dijo el duque. «Este sótano está por encima de gran parte del terreno que nos rodea».

«No veo ningún signo del rinoceronte», dije yo.

«No», dijo Holmes. «Pero por la alcantarilla corría agua cuando la estatua fue arrojada en ella. En algún lugar del trayecto de salida, la improvisada reparación del pinchazo cedió y el flotador se deshinchó. Entonces, el rinoceronte se hundió hasta el fondo de la alcantarilla, obstruyéndola parcialmente. Luego cayeron más cosas y esto completó la obstrucción».

«¿De modo que los documentos están atrapados en algún lugar de las alcantarillas?».

«Exactamente. Pero el pozo es demasiado profundo y peligroso para que nadie intente localizar la obstrucción desde este lado. Debemos entrar en el sistema de alcantarillado por un punto más conveniente. ¿Tiene usted mapas?».

«En la biblioteca», respondió el duque. Pero ninguno de los mapas mostraba una alcantarilla que plausiblemente pudiera conectar con el sótano. «Juro que había un mapa semejante», dijo el duque, intrigado.

«Debe haberse perdido», dedujo Holmes.

«Maldición», dije yo. «El sinvergüenza incluso puede estar ahora recorriendo las alcantarillas desde la salida, buscando su botín». Una idea me asaltó. «Holmes, quizá él ya lo ha hecho».

«No, pues en ese caso la alcantarilla habría quedado de nuevo parcialmente desatascada», dijo Holmes. «El ladrón también debe haber tenido problemas para encontrar una entrada alternativa. Pero muy bien podría intentarlo esta noche, de modo que no hay tiempo que perder». Hizo una pausa, sumido en sus pensamientos. «Cuando llegamos, vi a un caballero anciano cavando en la zona de las zanahorias».

«Se refiere usted al viejo Ned. Sordo como una tapia, pero un buen sirviente. Lleva siglos con nosotros».

«Quizá él pueda recordar el plano de las alcantarillas. Los jardineros suelen recordar estas cosas».

Después de mucha gesticulación y muchos gritos, Holmes consiguió explicar al viejo Ned lo que quería. «Ah, sí», dijo Ned. «Oí decir que había una vieja alcantarilla con una vía muerta que corría por debajo del césped delantero. Pero nadie sabía dónde iba aunque, una cocinera que estuvo aquí antes de las seis últimas, me dijo una vez que corriente arriba zigzagueaba bajo los sótanos. Corriente abajo, dijo ella, iba directa como una flecha».

«¿Puede mostrarnos por dónde corre esta alcantarilla?», preguntó Holmes.

«Ah, no. Pero recuerdo que pasaba a cien metros o menos de la estatua de la ninfa acuática».

«Debemos cavar una zanja», dijo el duque. «Llamaré a todos los hombres disponibles».

«También debemos cavarla rápido», dijo Holmes.

«Y de la forma correcta», dije yo. «De lo contrario podríamos no encontrar la alcantarilla».

«Lo que necesitamos saber —dijo Holmes— es cuál es la zanja más corta que garantice cortar a *toda* línea recta que pase a menos de cien metros de la estatua de la ninfa acuática». (Véase figura 17).

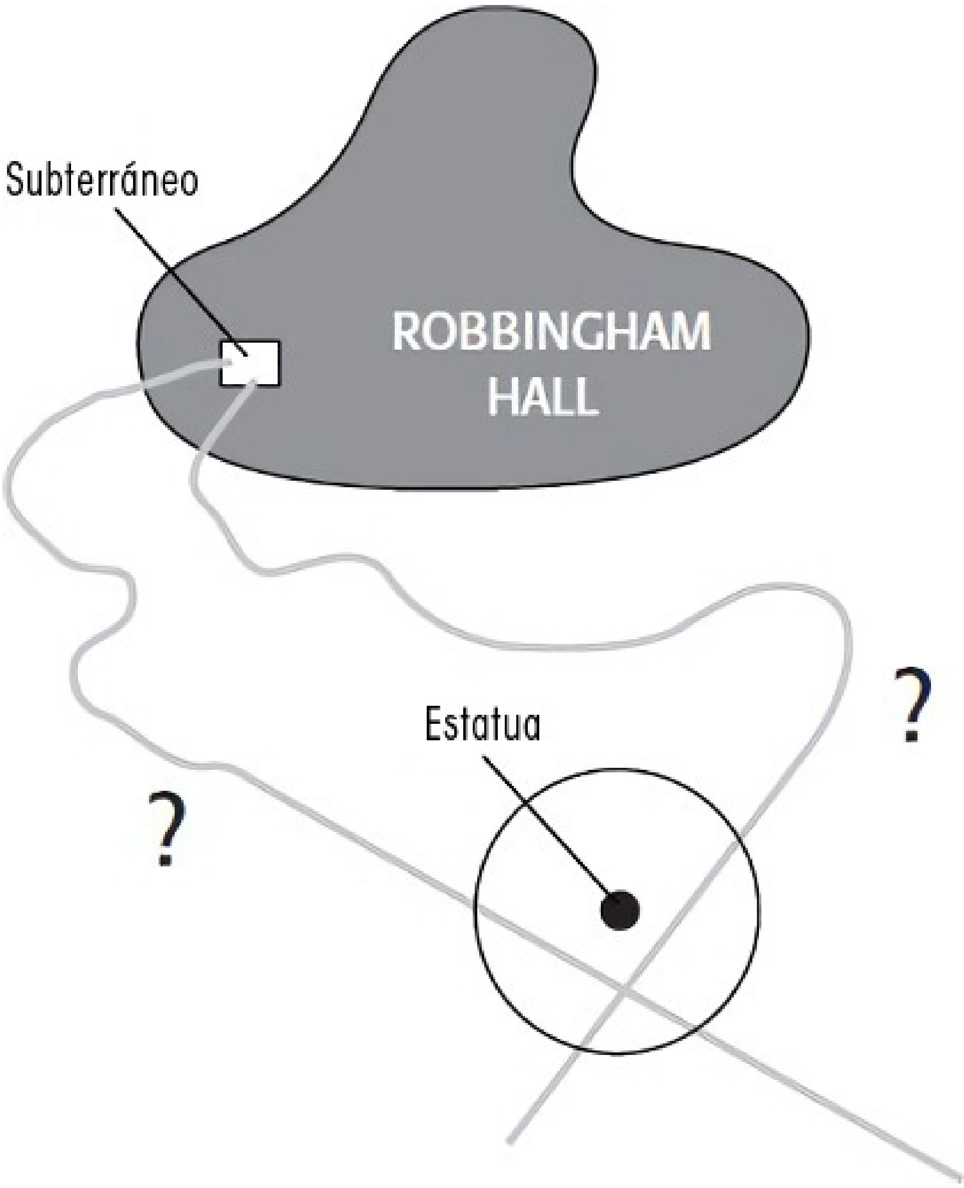


FIGURA 17. Parte de los terrenos de Robbingham Hall. La alcantarilla, que es recta, corta al círculo marcado. Pero ¿dónde?

«Podríamos cavar una zanja circular con un radio de cien metros», sugirió el duque.

«Con una longitud de 200π metros, o aproximadamente 628 metros», calculó Holmes rápidamente.

«Dudo que tengamos tiempo para una zanja tan larga», dijo el duque. «Mis hombres podrían acercarse a esa cifra, no obstante. ¿Podemos hacerlo mejor?».

«¿Qué hay de una línea recta de doscientos metros de longitud que cruce el círculo del duque?», pregunté.

«Excelente, Watson —dijo Holmes—, salvo que semejante zanja pasa por alto muchas posiciones posibles de la alcantarilla».

«¿Y dos líneas semejantes perpendiculares? ¿Cuatrocientos metros de longitud?».

«El mismo problema, Watson. No, debemos pensar esto con más cuidado. Matemáticamente estamos buscando la curva más corta que corte a toda cuerda de un círculo de cien metros de radio, siendo una cuerda cualquier línea recta que corte al círculo. Por supuesto debemos incluir las tangentes al círculo, que lo cortan en un solo punto».

«¿Por qué, Holmes?».

«Porque el viejo Ned dijo “cien metros o menos”, lo que implica que podría darse una distancia de cien metros, y ésa es la distancia a una tangente».

«Ah», dije yo, impresionado por su lógica incisiva. «Pero ése es un problema muy complicado, pues hay muchas cuerdas que considerar. ¿No podríamos simplificarlo de algún modo?».

La cabeza de Holmes se echó hacia atrás bruscamente por sorpresa. «Una excelente sugerencia, Watson, la mejor que ha hecho usted durante semanas. Por supuesto basta con considerar sólo las tangentes. Una curva que corta a todas las tangentes necesariamente corta a todas las cuerdas».

«¿Por qué?».

«Escojamos cualquier cuerda y consideremos las dos tangentes paralelas a ella (figura 18). La curva corta a cada una de éstas, digamos en los puntos A y B. Por continuidad, la parte de la curva que une A y B debe cortar a la cuerda». Se frotó la barbilla en profunda contemplación. «Casi lo tengo, Watson. Pero hay una laguna en mi razonamiento».

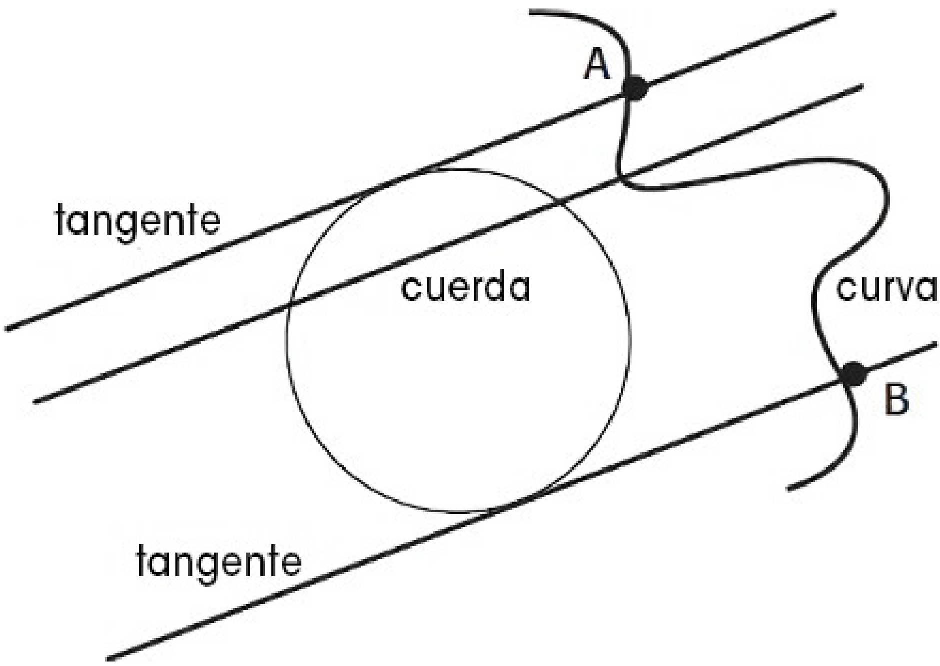


FIGURA 18. Si una curva corta a todas las tangentes, entonces también corta a todas las cuerdas.

«¡Suéltelo, hombre!».

«Muy bien. Hay una clase de curvas que automáticamente cortan a todas las tangentes, y puedo encontrar la más corta de ellas. Son curvas que empiezan y terminan en lados opuestos de la *misma* tangente al círculo, envolviendo al círculo en medio y permaneciendo fuera o sobre el círculo. Permítame llamar a una curva semejante una *correa*, puesto que sujeta a esa tangente al círculo concreta». (Véase figura 19a).

«¿De modo que necesitamos encontrar la correa más corta?».

«Esa parte es sencilla. En primer lugar, observemos que la correa debe tocar al círculo en alguna parte, o de lo contrario podría ser "ceñida" al círculo, lo que la acortaría. Supongamos que inicialmente toca al círculo en un punto B, y que luego lo toca en C. Entonces AB y CD deben ser líneas rectas; si no es así, la correa puede acortarse a lo largo de dichos segmentos. Además, BC es simplemente un único arco de círculo, por razones similares». (Véase figura 19b).

«Pienso que las líneas AB y CD deben ser tangentes al círculo», intervine. «De lo contrario la curva podría acortarse moviendo B y D a posiciones donde sean realmente tangentes». (Véase figura 19c).

«Por supuesto, Watson. Finalmente, debemos preguntar dónde deberían estar situados los puntos A y B. En mi opinión, ambas AB y DC deben formar ángulos rectos con la tangente AD. Pues si no es así, podemos "girar" la correa hasta una posición que forme un ángulo recto, y de nuevo se hará más corta». (Véase figura 19d).

«Sí, sí», grité. «Y entonces el arco BC es un semicírculo, y hemos encontrado la curva más corta». (Véase figura 19e).

«Por desgracia, hemos encontrado sólo la *correa* más corta», dijo Holmes. «Aunque encuentro difícil ver cómo cualquier otra curva podría ser más corta».

Permanecimos en silencio durante algunos minutos, hasta que me asaltó una idea. «No todo está perdido», grité. «¿Qué longitud tiene esta correa más corta?».

«$(2 + \pi) \times 100$, aproximadamente 514 metros en este caso», dijo Holmes.

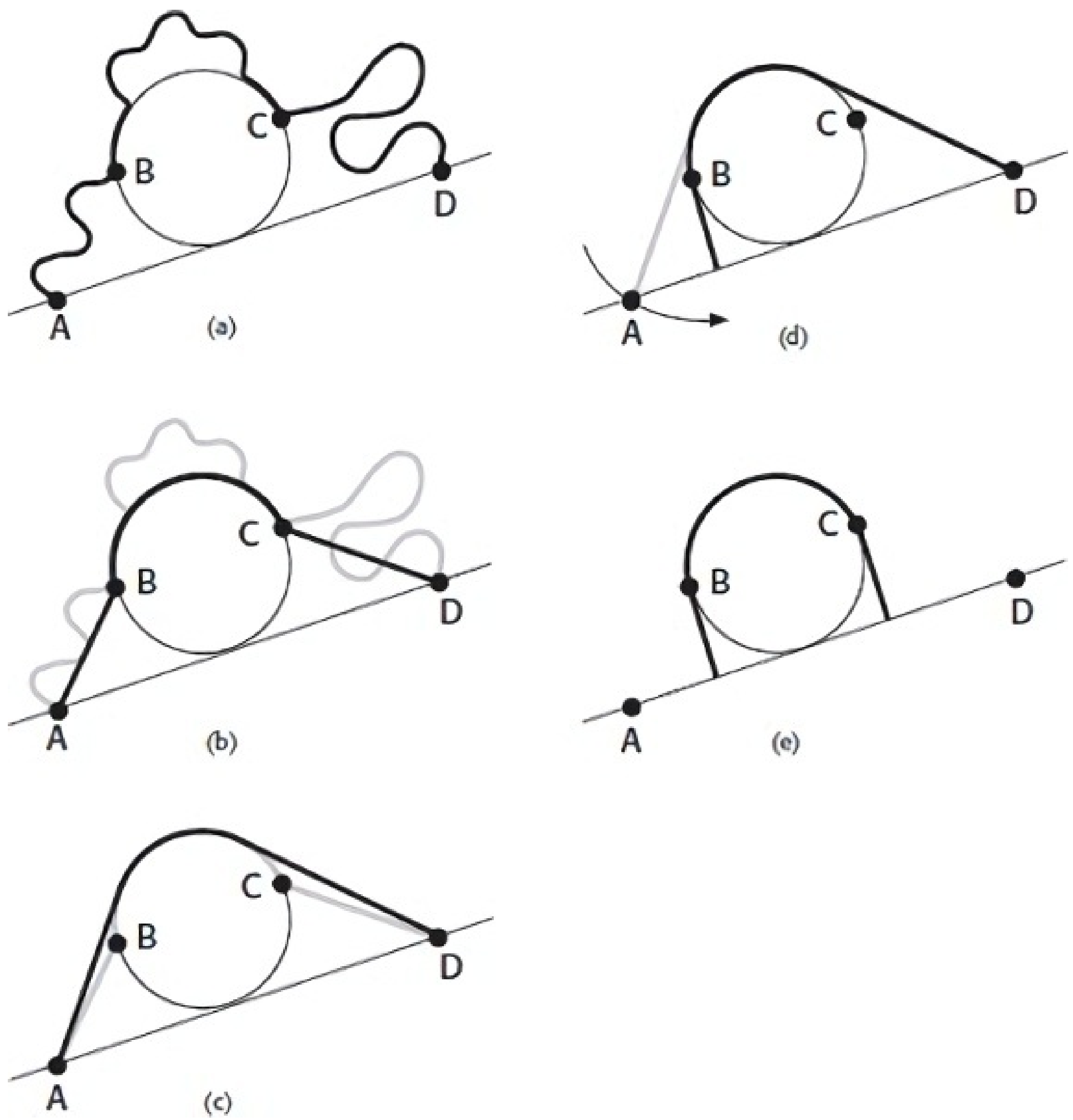


FIGURA 19

(a) Una curva que rodea el círculo empezando y terminando en la misma tangente siempre corta a todas las tangentes al círculo. A una curva semejante la llamamos *correa*.

(b) Las líneas AB y CD pueden estirarse, y pueden eliminarse las separaciones del círculo entre B y C.

(c) La correa se acorta cuando AB y CD se hacen tangentes al círculo.

(d) Si DAB no es un ángulo recto, podemos girar el extremo A para acortar la correa. Lo mismo para el extremo D.

(e) La correa más corta consiste en un semicírculo y dos líneas rectas tangenciales de longitud igual al radio. De hecho, ésta es la curva más corta que corta a toda tangente al círculo (y así también a cada cuerda).

«Un ahorro de 89 metros», dije yo. «No hay tiempo que perder: pediré al duque que ponga a trabajar a sus hombres».

Mientras ellos cavaban, Holmes y yo continuamos buscando curvas aún más cortas, pero no pudimos encontrar ninguna. Entonces tuve un súbito recuerdo. «¡El libro, Holmes! ¡El libro que yo estaba leyendo en el tren!». Lo saqué del bolsillo de mi abrigo. «Déjeme ver… sí, el camino más corto que corta a toda cuerda de un círculo consiste de hecho en dos segmentos rectos paralelos y un semicírculo».

Holmes echó un vistazo a mi libro. «Confieso que juzgué mal la utilidad de este librito, Watson», dijo. «Pero ¿cómo sabemos que el camino propuesto es realmente el más corto?».

«Ha sido probado más allá de cualquier sombra de duda», le dije. «Por varias personas diferentes con condiciones ligeramente diferentes sobre la naturaleza de la curva admitida, pero en primer lugar por H. Joris. Sin embargo, todas las demostraciones conocidas son sorprendentemente largas y complejas. Sería de gran interés que alguien pudiera encontrar una demostración corta y sencilla».

Seguimos discutiendo otras variantes de dichos problemas: un hombre perdido en un bosque rectangular de dimensiones conocidas, un patinador en un lago elíptico congelado cuando llega una ventisca… De repente, el viejo Ned lanzó un grito; había localizado la alcantarilla. Algunos minutos de trabajo dejaron clara su dirección, y Holmes miró a lo largo de ella. «Ah, sí, más allá de ese bosquecillo lejano, donde fluye la corriente. Ahí es donde encontraremos la salida. Y al ladrón, cuando venga a recoger su botín».

«Entonces, Holmes, ¿cree usted que el ladrón es un hombre?».

«Las huellas dejan eso claro, Watson».

Nos escondimos entre los árboles y nos dispusimos a esperar. Todavía no se había puesto el sol cuando oímos pisadas y chapoteos.

Una figura enmascarada estuvo a la vista, y Holmes saltó sobre él. Hubo un breve forcejeo, tras el cual el criminal yacía de espaldas y Holmes estaba sentado encima. Cogió la mascará y tiró de ella.

«Dios mío, es Lucinda», dijo el duque, quien acababa de llegar. «¿Qué estás haciendo aquí, querida? ¿No me digas que *tú* eres nuestro ladrón?».

«Dios bendiga a su Excelencia, no. El pasado lunes por la tarde fui enviada al sótano a ordenar algunas cajas de trastos, pero la puerta estaba cerrada y no pude encontrar la llave. Ned había estado reparando su bicicleta en el sótano y creo que olvidó devolver la llave cuando hubo acabado. En cualquier caso, yo me introduje a través de la reja. Había un agujero de alcantarilla abierto con una losa de piedra a su lado. La caja fuerte estaba abierta: vi esta curiosa estatua de rinoceronte en ella y la saqué para echarle un vistazo. Era más pesada de lo que yo esperaba, y accidentalmente se cayó en la alcantarilla. Arrastró un montón de basura y la alcantarilla se obturó. Miré abajo y no pude ver la estatua, de modo que supuse que había salido fuera antes de que se produjera la obstrucción».

CÓMO ENCONTRAR LA ZANJA MÁS CORTA

Una demostración completa de la tesis de Watson de que la zanja más corta consiste en un semicírculo y dos segmentos rectos es sorprendentemente complicada (véase Lecturas adicionales). Sin embargo, es relativamente simple hacerla plausible. En primer lugar, notemos que si una curva corta a todas las tangentes a un círculo, entonces también debe cortar a cualquier cuerda. Para ver por qué, consideremos las dos tangentes paralelas a la cuerda (figura 20). La curva corta a las dos, digamos en los puntos A y B. Por continuidad, la parte de la curva que une A y B debe cortar a la cuerda.

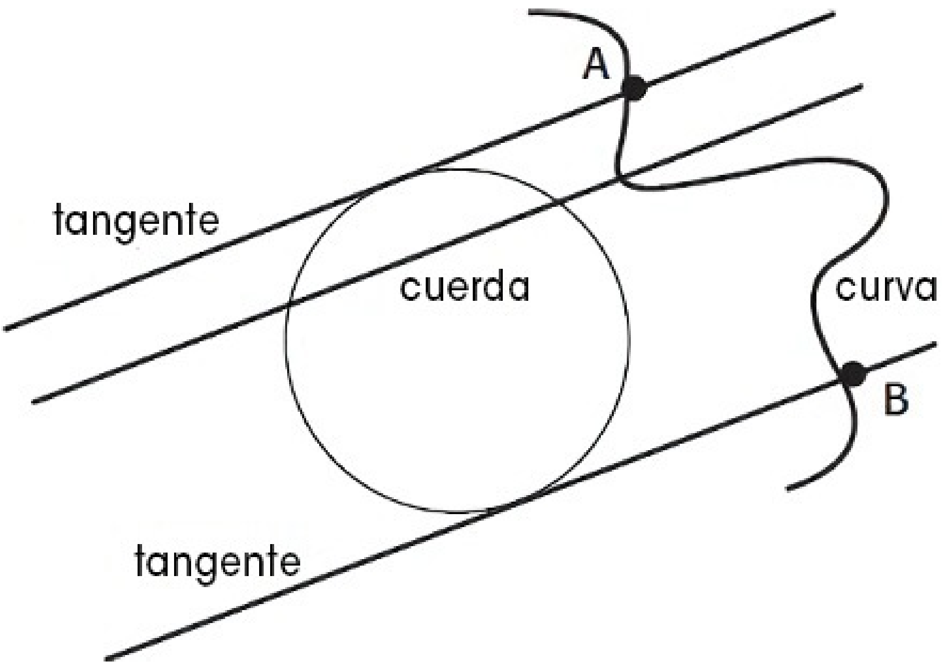


FIGURA 20. Si C corta a cada tangente, entonces también corta a cada cuerda.

Por lo tanto, basta con encontrar la curva más corta que corta a cada tangente al círculo. Esto simplifica la demostración porque podemos concentrarnos en las tangentes, que son más sencillas de tratar, y olvidar todas las demás cuerdas.

Puesto que ninguna tangente corta el interior del círculo, es plausible que la curva más corta permanezca o bien fuera o sobre el círculo. Esto es cierto, pero no totalmente obvio. Supongamos que la curva atraviesa el círculo. Entonces, esa parte de la curva que yace dentro del círculo está «malgastada», pero no podemos eliminarla porque entonces la curva se rompe en dos partes. Tenemos que demostrar que la curva puede ser re-encaminada fuera del círculo, sin aumentar su longitud, de modo que sigue cortando a cada tangente. Esto requiere un complicado análisis caso por caso y es la parte más difícil de la demostración.

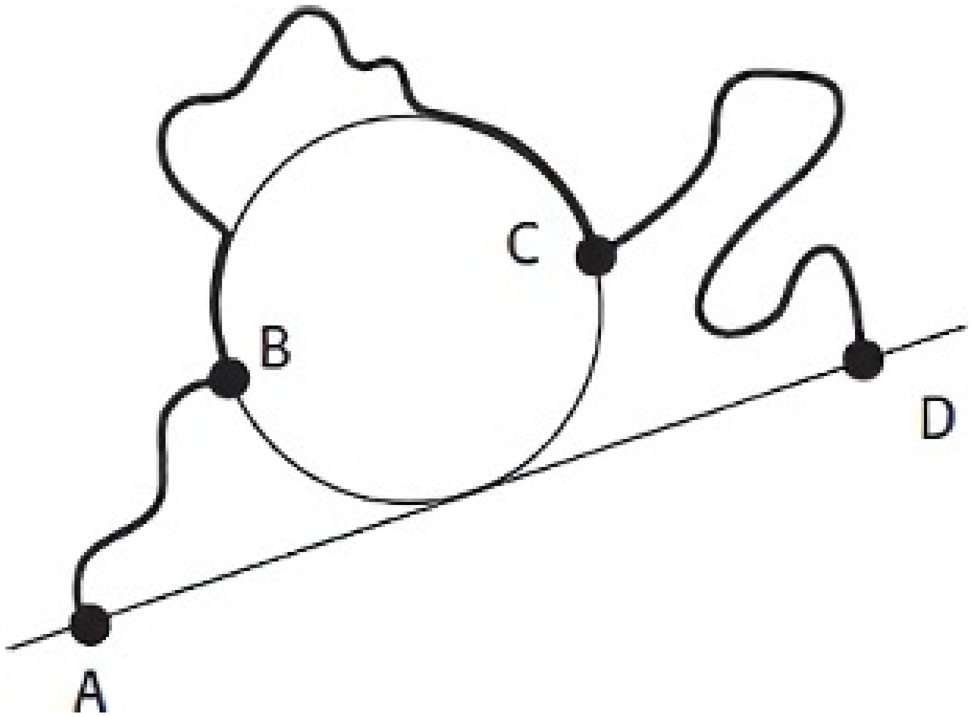


FIGURA 21. Forma general para la curva más corta.

Habiendo establecido esto, demostramos entonces que la curva debe empezar y terminar en lados opuestos de la misma tangente al círculo, envolviendo al círculo entre medias, como en la figura 21. (La curva puede ir a lo largo del círculo en algunos lugares). Además, cualquier curva de dicha forma corta automáticamente a cada tangente. De modo que todo lo que necesitamos hacer es encontrar la curva más corta de dicha forma.

Habiendo reducido la geometría a este conjunto muy concreto de curvas, es ahora fácil demostrar que AB y CD deben ser líneas rectas, y BC es simplemente un arco de círculo. Se sigue entonces que AB y DC forman ángulos rectos con la tangente AD, y el arco BC es un semicírculo. (Intuitivamente, imaginemos que la curva ABCD es una goma elástica, con A y D libres para deslizar a lo largo de la tangente AD. Cuando la goma elástica se contrae, ABCD adopta automáticamente la forma de la curva más corta. Claramente la parte entre B y C estará ceñida alrededor del círculo, mientras que AB y CD se contraerán a líneas rectas. El que DAB y ADC son ángulos rectos es casi igual de obvio).

«Lucinda, está hecha de *bronce*».

«Pensé que era madera con pintura dorada, señor. En cualquier caso, tuve pánico. Empujé la piedra sobre el agujero de la alcantarilla, la cubrí con algunas cajas viejas, cerré la caja fuerte y salí de nuevo. Esta mañana encontré un mapa en la biblioteca que mostraba dónde iba la alcantarilla; está escondido en mi habitación, juro que siempre tuve intención de devolverlo. En cualquier caso, yo iba a arrastrarme por la alcantarilla para buscar la estatua cuando este caballero —lanzó una encantadora sonrisa a Holmes— saltó sobre mí».

«De modo que el Rinoceronte de Robbingham nunca se ha movido del fondo del pozo en el sótano —murmuró el duque— y tengo una zanja de quinientos metros en un césped que ha sido mantenido cuidadosamente durante seis siglos». Echó una dura mirada a Holmes.

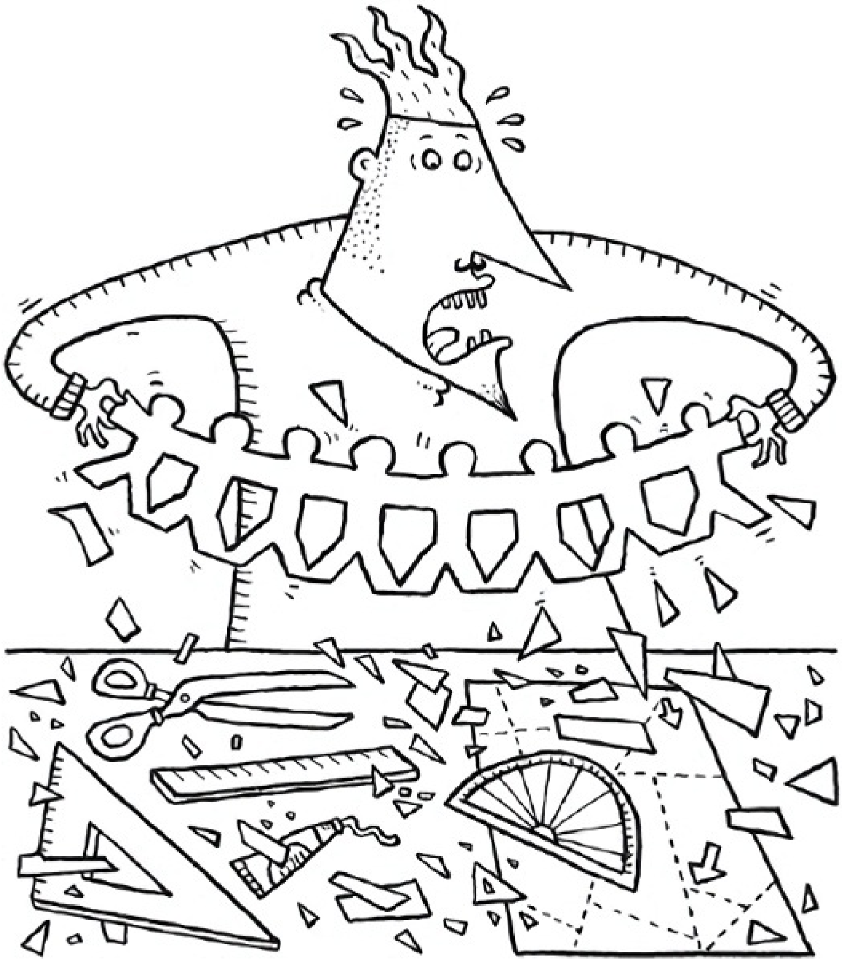
«Es una cuestión de deducción lógica», dijo Holmes. «Como suelo decir, cuando se ha eliminado lo imposible, entonces cualquier cosa que quede, por improbable que sea…».

«¡Sí, Holmes, sí! ¡Continúe!», grité yo. «¡Eso es brillante!».

«… sigue siendo improbable», dijo Holmes, deprimido. «Probablemente está pasando algo totalmente diferente y uno lo ha pasado por alto. Pero no me cite diciendo eso», advirtió.

«Mis labios están sellados», respondí. Pero mi pluma y mi cuaderno no lo están. Después de todo, un biógrafo tiene que ganarse la vida.

7
Rompecabezas de doble dirección



La rivalidad entre los grandes maestros de acertijos de Gran Bretaña y Norteamérica establece el escenario para una recreación geométrica clásica: las disecciones. ¿Puede usted cortar un hexágono regular y reordenar las piezas para formar un octógono regular? ¿O convertir un pentáculo en un cuadrado? Un bello libro de Greg Frederickson, un experto disector, ha revelado alguno de los trucos del oficio.

En el inicio de sus carreras, los grandes creadores de acertijos Sam Loyd y Henry Ernest Dudeney —americano el uno, inglés el otro— colaboraron para escribir una columna regular de acertijos para la revista *Tit-Bits*. Loyd escribía los acertijos y Dudeney (bajo el seudónimo «Esfinge») aportaba los comentarios y concedía los premios. La colaboración se convirtió pronto en rivalidad y ambos siguieron caminos separados. Con ello crearon toda una industria de acertijos a ambos lados del Atlántico, formulando problemas matemáticos sorprendentes dentro de historias simples pero atractivas.

Un ejemplo típico de su trabajo es el Rompecabezas de la Silla de Manos (figura 22a). El problema matemático consiste en cortar la forma de la silla de manos en el menor número de piezas posible, y reordenarlas para formar un cuadrado; Loyd lo inserta en una historia en que la silla de manos de la joven dama se pliega, astutamente, para proteger a su ocupante de la lluvia. La respuesta (figura 22b) es limpia, elegante y nada obvia.

Los rompecabezas de este tipo se conocen como «disecciones». Yo prefiero considerarlos como puzzles con más de una respuesta. Un libro maravillosamente entretenido sobre esta tradicional recreación matemática es *Dissections: Plane and Fancy*, de Greg. N. Frederickson (véase Lecturas adicionales). Todo entusiasta de los rompecabezas y matemático aficionado debería tener un ejemplar. Para abrir su apetito, la figura 23 muestra una selección de ejemplos interesantes, todos ellos del libro de Frederickson.

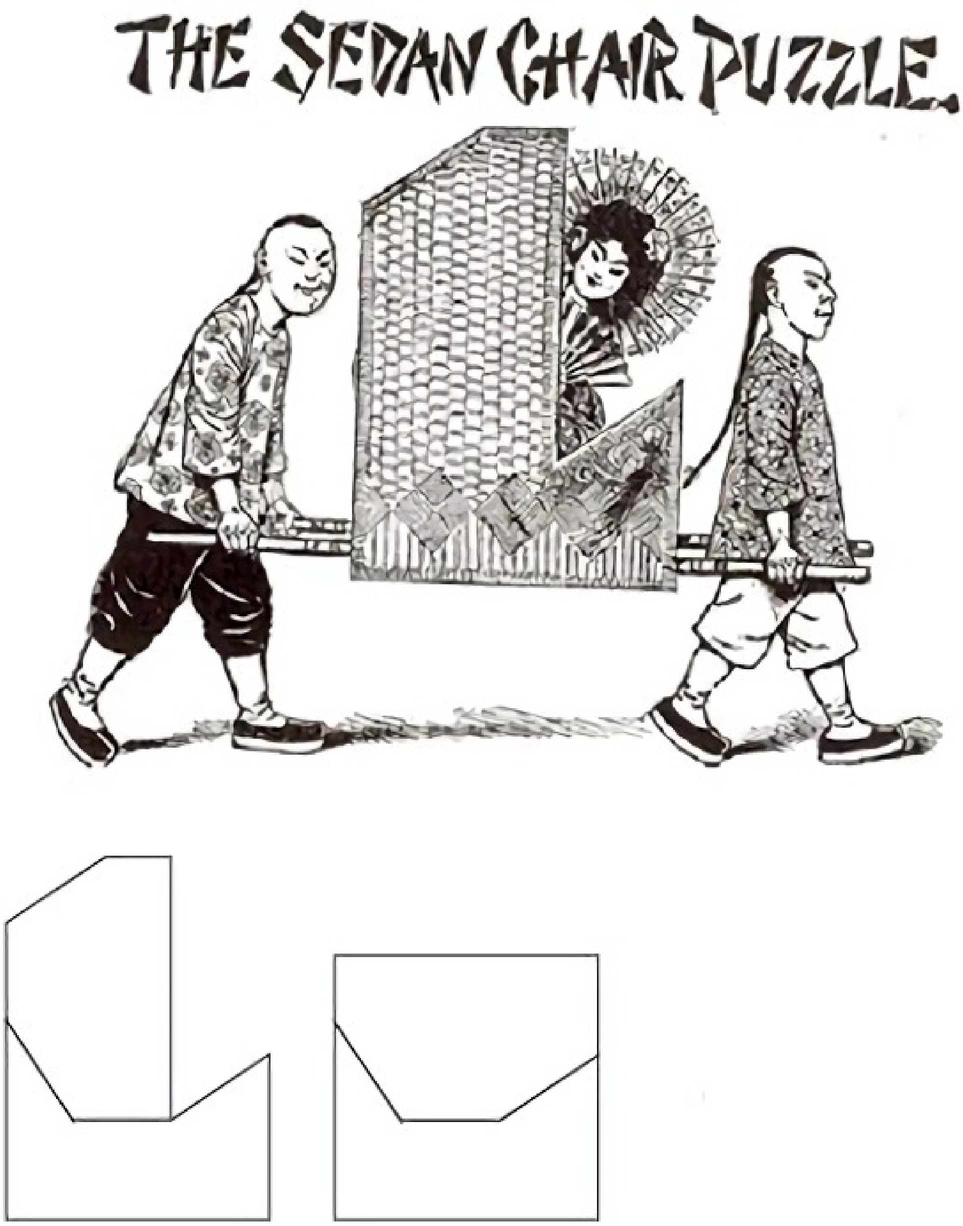


FIGURA 22

(a) El Rompecabezas de la Silla de Mano de Sam Loyd.
(b) Su solución.

El concepto matemático básico que subyace a todos los rompecabezas de disección es el área. Cuando se corta una forma y se reordenan las piezas, el área total no cambia. Detrás de esta afirmación simple y aparentemente obvia hay unas matemáticas muy profundas. En particular es *falsa* en tres dimensiones si se permite que la naturaleza de las «piezas» sea suficientemente complicada. En la célebre Paradoja de Banach-Tarski, una esfera sólida es «diseccionada» en seis piezas que pueden ser reordenadas para formar dos esferas sólidas, cada una de ellas del mismo tamaño que la original. Stefan Banach y Alfred Tarski colaboraron en este extraño teorema en 1924. En realidad no es una paradoja: es un resultado perfectamente razonable y lógicamente válido. Pero parece tan extraño que el nombre de «paradoja» se ha impuesto.

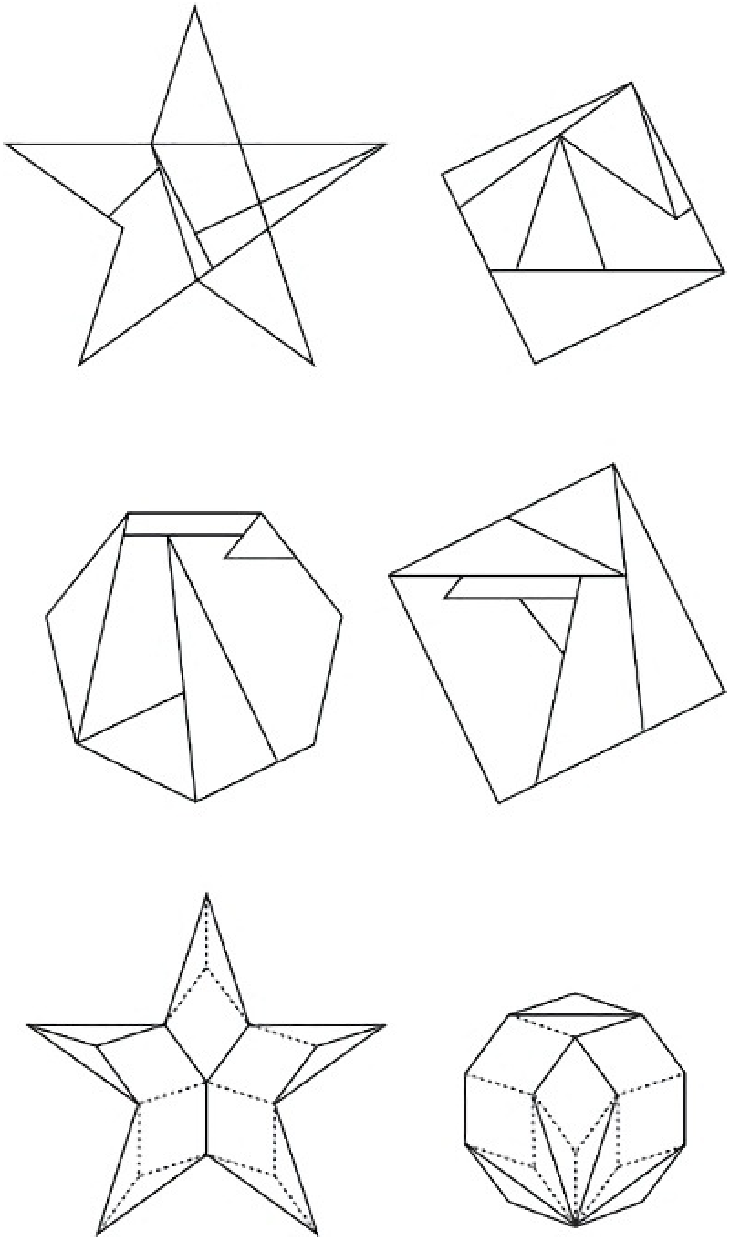


FIGURA 23. Disecciones simples.

(a) De pentagrama a cuadrado, de Philip Tilson.
(b) De heptágono a cuadrado, de Gavin Theobald.
(c) De pentagrama a decágono, de Lindgren.

Dudo en mencionar este extraño resultado porque parece una imposibilidad obvia: ¿cómo puede *duplicarse* el volumen, sólo con reordenar las piezas? El truco consiste en emplear piezas tan extrañas que no posean un volumen bien definido. De hecho, describirlas como «piezas» es forzar el lenguaje, pues no son objetos simplemente conexos —se parecen más a nubes esféricas de polvo infinitamente complejas—. Las ideas están resumidas en mi libro *De Aquí al Infinito* y descritas en todo su esplendor en la *The Banach-Tarski Paradox* de Stan Wagon (véase Lecturas adicionales).

Por supuesto, no hay forma práctica de realizar esta disección teórica con un objeto físico —de modo que los que tratan con metales preciosos pueden lanzar un suspiro de alivio— pero demuestra cuán sutil es el concepto de volumen. Incluso describir la construcción matemática requiere muchas páginas de razonamiento y varias ideas sofisticadas. Curiosamente, las disecciones «paradójicas» en las que cambia el área no son posibles en geometría plana, por muy complejas que sean las piezas, como Tarski demostró en 1925. Sin embargo, *sí son* posibles en la superficie de una esfera.

Cuando las piezas en las que se corta el objeto son suficientemente bonitas para tener áreas o volúmenes bien definidos —y especialmente cuando son polígonos o poliedros, con aristas y caras rectas— no hay construcciones contraintuitivas como la de Banach y Tarski. De hecho, en 1833, P. Gerwein, un teniente del ejército prusiano, respondió a una pregunta básica sobre disecciones planteada por el matemático húngaro Wolfgang Bolyai. Gerwein demostró que dados dos polígonos planos de igual área, existe un conjunto finito de piezas poligonales idénticas que pueden ser reordenadas para formar cualquiera de las dos formas. Este resultado se denomina tradicionalmente Teorema de Bolyai-Gerwein, aunque de hecho parece haber sido demostrado por primera vez por William Wallace en 1807.

El Teorema de Bolyai-Gerwein *no* se generaliza a tres dimensiones. En 1900, David Hilbert preguntó si dos poliedros de igual volumen son «equivalentes por disección» (si pueden ser compuestos a partir del mismo conjunto de piezas poliédricas). Un año más tarde, Max Dehn demostró el sorprendente resultado según el cual un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen *no* son equivalentes por disección.

La diversión real, por supuesto, viene al encontrar ejemplos claros o sorprendentes de formas que *sí son* equivalentes por disección. Usted puede hacer algún progreso por ensayo y error inspirado, pero sólo si tiene una gran imaginación espacial. Una de las grandes virtudes de *Disecctions: Plane and Fancy* es que, además de mostrar un número enorme de disecciones, explica muchos de los principios generales involucrados en encontrarlas.

Uno de éstos es el «principio del escalón» (figura 24), por el que una forma es cortada a lo largo de una «escalera» que luego puede desplazarse un escalón para crear una forma diferente. Tanto Loyd como Dudeney hacían uso de este principio en muchos de sus rompecabezas. David Collison, un entusiasta de la disección que nació en Inglaterra y trabajó como consultor y programador de ordenadores en Estados Unidos, concibió elaboradas disecciones basadas en este principio. La figura 25 muestra una de sus creaciones, una prueba por disección del bien conocido hecho «pitagórico» que $5^2 + 12^2 = 13^2$, realizada en el contexto de pentágonos. Usted puede ver varios usos diferentes del principio del escalón en este ejemplo.

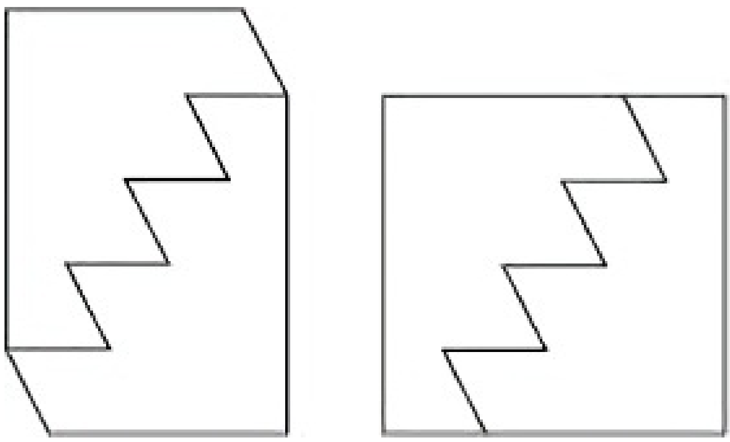


FIGURA 24. El principio del escalón.

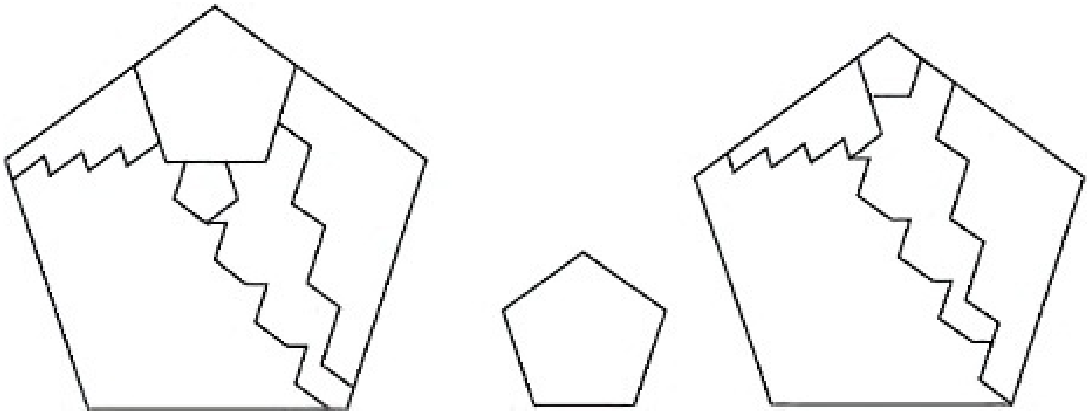


FIGURA 25. Disección pitagórica de Collison. Aquí el pentágono más grande tiene un área de 169 unidades cuadradas; los más pequeños tienen áreas de 25 y 144 respectivamente.

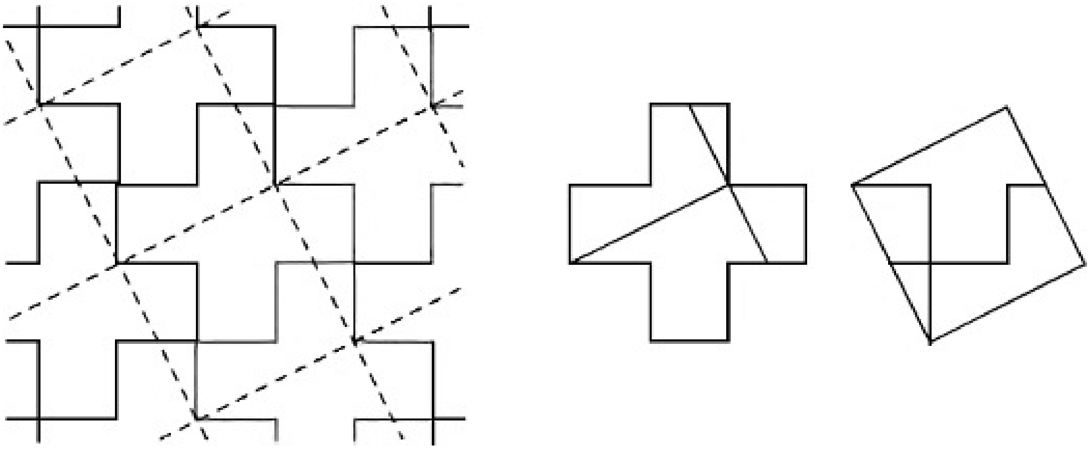


FIGURA 26. Teselación: de cruz griega a cuadrado.

Otro método general es el «principio de teselación». Muchas formas interesantes pueden ser insertadas en teselaciones, es decir, pautas de teselas que recubren el plano. Si se superponen dos teselaciones diferentes, cada una de ellas formada por teselas de la misma área, a menudo se hace posible «permutar» una disección de una forma a la otra. La figura 26 muestra un ejemplo sencillo, en el que una forma es una cruz griega y la otra es un cuadrado. La figura 27 muestra una utilización más elaborada de la misma idea básica. Esta disección de un dodecágono para dar una cruz latina se debe a Harry Lindgren, un experto mundial en disecciones y autor de *Geometric Dissections* (véase Lecturas adicionales). El primer paso, y el más difícil, es cortar el dodecágono en tres piezas que pueden ser reordenadas para formar una tesela bastante complicada (figura 27a). La cruz latina de área igual que el dodecágono puede cortarse también en dos piezas (figura 27b). Cada una de estas formas tesela el plano (figura 27c). La comparación de las dos teselaciones lleva a la disección de la figura 27d.

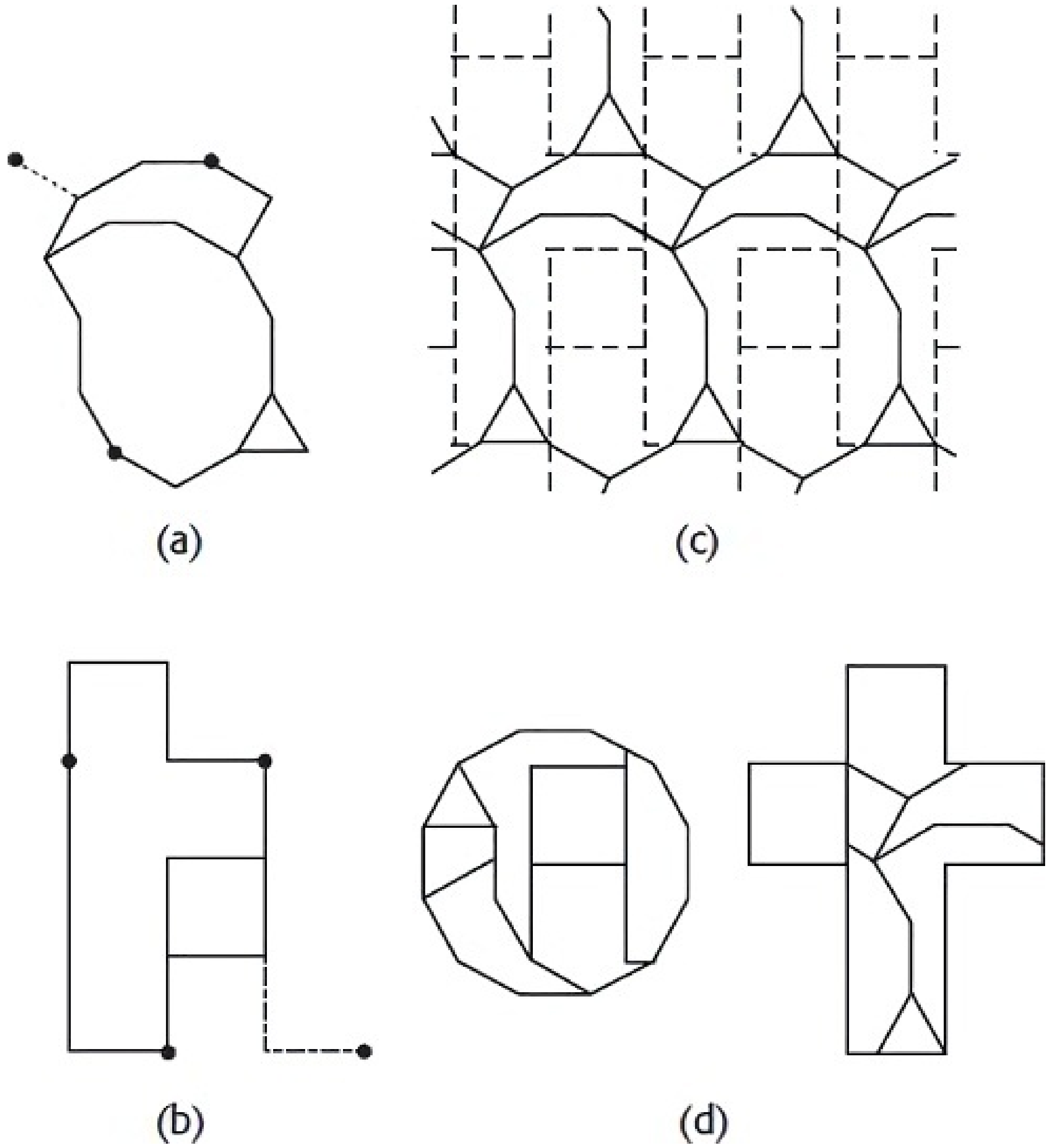


FIGURA 27. De dodecágono a cruz latina, de Lindgren.

(a) Cortar el dodecágono en tres piezas y reordenarlas para formar una tesela.
(b) Cortar la cruz latina.
(c) Teselar el plano en dos direcciones.
(d) La comparación entre las dos teselaciones lleva a la disección del dodecágono en una cruz latina.

Otra variante del principio de teselación yace detrás de una disección publicada por George Biddle Airy, quien sirvió como Astrónomo Real Británico desde 1836 a 1881, para demostrar el Teorema de Pitágoras (figura 28). El pequeño poema es de Airy.

Un tercer método general es el principio de la cinta. Las dos formas se cortan en piezas que entre ellas puedan teselar una cinta infinitamente larga. Si las cintas se superponen, determinan una disección. La figura 29 muestra cómo puede obtenerse la disección de Paul Busschop de un hexágono para dar un cuadrado por el método de la cinta. Busschop era un belga que escribió un libro de solitarios, publicado póstumamente en 1879 por su hermano. La figura 30, que disecciona una estrella de David para dar un cuadrado, puede obtenerse por el mismo método. Fue ideada por Harry Bradley, un ingeniero americano que era instructor en el MIT en 1897.

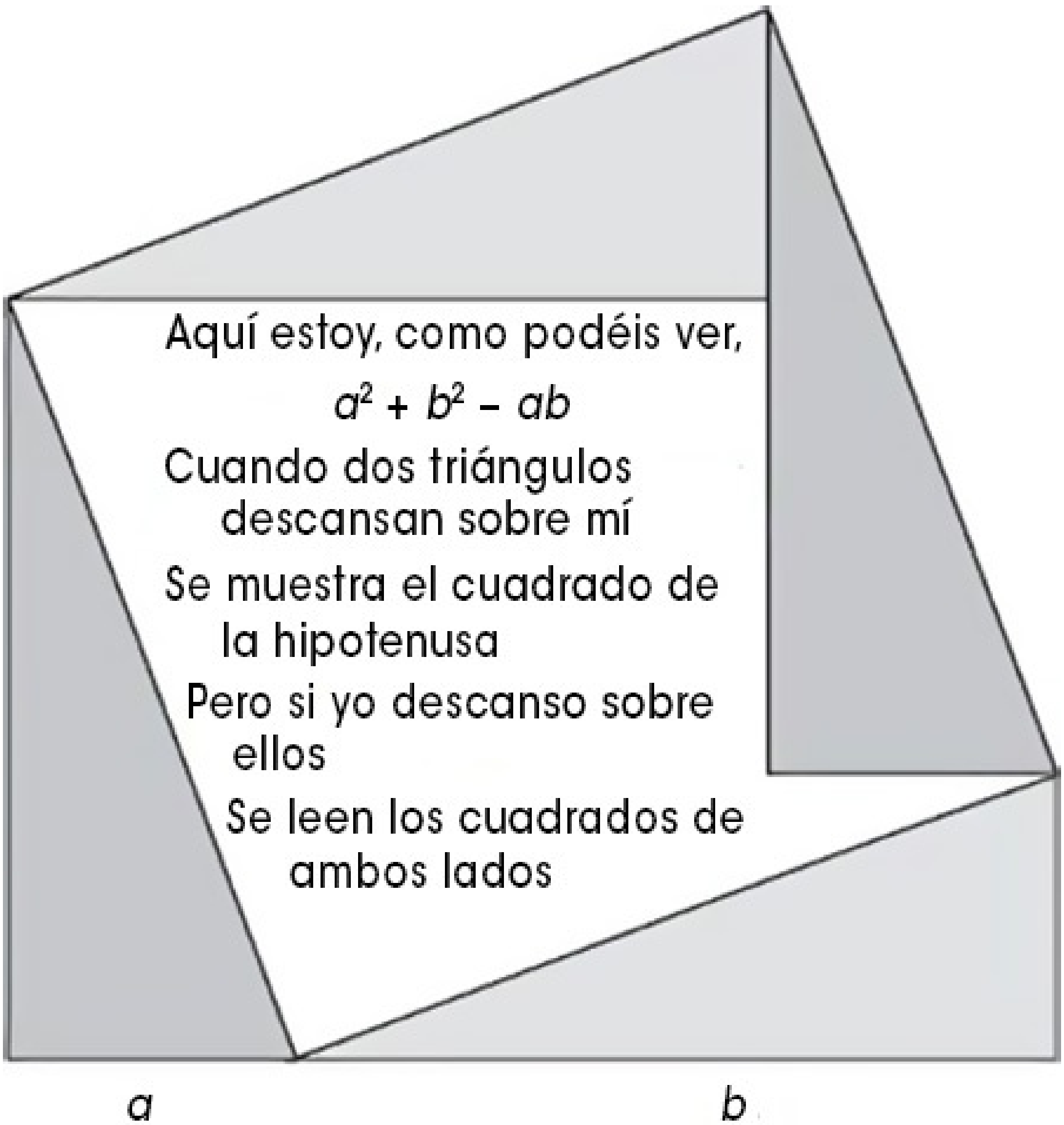


FIGURA 28. Disección Pitagórica de Airy.

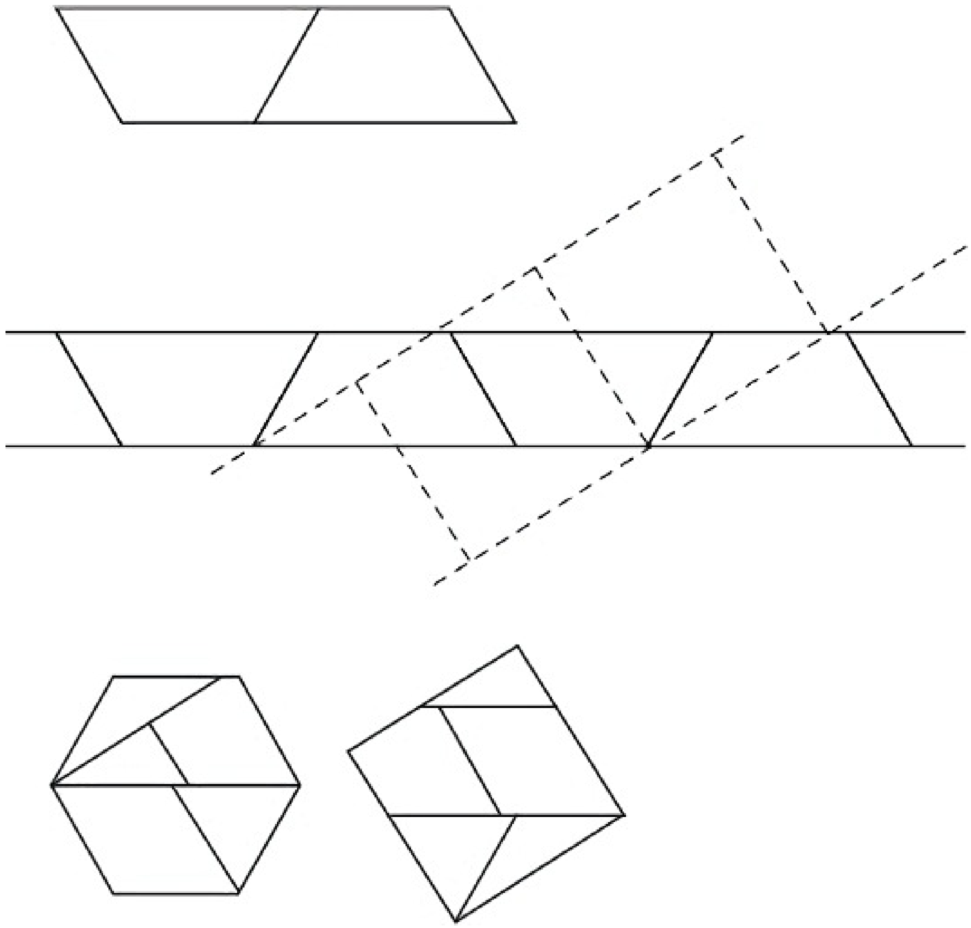


FIGURA 29. De hexágono a cuadrado, de Busschop.

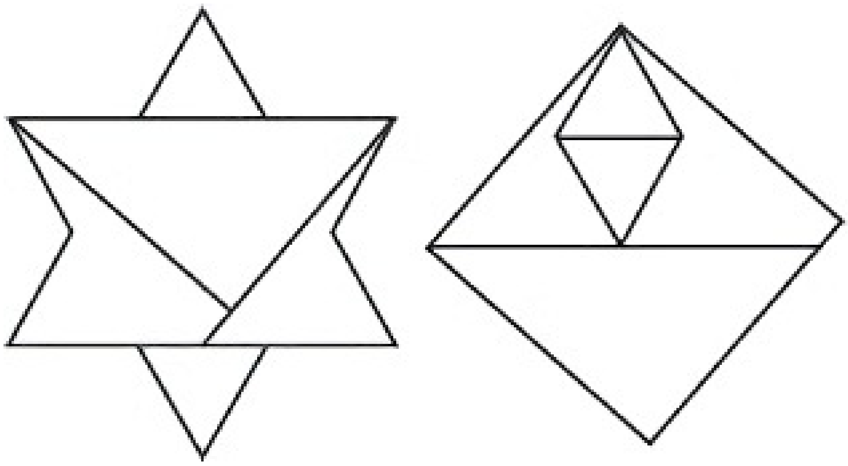


FIGURA 30. De Estrella de David a cuadrado, de Bradley.

Los rompecabezas de disección no se limitan a cambiar simplemente una forma por otra. A menudo debe cortarse y reordenarse todo un conjunto de formas. La figura 31 muestra dos ejemplos: cuatro octógonos para dar uno, y seis dodecágonos para dar uno.

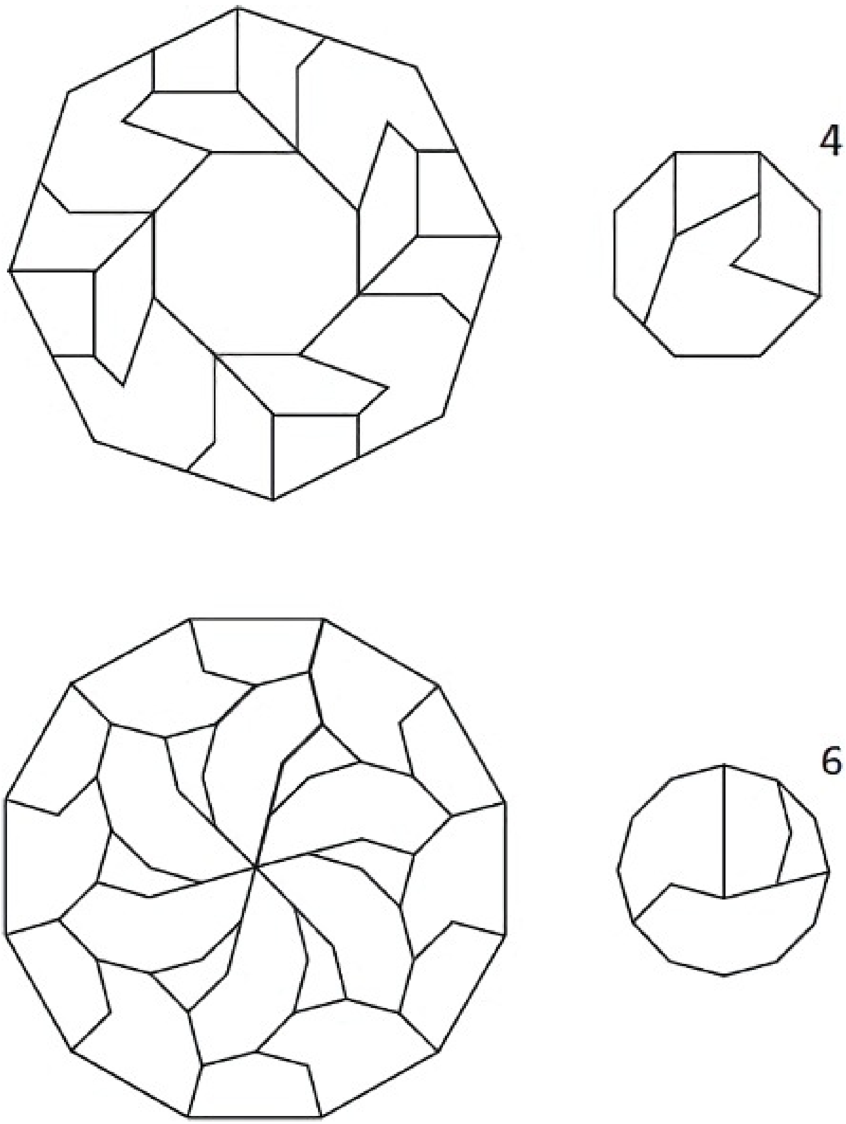


FIGURA 31

(a) De cuatro octágonos a uno.
(b) De seis dodecágonos a uno.

Las disecciones son tan convincentes que en ocasiones el ojo puede engañar al cerebro. En 1901, Loyd cometió un error memorable —descrito por Frederickson como «quizá su mayor metedura de pata»— cuando afirmó que había diseccionado una mitra (un cuadrado del que se ha eliminado un cuarto) para dar un cuadrado como en la figura 32a. Por desgracia, el «cuadrado» aparente es realmente un rectángulo cuyos lados están en proporción 49:48. Resulta irónico que Loyd le llamara El Rompecabezas del Sabelotodo. Su rival Dudeney señaló el error en 1911, y dio una disección correcta, figura 32b. De modo que si usted quiere buscar sus propias disecciones, siga el consejo dado por muchos padres a sus hijos: «Diviértete, pero ten cuidado».

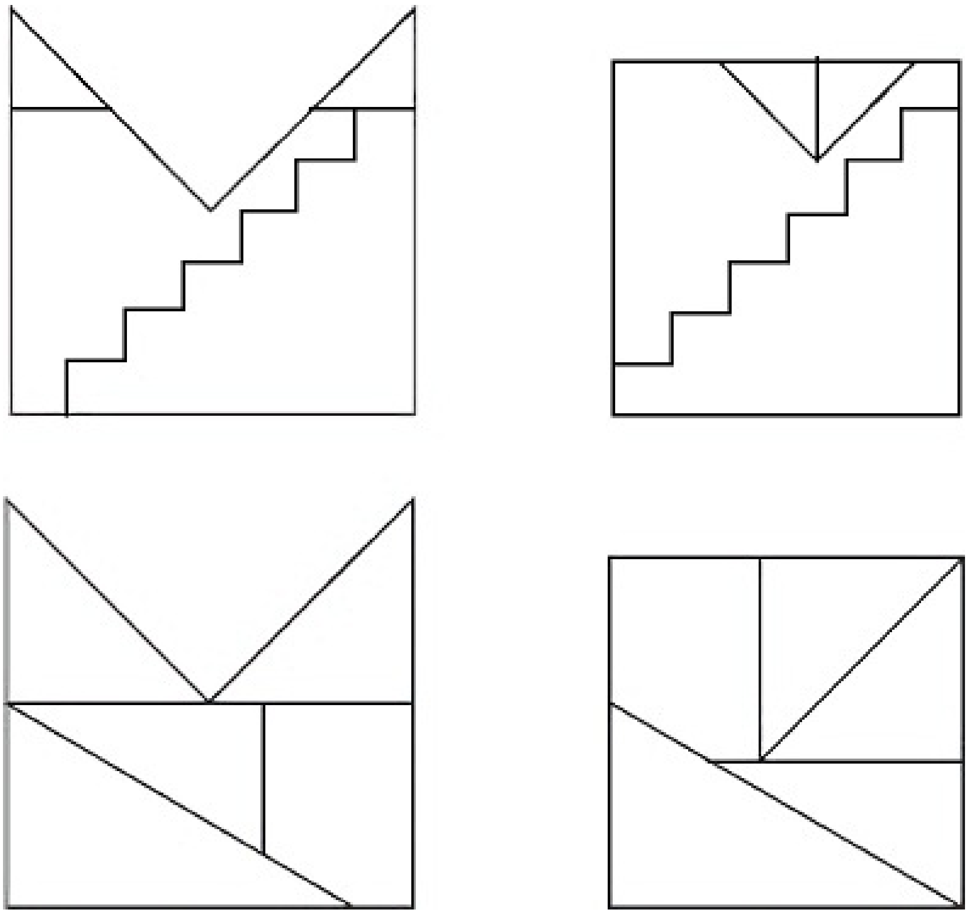


FIGURA 32. La disección de la mitra.

(a) Error de Loyd.
(b) Corrección de Dudeney.

8
Historias de un número olvidado

El «número de oro» 1,618034 es un clásico de las matemáticas recreativas que aparece en piñas, espirales y en un problema de ochocientos años de antigüedad sobre el crecimiento exponencial de una población de conejos. Aquí echamos una mirada a un pariente (del número, no de los conejos) menos conocido pero igualmente interesante, a saber, 1,324718, al que el arquitecto Richard Padovan llama el «número de plástico».

Alan St George es un escultor matemático que con frecuencia hace uso del bien conocido «número de oro». En 1995-1996 expuso varias de sus obras, y el catálogo de su exposición menciona a un pariente menos famoso remitiendo a una serie de artículos en los que «El arquitecto Richard Padovan revelaba las glorias del “número de plástico”… El número de plástico tiene poca historia, lo que es extraño considerando sus grandes virtudes como herramienta de diseño, pero su ascendencia en matemáticas es casi tan respetable como la de su primo de oro… No parece que se dé tanto en la naturaleza, pero tampoco lo ha buscado nadie».

Encontré esto intrigante y decidí profundizar más en este número curioso y poco conocido. Sospecho que ha sido redescubierto muchas veces, y probablemente tiene varios nombres.

Con el propósito de comparación, permítame empezar con el número de oro ϕ. (Una fuente excelente es el libro de Mario Livio citado en Lecturas adicionales). Éste satisface la ecuación $\phi = 1 + 1/\phi$, lo que implica que $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618034$ aproximadamente. El número de oro está íntimamente asociado con la geometría de los pentágonos —es la razón entre la diagonal de un pentágono y su lado— y con ello está asociado con el dodecaedro y el icosaedro. Tiene estrechas conexiones con los célebres números de Fibonacci. Para ver esta conexión consideremos la figura 33, un sistema de cuadrados dispuestos en espiral. El cuadrado inicial (marcado en negro) tiene lado 1, como su vecino inmediato. Luego se añade un cuadrado de lado 2, para que encaje perfectamente con los dos primeros, seguido a su vez por cuadrados de lado 3, 5, 8, 13, 21, y así sucesivamente. Éstos son los números de Fibonacci: cada uno de ellos es la suma de los dos anteriores. Esto es evidente a partir de la figura: por ejemplo, el cuadrado de lado 21 tiene la misma altura que los de lados 13 y 8 juntos.

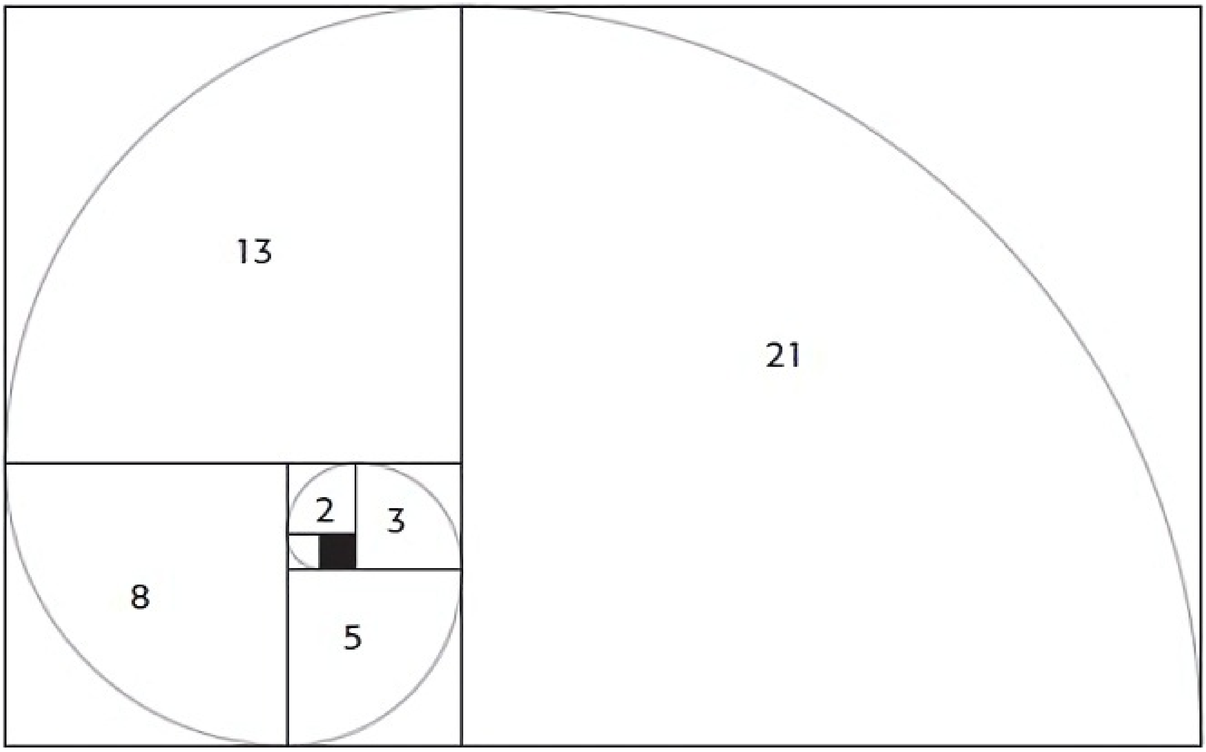


FIGURA 33. Una espiral de cuadrados forma números de Fibonacci.

La razón entre números de Fibonacci consecutivos tiende al número de oro. Por ejemplo, $21/13 = 1{,}615384$. Este hecho es una consecuencia de la regla para generar números de Fibonacci, en combinación con la ecuación $\phi = 1 + 1/\phi$. En la figura 33 he añadido un cuarto de círculo dentro de cada cuadrado componente, empalmándolos para formar una elegante espiral. Esta espiral es una buena aproximación a la denominada «espiral logarítmica» que tan a menudo se encuentra en la naturaleza, por ejemplo, en la concha de un nautilus. Los sucesivos giros de la espiral crecen a un ritmo aproximadamente igual al número de oro.

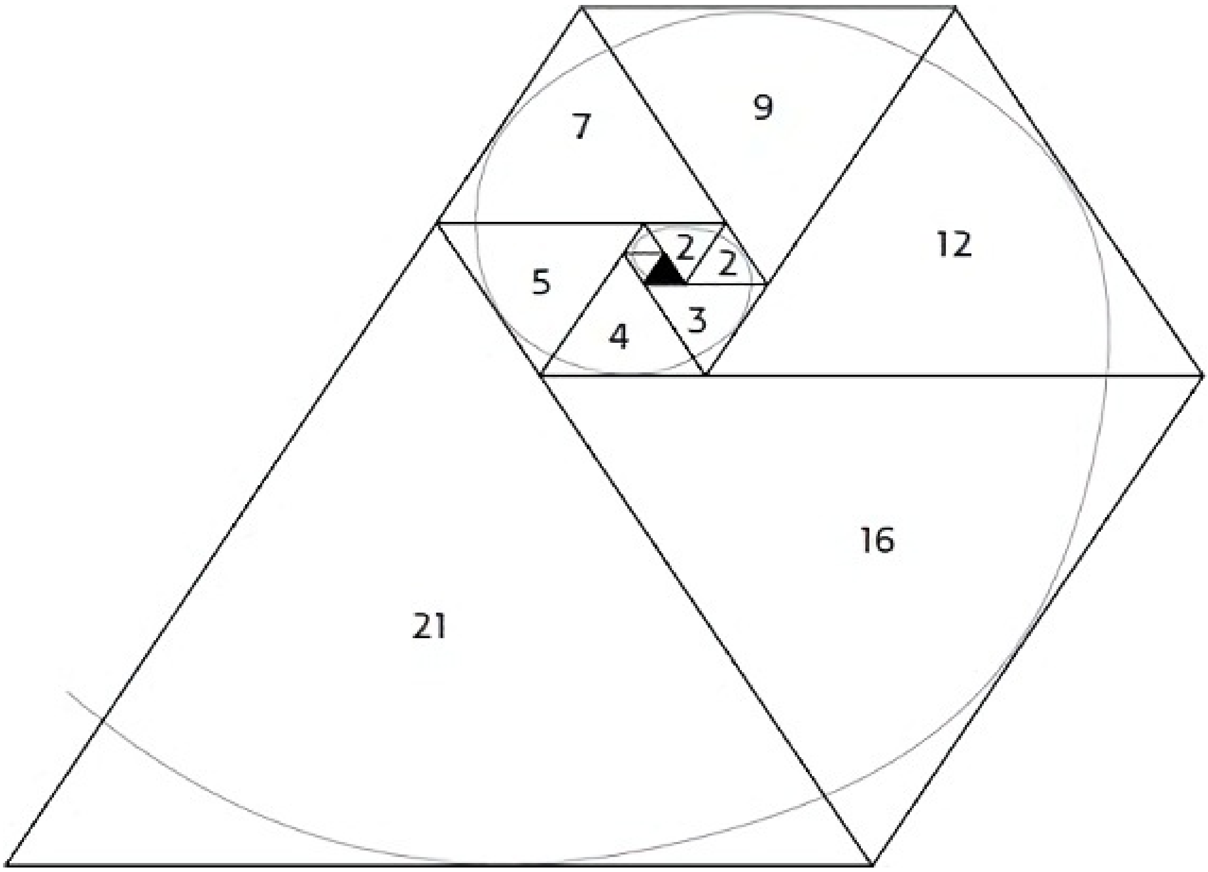


FIGURA 34. Una espiral de triángulos forma números de Padovan.

Ésta es la historia dorada: vayamos ahora al análogo plástico. Empezamos con un diagrama muy similar al de la figura 33, pero compuesto de triángulos equiláteros (figura 34). El triángulo inicial está marcado en negro y los triángulos sucesivos siguen una espiral en el sentido de las agujas del reloj: la espiral mostrada es de nuevo aproximadamente logarítmica. Para hacer que las formas encajen, los tres primeros triángulos tienen lado 1. Los dos siguientes tienen lado 2, y luego los números van como 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 y así sucesivamente. De nuevo hay una regla de formación sencilla, análoga a la que existe para los números de Fibonacci: ahora cada número de la secuencia es la suma de los que le preceden dos y tres lugares antes. Por ejemplo, 12 = 7 + 5, 16 = 9 + 7, 21 = 12 + 9. Una vez más, esto es evidente a partir de la geometría de los triángulos y las condiciones necesarias para que encajen. Permítame llamar a esta secuencia la *secuencia de Padovan* en honor a Richard Padovan.

En realidad, él me pidió que no hiciera esto porque él no inventó el número, pero tampoco Pell inventó (o resolvió) la Ecuación de Pell, ni Bolyai y Gerwein fueron los primeros en demostrar el Teorema de Bolyai-Gerwein. Verá usted que tengo una buena razón para hacerlo: una broma italiana. Y además, la gente merece crédito por hacer las ideas *interesantes*. De modo que, con profusas y entrañables disculpas ante Richard, me atendré a mi terminología históricamente inexacta. Hay que hacerlo cuando manda el periodismo.

Es curioso que «Padova» es la forma italiana de «Padua», y Fibonacci era italiano, de Pisa, a unos 160 kilómetros de Padua. «Fibonacci» significa supuestamente «hijo de Bonaccio»; aunque el nombre que él mismo utilizaba era «Leonardo de Pisa» y parece que su famoso apodo no fue inventado hasta el siglo XIX. Estoy muy tentado a renombrar a los números de Fibonacci como la «secuencia de Pisa» para mantener el sabor de la geografía italiana, pero he conseguido resistir a la tentación y mantendré la nomenclatura tradicional.

En la tabla 1 se da la lista de los veinte primeros términos de la secuencia de Fibonacci *F(n)* y la secuencia de Padovan *P(n)*. En forma algebraica, las reglas de generación son

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \text{ donde } F(0) = F(1) = 1$$
$$P(n+1) = P(n-1) + P(n-2) \text{ donde } P(0) = P(1) = P(2) = 1$$

lo que hace muy visible el parecido de familia. La tabla incluye también los «números de Perrin» $A(n)$, que serán discutidos un poco más tarde.

TABLA 1

n	$F(n)$	$P(n)$	$A(n)$
0	1	1	3
1	1	1	0
2	2	1	2
3	3	2	3
4	5	2	2
5	8	3	5
6	13	4	5
7	21	5	7
8	34	7	10
9	55	9	12
10	89	12	17
11	144	16	22
12	199	21	29
13	343	28	39
14	542	37	51
15	885	49	68
16	1427	65	90
17	2312	86	119
18	3739	114	158
19	6051	151	209
20	9790	200	277

Si usted toma razones de términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci, tales como 8/5, 13/8, 21/13 y así sucesivamente, encontrará que las razones se aproximan como límite al número de oro. Por ejemplo, $21/13 = 1{,}6153$, $34/21 = 1{,}6190$ y $9790/6051 = 1{,}6179$. Hay maneras sencillas de demostrarlo. Por razones similares, el número de plástico, que desde ahora llamaré p, y cuyo valor aproximado es 1,324718, aparece como el límite de la razón de dos números de Padovan sucesivos. Así $200/151 = 1{,}3245$. La regla de formación para los números de Padovan lleva a la ecuación $p = 1/p + 1/p^2$, o equivalentemente $p^3 - p - 1 = 0$. El número p es la única solución real de esta ecuación cúbica.

La secuencia de Padovan crece mucho más lentamente que la secuencia de Fibonacci porque p es menor que ϕ. Hay muchas pautas interesantes en la secuencia de Padovan. Por ejemplo, la figura 34 muestra que $21 = 16 + 5$, porque los triángulos adyacentes a lo largo de una arista apropiada tienen que encajar; análogamente $16 = 12 + 4$, $12 = 9 + 3$, y así sucesivamente. Esto nos dice que $P(n + 1) = P(n) + P(n - 4)$, una regla alternativa para obtener más términos de la secuencia.

En correspondencia, la ecuación $p = 1 + 1/p^4$, o $p^5 - p^4 - 1 = 0$ debe ser satisfecha —y no es inmediatamente obvio— mediante álgebra que p, definido como una solución de una ecuación cúbica, deba también satisfacer esta ecuación *quíntica* (de quinto grado). Quizá quiera usted investigar por qué es así.

En la columna original, yo señalaba que algunos números, tales como 3, 5 y 21 son a la vez de Fibonacci y de Padovan, y preguntaba: ¿hay otros? Si es así, ¿cuántos: es ese número finito o infinito? Benjamin de Weger (véase Lecturas adicionales) demostró que éstos son los únicos números que son a la vez de Fibonacci y de Padovan, junto con los casos triviales 0, 1 y 2. Yo señalé también que algunos números de Padovan, tales como 9, 16 y 49 son cuadrados perfectos, y preguntaba: ¿hay otros? ¿Cuántos? Las raíces cuadradas aquí son 3, 4 y 7, que también son números de Padovan. ¿Es esto una coincidencia o una regla general? Estas cuestiones siguen abiertas y merecen más estudio.

Otra manera de generar los números de Padovan consiste en imitar el uso de cuadrados en el caso de los números de Fibonacci, pero usando cuboides, es decir, cajas tridimensionales con caras rectangulares. Ahora obtenemos una especie de espiral tridimensional de cuboides. Con más detalle, empecemos con un cuboide de lado 1, y coloquemos otro adyacente al mismo. El resultado es un cuboide $1 \times 1 \times 2$, y en la cara 1×2 añadimos otro

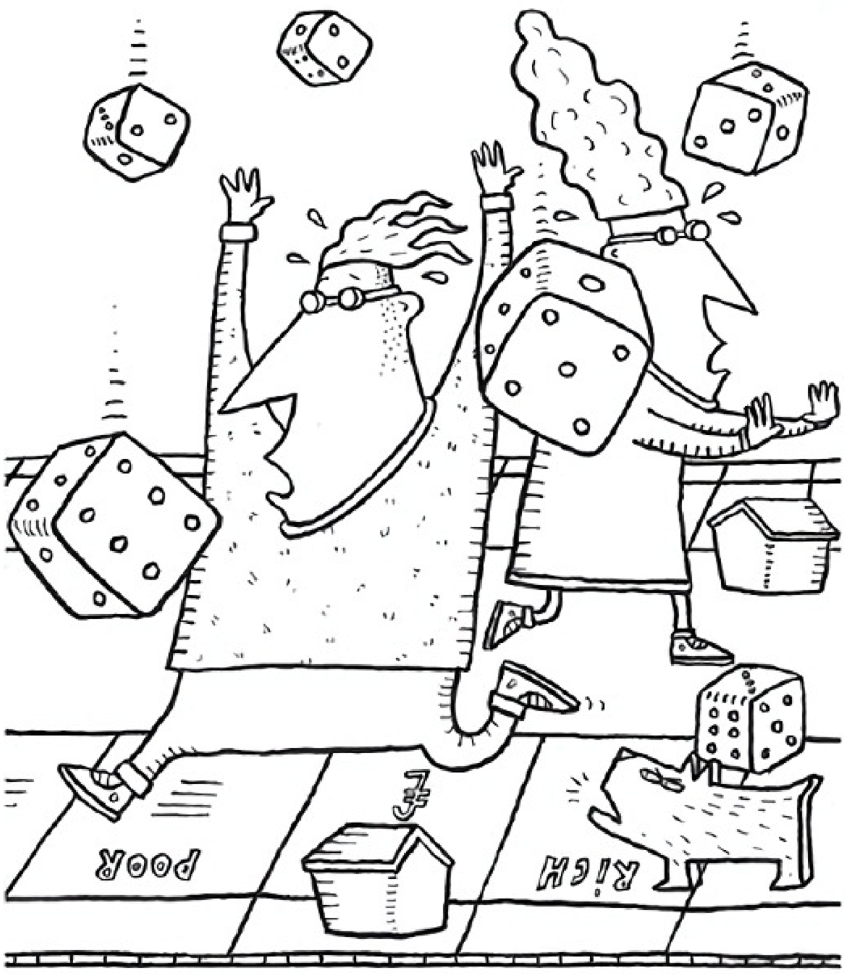
$1 \times 1 \times 2$, obteniendo un cuboide $1 \times 2 \times 2$. En una cara 2×2 añadimos un cubo $2 \times 2 \times 2$, para formar un cuboide $2 \times 2 \times 3$ en total. En una cara 2×3 añadimos un $2 \times 2 \times 3$ para obtener un $2 \times 3 \times 4$ total, y así sucesivamente. Continuamos el proceso, añadiendo siempre cuboides en orden este, sur, abajo, oeste, norte, arriba. En cada etapa, el nuevo cuboide formado tendrá como lados tres números de Padovan consecutivos.

Una secuencia con la misma regla de formación que los números de Padovan, pero que utiliza diferentes valores de partida, fue estudiada por el matemático francés Édouard Lucas en 1876. En 1899 sus ideas fueron desarrolladas por R. Perrin, y la secuencia se conoce ahora como la secuencia de Perrin $A(n)$. Los números de Perrin difieren de los números de Padovan en que $A(0) = 3$, $A(1) = 0$, $A(2) = 2$; sus valores se muestran también en la tabla. De nuevo la razón entre números de Perrin consecutivos tiende a p, pero Lucas advirtió una propiedad más sutil. Como quiera que n es un número primo (un número que no tiene otros divisores que él mismo y 1), n divide exactamente a $A(n)$. Por ejemplo 13 es primo, $A(13) = 30$, y $39/13 = 3$. Análogamente 19 es primo, $A(19) = 209$, y $209/19 = 11$.

Este teorema proporciona un curioso test para saber si un número es compuesto, es decir, no primo. Por ejemplo, cuando $n = 18$ tenemos $A(18) = 58$, y $158/18 = 8, 777$, que no es un número entero. Por lo tanto, 18 debe ser compuesto. De modo que podemos utilizar los números de Perrin para comprobar la no-primalidad: cualquier número n que no divida a $A(n)$ es compuesto. Una característica curiosa de este test es que no muestra en realidad un divisor de n, que es la manera más obvia de demostrar que un número no es primo. Por supuesto, en este caso sabemos que $18 = 2 \times 3 \times 3$, pero para números mayores los factores pueden no ser tan obvios; de todas formas usted aún puede dividir $A(n)$ por n y ver lo que obtiene.

Si n divide a $A(n)$, ¿debe ser n siempre primo? Esto no se sigue del teorema de Lucas, de la misma forma que «si llueve, entonces me mojo» no implica «si me mojo, entonces llueve». (Podía haberme caído en un estanque en un día perfectamente seco). Y de hecho, la respuesta es «no». En 1982, Jeffrey Shallit (Universidad de Waterloo) encontró dos números compuestos que dividen al correspondiente número de Perrin, a saber 271 441 y 904 631. Más tarde encontró un tercero, 16 532 714. Un test más complicado para la primalidad, basado en varios números de Perrin sucesivos, ha sido también estudiado y, por el momento, no se conoce ninguna excepción.

9
¿Es justo el Monopoly?



Ningún ingreso procedente de alquileres, deudas en el banco, y todo su futuro financiero pendiente de un lanzamiento de los dados... Suena igual que el mercado de valores cuando las puntocom se venían abajo. Pero, por supuesto, es el Monopoly. Un juego, sin duda; pero ¿es un juego matemático? De hecho lo es, como esta primera pata de un doble encabezado pretende demostrar. En este precalentamiento no voy a abordar el juego real, sino sólo una versión simplificada. Vea el capítulo siguiente para los detalles más sangrientos.

Apenas hay una familia que no haya jugado al Monopoly®, probablemente el juego de mesa más famoso del mundo, donde intervienen la suerte, la estrategia y la economía despiadada. Hay algunas matemáticas muy interesantes y bastante profundas asociadas con todos estos juegos de mesa: constituyen lo que un teórico de probabilidades llamaría una cadena de Markov, un concepto que recibe el nombre del matemático ruso Andrey Andreyevich Markov, quien ideó una teoría general de tales objetos a comienzos del siglo XX.

No voy a recordarle todas las reglas del Monopoly®, pero tenemos que saber que los jugadores lanzan por turno un par de dados y que la puntuación total obtenida en el lanzamiento determina cuántas casillas avanzan. Hay una regla según la cual un jugador que saca un doble lanza de nuevo (pero si saca tres dobles seguidos va a la cárcel), y una simplificación que haré aquí es ignorar esta regla. Un análisis similar sigue siendo aplicable si no se ignora, pero las matemáticas se hacen mucho más complicadas —y ya son bastante complicadas.

Los jugadores parten de la casilla que se conoce como «Salida». Cualquiera que haya jugado a juegos en que se lanzan dos dados sabe que algunas puntuaciones totales son más probables que otras. De hecho el total más probable es 7, con probabilidad 1/6. Esto se debe a que hay seis maneras de totalizar 7, a saber $1 + 6$, $2 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $5 + 2$, $6 + 1$, entre las 36 combinaciones posibles de los dos dados, de modo que la probabilidad del 7 es $6/36 = 1/6$. A continuación vienen 6 y 8 (probabilidad 5/36), luego 5 y 9 (probabilidad $4/36 = 1/9$), 4 y 10 (probabilidad $3/36 = 1/12$), 3 y 11 (probabilidad $2/36 = 1/18$), y finalmente 2 y 12 (probabilidad 1/36). De modo que el primer jugador tiene más probabilidades (a lo largo de muchas partidas) de caer en la séptima casilla, que es una casilla de Suerte, lo que significa que debe extraer una carta del mazo de Suerte y hacer lo que la carta indica. De nuevo, para simplificar el análisis, empezaré suponiendo que las instrucciones de la carta *no* son obedecidas. A ambos lados de esa casilla, y sólo ligeramente menos probables, están The Angel, Islington (Oriental Avenue en EE. UU.) y Euston Road (Vermont Avenue). De modo que el primer jugador tiene una excelente oportunidad de asegurarse una de estas dos deseadas propiedades y, si lo hace, se reducen las oportunidades de los otros jugadores de comprar una propiedad en su primer lanzamiento.

Ésta es sin duda una de las razones por las que los diseñadores del juego ponen las propiedades baratas (con rentas bajas) cerca del inicio. Las realmente caras, pero lucrativas, Park Lane (Park Place) y Mayfair (Boardwalk) están a varios turnos alrededor del tablero, para cuando —presumiblemente— las probabilidades se han igualado.

Pero ¿lo han hecho?

Hay dos versiones de esta pregunta. Una es una versión simplificada que no se aplica al juego real sin cambios importantes, pero tiene la virtud de ilustrar la aproximación de la cadena de Markov en un caso en el que las ecuaciones pueden resolverse fácilmente. La segunda es la pregunta real para el juego real, con sus numerosas complicaciones; ésta también lleva a la aproximación de la cadena de Markov, pero los cálculos son largos y requieren un computador. En este capítulo trataré la pregunta simplificada para explicar los principios, y pasaré a la pregunta real en el capítulo siguiente.

¡Ah!, y para evitar más correspondencias entre paréntesis, he aquí una tabla que muestra cómo difieren los nombres en cada lado del Atlántico. (Probablemente hay cientos de variantes nacionales del tablero, más algunas propias de medios de comunicación; no hay lugar para hacer la lista de todas).

Para abordar la versión simplificada de mi pregunta introduciré aún una simplificación adicional. En lugar de considerar un lanzamiento simultáneo de dos dados, los imaginaré lanzados de uno en uno. Desde este punto de vista, cada jugador hace dos movimientos: un movimiento inicial «fantasma», en el que ignora lo que está escrito en la casilla resultante, seguido de un segundo movimiento «real». Debido a que nuestro interés es el flujo de probabilidades, y estamos ignorando las instrucciones de la Suerte y la Caja de la Comunidad, es legítimo dividir los movimientos del juego en dos pasos.

TABLA 2

Británico	Americano
Salida	Salida
Old Kent Road	Mediterranean Ave
Caja de la comunidad	Caja de la comunidad

Whitechapel Road	Baltic Ave
Impuesto sobre la Renta	Impuesto sobre la Renta
Kings Cross Stn	Reading Railroad
The Angel Islington	Oriental Ave
Chance	Chance
Eustor Road	Vermont Ave
Pentonville Road	Connecticut Ave
Sólo visita/cárcel	Sólo visita/cárcel
Pall Mall	St Charles Place
Electric Company	Electric Company
Whitehall	States Ave
Northumberl’d Ave	Virginia Ave
Marylebone Stn	Pennsylvania Rlrd
Bow Street	St James Place
Community Chest	Community Chest
Marlborough St	Tennessee Ave
Vine Street	New York Ave
Aparcamiento gratuito	Aparcamiento gratuito
Strand	Kentucky Ave
Suerte	Suerte
Fleet Street	Indiana Ave
Trafalgar Square	Illinois Ave
Fenchurch Stn	B&O Railroad
Leicester Square	Atlantic Ave
Coventry Street	Ventnor Ave
Water Works	Water Works
Piccadilly	Marvin Gardens
Ve a la cárcel	Ve a la cárcel
Regent Street	Pacific Ave
Oxford Street	North Carolina Ave
Community Chest	Community Chest
Bond Street	Pennsylvania Ave
Liverpool St Stn	Short Line
Chance	Chance
Park Lane	Park Place
Impuesto de lujo	Impuesto de lujo
Mayfair	Boardwalk

La figura 35 muestra una visión de matemático del tablero de juego. Se interpreta de la siguiente manera: las líneas unen cada casilla (representada por un círculo pequeño) con cada una de las seis casillas siguientes en el sentido de las agujas del reloj. Utilizaré este diagrama para responder a la pregunta más sencilla sobre la limpieza final del juego: tras un largo número de lanzamientos de los dados, ¿resultan igualmente probables todas las casillas? Acabamos de ver que esto *no* es cierto después del turno de un jugador (dos lanzamientos, uno fantasma más uno real). Y tampoco es cierto en el juego real, ni siquiera al cabo de un gran número de lanzamientos, como veremos en el próximo capítulo.

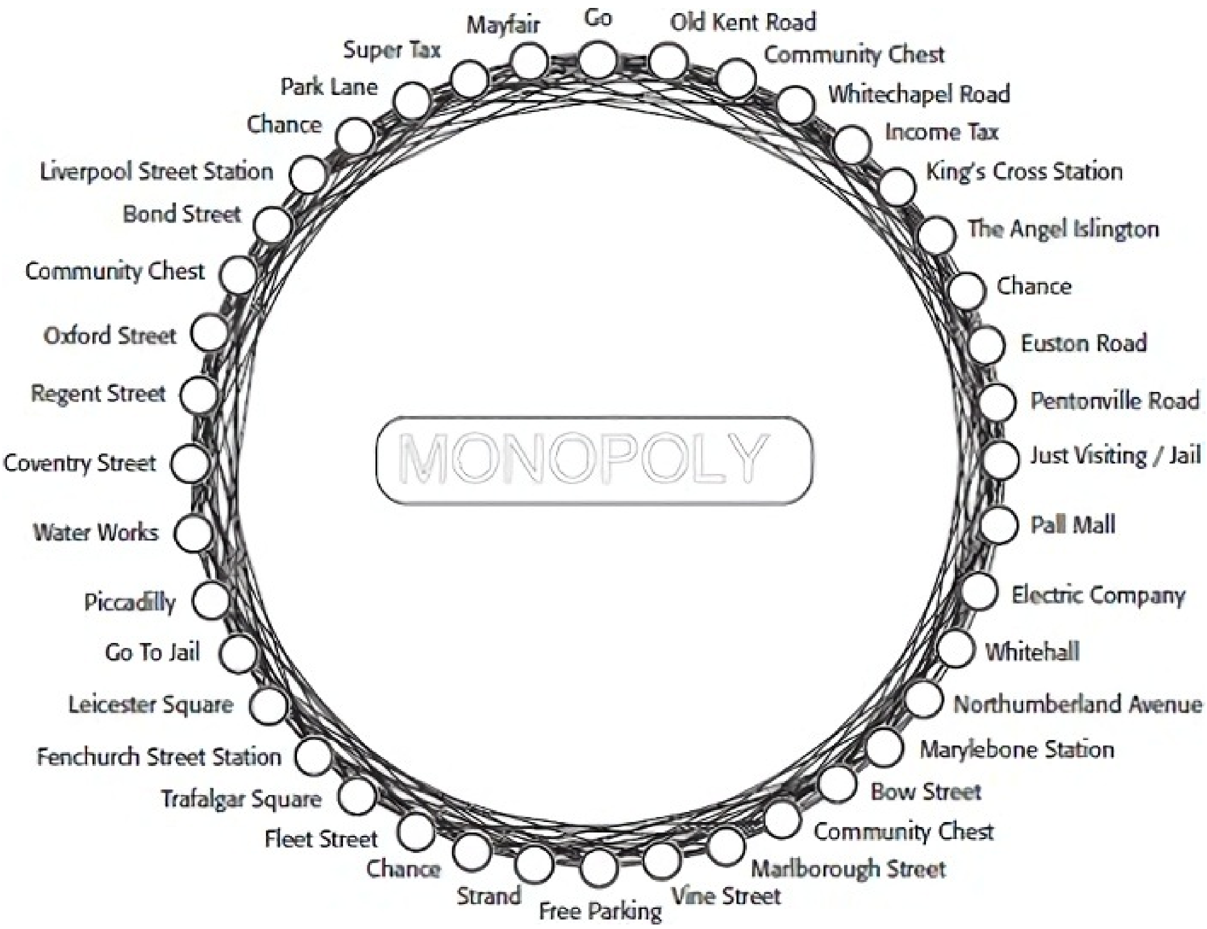


FIGURA 35. Visión de matemático del tablero de Monopoly (versión simplificada).

Por conveniencia numeramos las casillas de 0 a 39, con 0 = Salida. Entonces la casilla 40 se «empalma» a la casilla 0, y podemos considerar que los números se cuentan módulo 40 (lo que significa que algo mayor que 39 puede reemplazarse por su resto al dividirlo por 40). Ahora imaginamos a un único jugador que hace lanzamientos repetidos de un único dado y, en consecuencia, se mueve una y otra vez. La pregunta clave es: ¿cuál es la probabilidad de caer en una casilla dada después de un número dado de lanzamientos? Cabría esperar que cuando el número de lanzamientos se hace grande esta probabilidad se hace muy próxima a 1/40, para cualquiera de las 40 casillas. Es decir, todas deberían llegar a ser (¡casi!) igualmente probables.

La forma de calcular estas probabilidades es ver cómo «fluye» la distribución de probabilidades a medida que se lanzan más dados. Cada distribución puede representarse por una secuencia de cuarenta números, las probabilidades de caer en las casillas 0, 1, 2, …, 39, respectivamente. En el inicio del juego, el jugador está en la casilla 0 (Salida) con probabilidad 1 (es decir, siempre). De modo que la distribución de probabilidades es

1,0,0,0, …,0

con 1 en la casilla 0 y 39 ceros en las demás casillas.

Tras un único lanzamiento (fantasma) la distribución se convierte en

0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 0, …, 0.

Es decir, la probabilidad de caer en cada una de las casillas 1, 2, 3, 4, 5, 6 es 1/6, y no se puede ir a ninguna de las demás.

Advierta que la probabilidad total 1, concentrada originalmente en la casilla 0, se ha dividido en seis partes iguales, y éstas se han movido a las casillas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 unidades más adelante. Éste es un procedimiento completamente general. En cada lanzamiento del dado la probabilidad en una casilla dada se divide por 6, y estas seis partes iguales fluyen a cada una de las seis casillas siguientes en el sentido de las agujas del reloj. De modo que en el lanzamiento siguiente el 1/6 en la casilla 1 se redistribuye de esta forma:

0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, …,0.

Los 1/6 en las casillas 2-6 se distribuyen de manera análoga pero desplazados un paso cada vez:

0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36;0, …,0.
0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, …,0.
0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, …,0.
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, …,0.
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 0, …,0.

Finalmente sumamos las probabilidades que han ido a cada casilla concreta. Por ejemplo, la casilla 6 (el séptimo término en cada secuencia) adquiere 1/36 de cada una de las cinco primeras secuencias, pero 0 de la última, de modo que el total es 5/36. El resultado final es

0, 0, 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36, 0, …,0.

Esto concuerda con nuestras expectativas para el lanzamiento de dos dados.

Pero ahora podemos continuar. En el tercer lanzamiento (fantasma) multiplicamos cada término de la secuencia que acabamos de calcular por 1/6, y la desplazamos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 términos. Luego sumamos los números en cada casilla para obtener la distribución de probabilidad al cabo de tres lanzamientos. Y así sucesivamente. Cuando hacemos esto es crucial recordar que algo que fluye por el extremo final de la casilla 39 se empalma con el inicio.

Es fácil escribir un programa de ordenador para calcular estas distribuciones de probabilidad una a una. Los resultados se representan gráficamente en la figura 36, partiendo de la distribución «triangular» obtenida en el segundo lanzamiento. En cada lanzamiento posterior, la gráfica de la probabilidad se mueve un paso hacia delante en la figura. Se puede ver que el pico de la probabilidad se mueve varias casillas hacia la derecha en cada paso (de hecho, se mueve 3, 5 casillas en promedio, el valor medio de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6). La forma triangular inicial se hace más redondeada y se ensancha. Incluso después de los trece primeros lanzamientos, la distribución no es en absoluto uniforme, pero si la tendencia que se muestra en la figura continúa, entonces el pico se aplanará completamente con el tiempo y todos los valores serán prácticamente el mismo. Si usted continúa la simulación por computador, encontrará que esto es así realmente. Pero sería bonito tener alguna idea de por qué las simulaciones hacen esto.

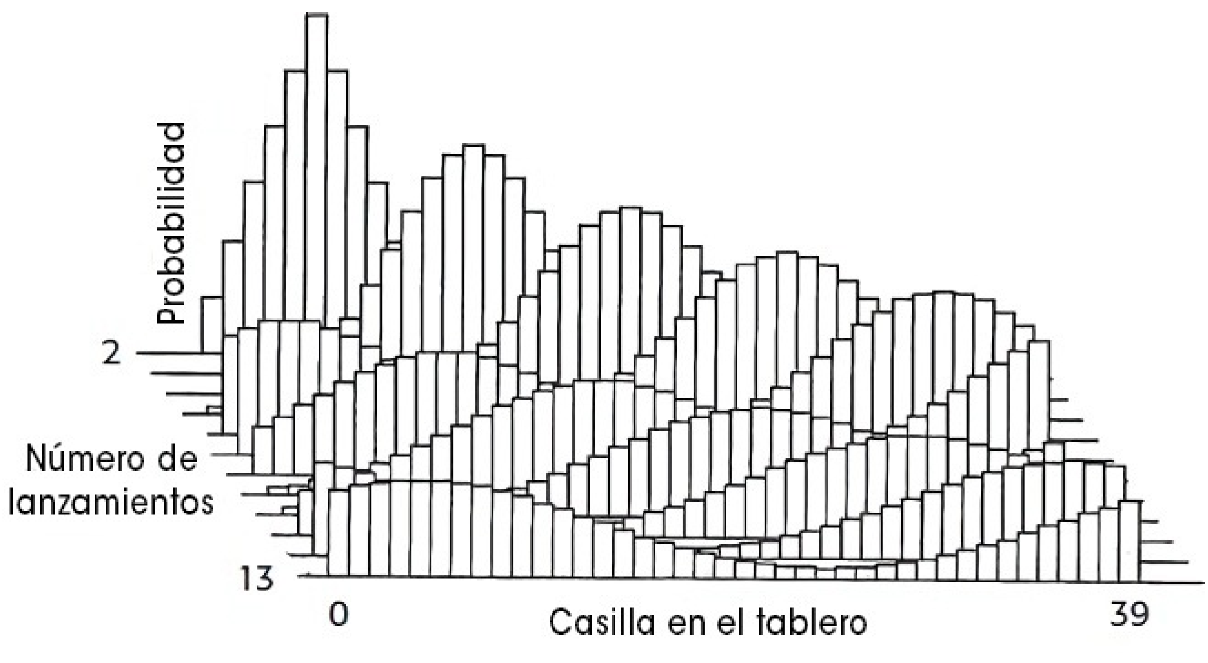


FIGURA 36. Distribución de probabilidades sobre las cuarenta casillas, y cómo cambia en cada lanzamiento sucesivo de los dados. La altura de cada barra muestra la probabilidad de caer en la casilla correspondiente; las gráficas para los lanzamientos 2-13 se muestran en profundidad de atrás a adelante.

Una aproximación consiste en apelar a la intuición física. Volvamos a la figura 35 e imaginemos que las probabilidades están representadas por una carga eléctrica. Al principio del juego, una carga total 1 está concentrada en la casilla 0. En cada lanzamiento posterior de los dados, la carga en cada casilla se divide en seis partes iguales, y dichas partes fluyen a lo largo de las líneas de la figura a cada una de las seis casillas siguientes. Esperaríamos que con el tiempo este flujo de carga tendiera hacia un único estado estacionario; y podemos calcular cuál debe ser dicho estado estacionario apelando a la simetría de la figura. Tenemos un polígono con cuarenta vértices, y las líneas de flujo parecen exactamente las mismas, sea cual sea el vértice en el que nos fijemos. Es decir, la figura entera es simétrica respecto a las rotaciones del polígono. Por consiguiente, el único estado estacionario también debe ser simétrico bajo todas las rotaciones. Pero puesto que la carga total se conserva, debemos terminar con carga 1/40 en cada vértice. Reinterpretando la carga como probabilidad, encontramos que la distribución tiende hacia un estado estacionario en el que cada casilla lleva una probabilidad 1/40.

Pero este argumento, por plausible que pueda ser, no es una demostración. Para eso necesitamos la teoría de Markov, que ofrece un método sistemático para seguir el flujo de probabilidad. Se empieza por escribir la «matriz de transición» para la red mostrada en la figura 35, que es una tabla cuadrada de 40×40 con las filas y columnas numeradas de 0 a 39. La entrada en la fila f y la columna c de esta tabla es la probabilidad de pasar, en un paso, de la casilla f a la casilla c. Ésta es 1/6 si $c = r + 1, r + 2, \ldots, r + 6$ (módulo 40), y 0 en caso contrario. Llamamos M a esta matriz de transición.

Hay entonces un cálculo técnico, que se realiza utilizando M, y se resume en la caja, cuyo resultado es que, a largo plazo, la distribución de probabilidad se hace tan próxima como queramos a

$$1/40, 1/40, 1/40, 1/40\ldots, 1/40.$$

Es decir, la probabilidad de caer en cada casilla es siempre la misma. Así que, con una pequeña ayuda de Markov, podemos demostrar que un juego tan complicado como el Monopoly es justo, en el sentido de que, a largo plazo, no hay ninguna casilla concreta con una probabilidad mayor o menor de caer en ella. Por supuesto, el primer jugador aún tiene una ligera ventaja, pero ésta está mitigada por la limitación de su saldo bancario.

Como dije, esta igualdad de probabilidades es válida en la versión idealizada del juego. Como veremos en el próximo capítulo, con seguridad no lo es en el juego real. En particular, en el juego real la casilla «Ve a la cárcel» produce una distribución de probabilidad sesgada. De hecho, la casilla «Cárcel» es una de las visitadas con más frecuencia —una observación interesante aunque probablemente inintencionada sobre el mundo de los negocios— con una probabilidad del 5,98 por 100 comparada con el valor «equidistribuido» de 2,5 por 100 (o 2,44 por 100 si se distinguen «Sólo Visita» y «Cárcel», lo que parece razonable, tanto dentro como fuera del mundo de los negocios). La siguiente casilla más probable es «Trafalgar Square», con probabilidad 3,18 por 100. La casilla visitada con menos frecuencia es la tercera casilla «Suerte» a partir de «Salida», con probabilidad 0,871, aparte de «Ve a la cárcel» que en realidad no es *visitada* porque uno va a chirona.

Quizá quiera usted hacer el mismo tipo de análisis con «Serpientes» y «Escalas», suponiendo que en cuanto usted cae en una «Serpiente» se desliza hasta su cola, en cuanto cae en una «Escala» sube hasta la parte superior, y cuando llega al final se queda ahí. Ahora, la distribución a largo plazo no tiene probabilidades iguales. ¿Cuál cree usted que es?

Y he aquí un problema más difícil, que le sugiero atacar mediante simulación por computador a menos que sea realmente un mago con el álgebra de matrices. ¿Cuál es la distribución de probabilidad a largo plazo sobre las casillas del tablero de «Serpientes» y «Escalas» si usted empalma la casilla «*FINAL*» con la de partida y sigue avanzando?

LA MATRIZ MÁGICA DE MARKOV

Sea M la matriz de transición. El primer paso consiste en calcular un conjunto de cuarenta números, llamados «valores propios» de M. (Un número m es un valor propio de M si se pueden escribir cuarenta números en los cuarenta vértices de la red de modo que, cuando se divide cada uno por seis y se le deja fluir a lo largo de las seis líneas que emanan de dichos vértices en sentido de las agujas del reloj, los números resultantes son exactamente los mismos de partida. Se expresa de forma más simple en símbolos, en realidad: $Mv = mv$ para algún v). Pero hay un matiz: esos números ya no tienen que ser probabilidades (números reales entre 0 y 1) sino números complejos, expresables utilizando el número $i = \sqrt{-1}$.

A propósito, la secuencia formada por estos cuarenta números se denomina un «vector propio».

Ahora, dice Andrey Andreyevich, todo lo que hay que hacer es encontrar el valor propio más grande entre los cuarenta que se han calculado. Entonces, la distribución de probabilidad, a largo plazo, será aproximada con tanta exactitud como uno quiera por el correspondiente vector propio, «normalizado» de modo que sus entradas sumen 1, como deberían hacerlo las probabilidades genuinas. (Esto sólo quiere decir que se dividen todas las entradas por el total).

Debido a la simetría rotacional de la figura 35, no es realmente difícil encontrar los valores propios y vectores propios. En particular, un vector propio es

1/40, 1/40, 1/40, 1/40, ..., 1/40

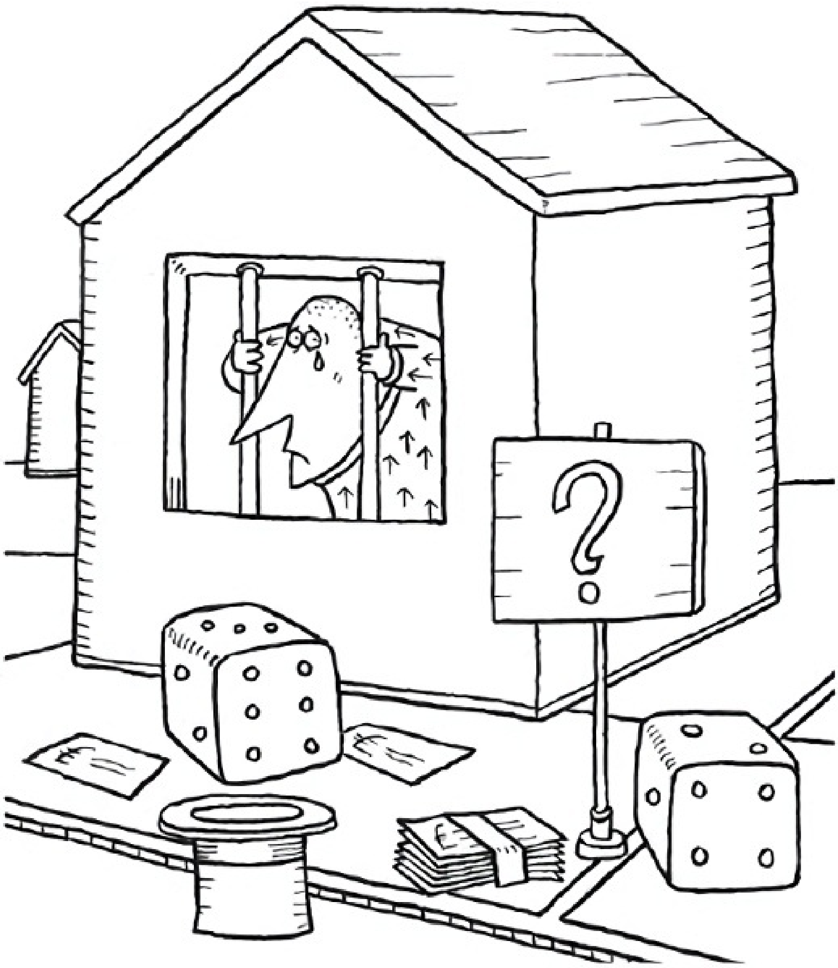
con las cuarenta entradas iguales a 1/40. ¿Cuál es su valor propio? Bien, supongamos que partimos de esta distribución, dividimos cada 1/40 en seis piezas iguales de tamaño 1/240, y las movemos a lo largo de sus seis líneas en sentido de las agujas del reloj. Cada vértice recibe exactamente seis contribuciones, una de cada uno de los seis vértices precedentes. De modo que acaba con $6 \times 1/240 = 1/40$ de nuevo. Esto es lo que un vector propio debería hacer, y en este caso el valor propio es 1.

No quiero decirle los otros 39 valores propios, cuyas expresiones son bellas para los matemáticos (solamente). Pero un cálculo muestra que son todos menores (en valor absoluto, para los puristas) que 1. De hecho, el segundo más alto tiene valor absoluto 0,964. De modo que 1 es el máximo valor propio, y su vector propio

1/40, 1/40, 1/40, 1/40, ..., 1/40

representa el estado a largo plazo de la distribución de probabilidad.

10
El Monopoly revisitado



Vamos ahora con el juego del Monopoly real, que es mucho más complicado —tanto que ni siquiera el método de la cadena de Markov puede captar todos los matices—. Pero puede mostrar que la casilla visitada con más frecuencia es «Cárcel», con una probabilidad aproximadamente doble que la de cualquier otra casilla. Y el destino menos probable es la tercera casilla «Suerte». La diversión real empieza cuando uno trata de modelar matemáticamente la compra-venta de propiedades. ¿Cuándo, y dónde, debería comprarse una casa o un hotel?

En el capítulo anterior considerábamos un modelo matemático simplificado del juego del Monopoly, y preguntábamos si la acumulación de probabilidades que es producida por cualquiera que parte de la casilla «Salida» se iguala con el tiempo. El análisis dependía de varias hipótesis simplificadoras, ignorando el resultado de sacar un doble, el efecto de la casilla «Ve a la cárcel», las cartas de «Suerte» y cosas así.

Por supuesto, éste no es un análisis del Monopoly real, y nunca pretendió serlo cuando escribí la columna en abril de 1996. Eso no impidió que airados fans del Monopoly escribieran para expresar su escándalo, con diversos grados de (des)cortesía, pero tuvo la ventaja de que los más perspicaces me enviaron sus propios análisis del juego real. De lo que informo ahora para edificación de todos, como hice en octubre del mismo año.

Usted verá pronto que los métodos que apliqué a mi versión simplificada pueden modificarse fácilmente para englobar el conjunto entero de reglas. Entonces, ¿por qué no hice simplemente eso? El juego real es demasiado lioso para dar una buena idea de las matemáticas que estoy utilizando para analizarlo, de modo que pensé que sería mejor un precalentamiento con algo más sencillo, aunque relacionado. Recordemos la idea básica: representar el juego como una cadena de Markov, una matriz de probabilidades de transición, y luego calcular los «valores propios» y «vectores propios» de dicha matriz. La teoría de Markov implica entonces que las probabilidades a largo plazo de caer en cualquier casilla dada vienen determinadas por el vector propio con el máximo valor propio.

El modelo simplificado tiene una bella simetría matemática que hace posible calcular *exactamente* los valores y vectores propios. Yo no le mostré las fórmulas, pero la simetría me permitió ilustrar un aspecto de la teoría al mostrar que el vector cuyas entradas son todas 1/40 es realmente un vector propio, con valor propio 1. Entonces afirmé que todos los valores propios restantes son menores que 1 (lo que se sigue de la fórmula exacta), dándole así el esquema de una demostración de que en el modelo simplificado las probabilidades a largo plazo son iguales para todas las casillas.

¿Es legítimo hacer este tipo de simplificación radical? En general, mi objetivo principal es mostrarle que las matemáticas son interesantes. La utilidad es una virtud secundaria, de modo que muchas cuestiones prácticas son a menudo pasadas por alto. Por ejemplo, el capítulo 4 sobre la Ley de Murphy supone que la tostada tiene un grosor nulo. La tostada real tiene un grosor definido, pero eso no implica que los matemáticos no sepan cómo es una tostada; simplemente quiere decir que en esta ocasión decidieron pasar por alto ese factor que complica las cosas. Y así es también razonable pasar por alto algunas de las reglas del Monopoly para mantener simple la historia matemática e ilustrar el papel de la simetría.

Pero no es razonable pasar por alto las reglas si uno está tratando de entender el Monopoly *real,* o si está tratando de ilustrar la utilidad de las matemáticas aplicándolas a dicho juego. Esto es lo que haremos ahora, utilizando los mismos principios pero haciendo un trabajo mucho más difícil. La descripción simplificada presentaba todos aquellos principios en un caso en el que podrían entenderse sin demasiados tecnicismos.

Recordemos que el problema consiste en calcular la *probabilidad* de caer en cualquier casilla concreta una vez que se han jugado muchos turnos y las probabilidades se han asentado en un «estado estacionario». De nuevo utilizamos el método de la cadena de Markov, pero ahora la matriz de probabilidades de transición no es tan bonita, y en lugar de calcular una fórmula exacta debemos recurrir a aproximaciones numéricas. La mayoría de los corresponsales resolvieron razonablemente el problema utilizando álgebra de computador; algunos simularon el juego para un gran número de movimientos y obtuvieron estimaciones empíricas.

Los análisis más extensos procedían de William Butler de Potsmouth RI; Thomas H. Friddell, un ingeniero de Boeing de Maple Valley WA; y Stephen Abbot del Departamento de Matemáticas del St. Olaf College, Northfield MN, quien envió un trabajo conjunto con su colega Matt Richey. Butler escribió un programa en Pascal, Friddell utilizó Mathcad, y Abbot utilizó Maple. La discusión que sigue es una síntesis de sus resultados. Todos los modelos de Monopoly® hacen algún tipo de hipótesis sobre el grado de detalle incorporado en el modelo, aunque las diferencias entre las hipótesis hechas por los diversos corresponsales eran insignificantes; así que las ignoraré.

La primera modificación de mi modelo simplificado es tener en cuenta todas las reglas para lanzar los dados. Se lanza un par de dados, y si el resultado es un doble, el jugador vuelve a lanzar; sin embargo, tres dobles consecutivos le llevan a la cárcel. El lanzamiento de los dados es una minúscula cadena de Markov en sí mismo, y puede resolverse por el método usual. El resultado es la figura 37, una gráfica de la probabilidad de avanzar cualquier distancia dada desde la posición actual. Advierta que la distancia más probable es 7, pero que es posible avanzar hasta 35 casillas (sacando 6:6, 6:6, 6:5). Sin embargo, las posibilidades de avanzar más de 29 casillas son tan pequeñas que no pueden apreciarse en la gráfica.

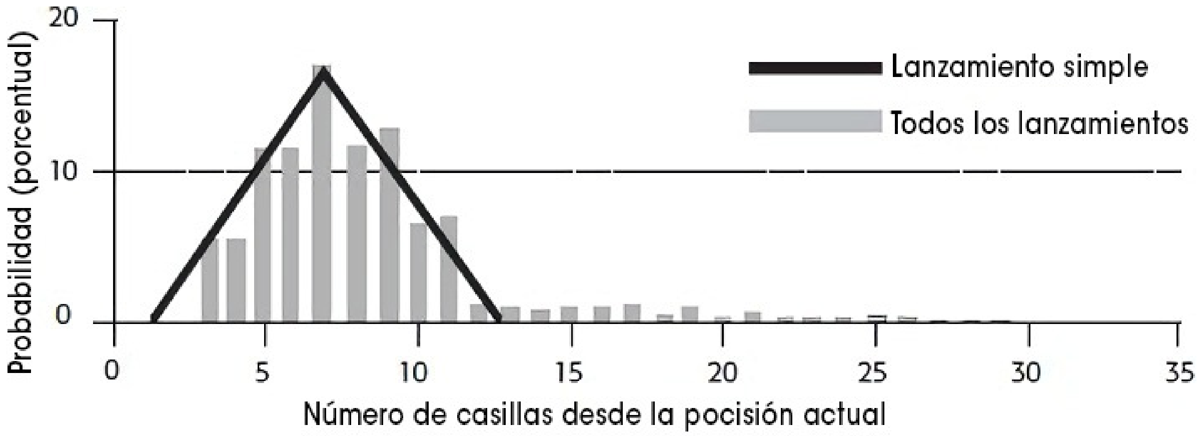


FIGURA 37. Probabilidades de avanzar un número dado de casillas en una jugada, teniendo en cuenta las reglas concernientes a los dobles.

A continuación debe incluirse el efecto de la casilla «Ve a la cárcel». Las reglas de la cárcel, dicho sea de paso, plantean un problema porque los jugadores pueden elegir entre comprar su salida de la cárcel o quedarse dentro y tratar de sacar doble seis. (O en etapas posteriores, cuando la cárcel se convierte en un refugio frente a los altos alquileres, pueden quedarse dentro y confiar en no sacar dobles). Las probabilidades asociadas con esta elección dependen de la psicología del jugador y de sus fondos, de modo que el proceso es no markoviano. La mayoría de los corresponsales evitaron esto suponiendo que el jugador no compraba su salida. Entonces «Cárcel» se convierte no tanto en una casilla única como en un subproceso de Markov: conceptualmente una serie de tres casillas donde los jugadores pasan de «Simplemente en la cárcel» a «Ya un turno en la cárcel» y a «Debe salir en el próximo turno». Por supuesto, la propia casilla «Ve a la cárcel» tiene probabilidad 0 porque nadie ocupa realmente esa casilla.

El paso siguiente es modificar la matriz de probabilidades de transición para tener en cuenta el efecto de las cartas de «Suerte» y «Caja de la comunidad», que pueden enviar a un jugador a la cárcel o a alguna otra posición del tablero. Esto puede hacerse de forma muy simple, contando qué proporción de estas cartas envía al jugador a cualquier casilla dada.

Habiendo establecido una matriz de transición aproximada, las probabilidades del estado estacionario pueden calcularse bien por una computación numérica de valores propios y vectores propios, o bien calculando el efecto de hacer un gran número de movimientos en sucesión formando potencias M^2, M^3… de la matriz de transición M. Matemáticamente, estos dos métodos son equivalentes gracias al teorema general de Markov que relaciona las potencias de M con el vector propio correspondiente al máximo valor propio.

Las probabilidades de ocupar casillas diferentes, expresadas como porcentajes y exactas hasta nueve cifras decimales, se muestras en la tabla 3 y se representan gráficamente en la figura 38. La característica más espectacular es que los jugadores tienen casi el doble de probabilidades de ocupar la casilla «Cárcel» (5,89 por 100) que de ocupar cualquier otra, siendo la siguiente más probable «Trafalgar Square» (3,18 por 100). De los ferrocarriles, «Fenchurch Street» es la más frecuentemente ocupada (3,06 por 100) con «King’s Cross» (2,99 por 100) y «Marylebone» (2,91 por 100) inmediatamente detrás; sin embargo, la probabilidad de ocupar «Liverpool Street» es mucho menor (2,44 por 100). La razón es que, a diferencia de las otras, no aparece en una carta de «Suerte». Entre los servicios públicos, «Water Works» (2,81 por 100) gana, con «Electric Company» (2,62 por 100) ligeramente menos probable. «Salida» (3,11 por 100) es la tercera casilla más probable, y la tercera casilla «Suerte» (0,87 por 100) es la menos probable —salvo «Ve a la cárcel» (0 por 100 de ocupación por necesidad lógica).

TABLA 3. Probabilidad en el estado estacionario de ocupar una casilla dada

Casilla	Probabilidad (%)
Salida	3,11380287
Old Kent Road	2,152421585
Caja comunidad	1,889769064
Whitechapel Road	2,185791454
Impuesto renta	2,350777226
Kings Cross Stn	2,993126856
The Angel Islington	2,285359460
Suerte	0,8760265658
Euston Road	2,347010651
Pentonville Road	2,330647102
Sólo visita/Cárcel	5,896419869
Pall Mall	2,735990819
Electric Company	2,627460909

Electric Company	2,627460909
Whitehall	2,385532814
Northumberl’d Ave	2,467374766
Marylebone Stn	2,918611720
Bow Street	2,776751033
Caja comunidad	2,571806811
Marlborough St	2,916516994
Vine Street	3,071024294
Aparcamiento gratuito	2,874825933
Strand	2,830354362
Suerte	1,047696537
Fleet Street	2,738576558
Trafalgar Square	3,187794862
Frenchurch St Stn	3,063696501
Leicester Square	2,679312587
Coventry Street	2,679312587
Water Works	2,810736815
Piccadilly	2,591184852
Ve a la cárcel	0
Regent Street	2,686591663
Oxford Street	2,633846362
Caja comunidad	2,376569966
Bond Street	2,510469546
Liverpool St Stn	2,445895703
Suerte	0,8715029109
Park Lane	2,202178226
Impuesto de lujo	2,195106960
Mayfair	2,646925903

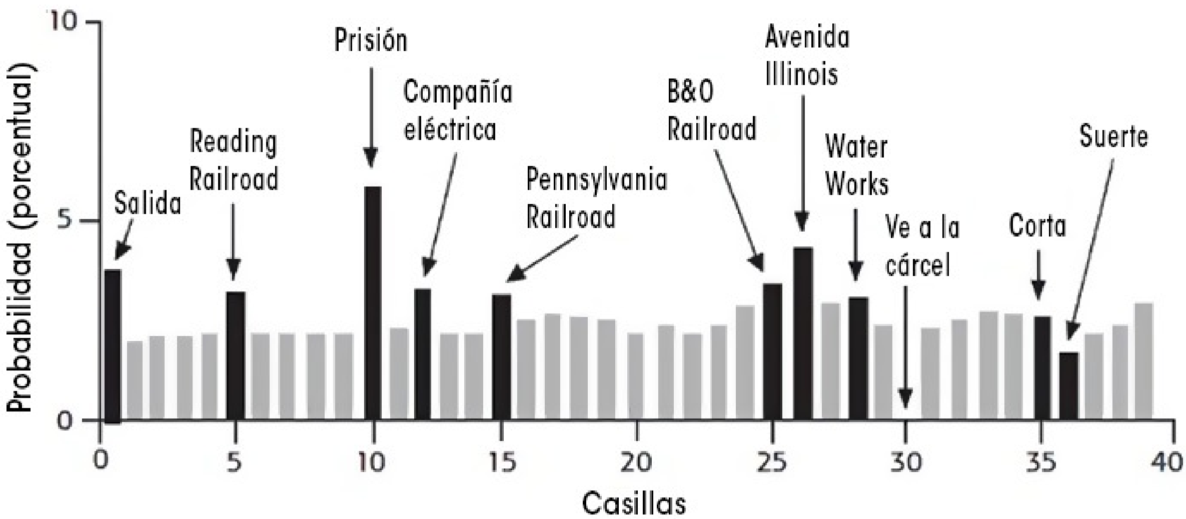


FIGURA 38. Distribución de probabilidad en el estado estacionario: las casillas del tablero están numeradas de 1 a 40 y la altura de cada barra es la probabilidad a largo plazo de ocupar la casilla correspondiente. Ver tabla 2 (más arriba) para los nombres británicos.

Friddell fue más lejos y analizó el mercado inmobiliario del Monopoly, que es lo que realmente hace el juego interesante. Su objetivo era encontrar el punto de equilibrio para la compra de casas —la etapa en la que los ingresos empiezan a superar los costes— y encontrar las mejores estrategias para comprar casas y hoteles. Las exigencias del mercado inmobiliario dependen del número de jugadores, y también de con qué versión de las reglas se esté jugando. Suponiendo que las casas pueden comprarse desde el principio —como es el caso en el «Juego Corto»—, surgen varios principios generales:

- Aunque es más caro comprar casas al principio, el punto de equilibrio se alcanzará más rápidamente si se hace.
- Con dos casas o menos se necesitan normalmente unos veinte movimientos o más para llegar al punto de equilibrio. Tres casas producen una mejora apreciable.
- Entre «Salida» y «Flett Street» la casilla de propiedad inmobiliaria que ofrecía el punto de equilibrio más rápido para tres casas es «Vine Street», al que se llega en aproximadamente diez turnos.

Las propiedades inmobiliarias más allá de «Fleet Street» no fueron evaluadas: «Friddell» dice que se detuvo allí porque nunca esperaba publicar sus resultados. He aquí una muestra de las técnicas de análisis de propiedad de «Friddell» aplicadas «Vine Street». La figura 39 muestra la probabilidad de que un jugador ocupe dicha propiedad en un turno dado. La figura 40 muestra cómo el valor total de la propiedad (valores negativos son capital desembolsado) depende del número de turnos desde que fue adquirida. Existen seis gráficas, dependiendo de cuántas casas/hoteles haya.

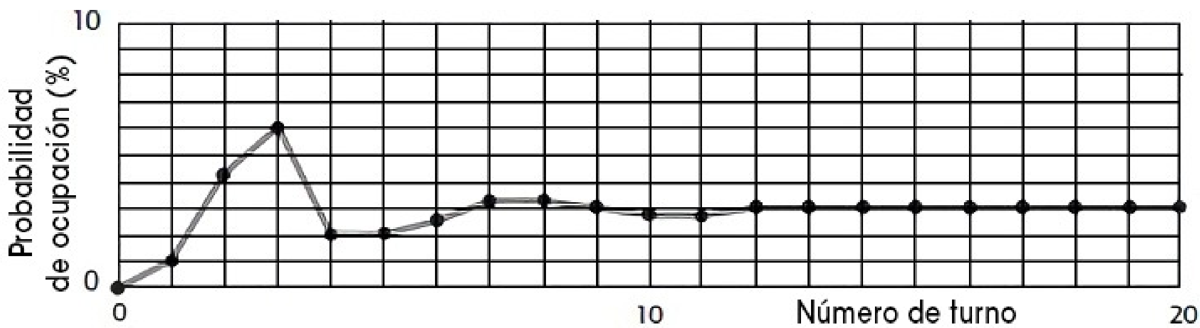


FIGURA 39. Probabilidad de ocupar «Vine Street» en un turno dado.

Muchos otros lectores aportaron interesantes observaciones y sólo puedo mencionar unos pocos. Simulaciones de Earl A. Paddon, de Maryland Heights MO, y cálculos de David Weiblen, de Freetown CI, confirmaron la pauta de probabilidades. Weiblen señala que estas probabilidades no afectan realmente a cuán «justo» o «limpio» es el juego, porque todos los jugadores se enfrentan a la misma situación. (Yo estaba pensando en «limpio» en el sentido de «moneda limpia», es decir, sin sesgo, pero vale la pena aclarar el significado y estoy totalmente de acuerdo). Desarrollando este punto, él señala que «si las recompensas por caer en casillas de baja probabilidad estuvieran desproporcionadas respecto a las de baja probabilidad, entonces habría un problema. Cuando, por un enorme golpe de suerte, un participante en un juego obtiene una gran ventaja, el juego es injusto». Pero él concluye que el Monopoly no es injusto en este sentido.

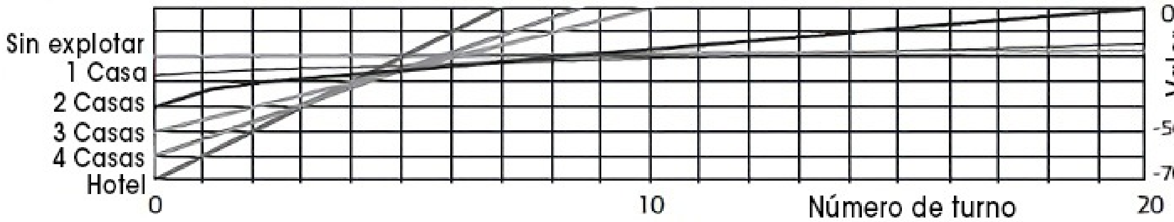


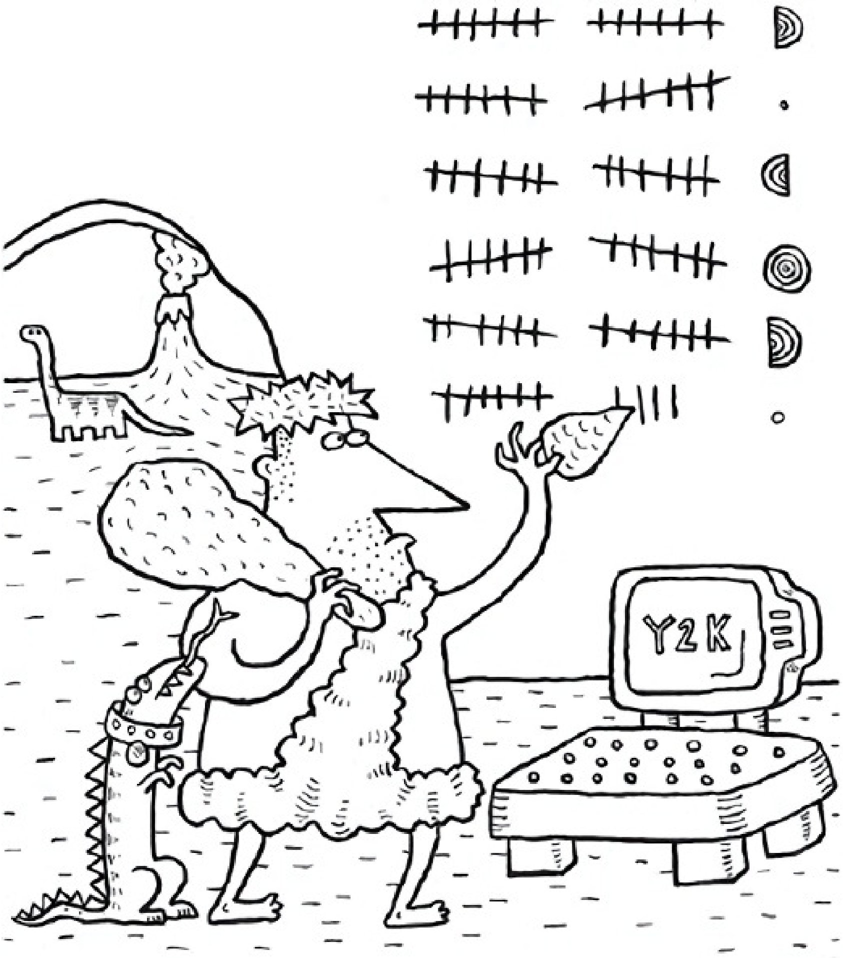
FIGURA 40. Flujo de fondos medio para las propiedades en «Vine Street».

Bruce Moskowitz, de East Setauket NY, añadió otra dimensión más al análisis observando que: «En mi juventud jugaba al Monopoly muchas veces con mis hermanos y mis amigos, y era conocimiento común que las propiedades coloreadas en marrón, St. James Place, Tennessee Avenue y New York Avenue (Bow Street, Marlborough Street y Vine Street), son especialmente valiosas porque hay una probabilidad relativamente alta de caer en una de ellas cuando se deja la Cárcel». Este análisis recibe confirmación teórica, pues estas tres propiedades figuran entre las doce primeras en la lista de probabilidades. Algunas otras propiedades tienen también probabilidades más altas de lo normal, por otras razones.

Jonathan Simon, de Cambridge MA, me reprendió por sugerir que las propiedades baratas estaban colocadas cerca del inicio para ayudar a igualar el juego. «El Monopoly… fue creado durante la Gran Depresión por un único diseñador, Charles Darrow, que presumiblemente disponía de mucho tiempo libre no deseado. Frente a todo lo que simboliza la riqueza, los hombres ricos y orondos, es (maliciosamente) un juego de pobres. En prácticamente todos los concursos de Monopoly… resulta vital "monopolizar" las propiedades "baratas". Dados los fondos limitados de cada jugador, son los grupos New York, Virginia, Connecticut (Vine Street, Northumberland Avenue, Pentonville Road), y sí, incluso el Baltic "Whitechapel Road" aquellos en los que es más viable construir al principio del juego para inclinar la balanza. Las propiedades “lucrativas”… son muy costosas de poseer y prohibitivamente costosas para construir sin una fuente de ingresos procedente de la posesión de un grupo barato con casas».

Tomo nota, aunque yo seguiría argumentando que colocar una propiedad lucrativa en la primera mitad del tablero sería decididamente injusto, por el criterio de Weiblen de que ningún jugador debería obtener una gran ventaja puramente por azar. ¡Y no estoy convencido de que comprar montones de propiedades baratas y alquilarlas sea una estrategia de pobres!

11
Una guía para datar por computador



Si usted piensa que nuestro calendario habitual, con sus curiosas reglas para los años bisiestos, es complicado, ¿qué decir del antiguo calendario hindú, basado en un ciclo de exactamente 1 577 917 500 días de longitud? ¿O del calendario chino, donde un año puede tener 12 o 13 meses? ¿Por qué hay tantos calendarios, y por qué cada uno de ellos es un compromiso? Porque un calendario en el que encajen los ciclos verdaderos de los cielos es una imposibilidad matemática.

En el año 46 a. C. el calendario romano se estaba desfasando respecto a las estaciones. Por consejo del astrónomo griego Sosígenes, Julio César introdujo un día extra cada cuatro años para hacer que la longitud media del año fuera de 365 ¼ días. La regla fue malinterpretada por sus sacerdotes, que contaban el cuarto año de un ciclo como el primero del siguiente, de modo que cada tercer año se convirtió en un año bisiesto. El error no se corrigió por completo hasta cincuenta años después. Pese a toda nuestra supuesta sofisticación no hemos aprendido nada de los sacerdotes de César, como quedó de manifiesto con la historia del «Bug del Milenio» o «Efecto 2000», según el cual la mayoría de los computadores del mundo serían incapaces de tratar con cualquier fecha posterior al 31 de diciembre de 1999, al interpretar 2000 como 1900. De hecho, la mayoría de ellos —los que utilizaban el sistema operativo más extendido— ni siquiera podían manejar satisfactoriamente la regla correcta para los años bisiestos. Llegado el momento, los aviones no cayeron del cielo un minuto después de la medianoche del 31 de diciembre de 1999, como se había predicho a los cuatro vientos. ¡Ah!, y el milenio actual comenzó el 1 de enero de 2001, y no de 2000, porque nunca hubo un año cero, pero a mucha gente le disgusta que se le recuerde.

No tenemos por qué cometer de nuevo el mismo error. Hace aproximadamente diez años, Nachum Dershowitz y Edward M. Reingold, del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, decidieron desarrollar calendarios y agendas para el editor GNU-Emacs basado en Unix. De este proyecto salió un instrumento único: un código informático para pasar de un sistema de calendario a otro. Los 14 calendarios que ellos decidieron considerar son el Gregoriano, ISO, Juliano, Copto, Etíope, Islámico, Persa, Bahá’i, Hebreo, Maya, Revolucionario Francés, Chino, Hindú antiguo e Hindú moderno. Su libro *Calendric Calculations* (véase Lecturas adicionales) es una absoluta mina de oro para los cronólogos.

Los calendarios varían de una cultura a otra porque todos ellos son intentos de realizar lo imposible: racionalizar lo irracional. Nuestras unidades de tiempo se basan en tres ciclos astronómicos distintos: el día, el mes y el año. Un *día solar medio* normal de 24 horas es el período entre ocasiones sucesivas en las que el Sol está sobre el meridiano del lugar. (Una rotación de la Tierra en torno a su eje, con respecto a las «estrellas fijas», dura 23 horas, 56 minutos y cuatro segundos; pero la Tierra también da vueltas alrededor del Sol, y necesita cuatro minutos más para que la rotación extra compense el aparente deslizamiento del Sol por el cielo). El período entre dos lunas nuevas sucesivas es el *mes sinódico medio*, que dura 29,530588853 días. El período necesario para que el Sol vuelva a la misma posición en su camino aparente es el *año tropical medio* de 365,242189 días.

Si el mes fuera de 29,5 días y el año de 365,25, entonces la Luna repetiría su movimiento exactamente cada 59 días (2 × 29,5) y el Sol cada 1461 días (4 × 365,25). De modo que cada 86,199 días (59 × 1461) el sistema constituido por la Tierra, la Luna y el Sol regresaría exactamente a la misma posición relativa. Un calendario con un ciclo de 86 199 días estaría ajustado para siempre —si ignoramos lentos cambios en las longitudes del día, el mes y el año debidos a fuerzas tales como la fricción de marea—. Por desgracia para los diseñadores de calendarios, las razones entre días, meses y años se comportan como números irracionales: no son expresables como fracciones exactas. (Al menos, no utilizando enteros pequeños: 29 530 588 853/1 000 000 000 llevaría a un ciclo impracticablemente largo). Así que, en la práctica, los ciclos lunar y solar nunca vuelven exactamente al mismo estado a exactamente la misma hora del día.

El día es fundamental para la medida del tiempo debido al ciclo día-noche, el mes lunar es importante para muchas culturas por razones religiosas, y el año determina el ciclo de las estaciones, de modo que un calendario completo tiene que incluir a los tres. En la práctica, la mayoría de las culturas optan bien por un calendario solar, y retocan los meses, o por un calendario lunar, e ignoran los problemas con las estaciones. Cualquiera que sea la elección, el diseñador del calendario debe encontrar formas prácticas de corregir los pequeños errores acumulativos, y de ahí la complicada parafernalia de días bisiestos, meses de longitud variable («Treinta días trae noviembre…»), y todo eso. Para descubrir cuán complejo puede llegar a ser esto debe usted consultar una copia de *Calendric Calculations* o visitar su página

Aquí trataré de dar una idea de su carácter único y fascinante, aunque pasando por alto muchos de sus puntos delicados.

El sistema de calendario más simple que se pueda imaginar ignoraría años y meses y numeraría días consecutivos, escogiendo algún «hito» (día de inicio) conveniente. Los astrónomos utilizan un sistema semejante, el día Juliano, pero Dershowitz y Reingold prefieren su propia invención: la «data fija» o «rata die», abreviada como RD. El día 1 del sistema RD es el 1 de enero en el año 1 del calendario gregoriano, el calendario que utilizamos ahora. No hubo año 1 real en el calendario gregoriano puesto que fue introducido en 1582 por el papa Gregorio XIII, de modo que extrapolamos hacia atrás. Ese día concreto era un lunes, lo que es conveniente puesto que podemos tomar como día 0 el domingo anterior y numerar los días de la semana de 0 a 6 empezando en domingo. *Calendric Calculations* utiliza el valor RD como sistema de referencia común: por ejemplo, para convertir una fecha del calendario hebreo en una del chino, uno convierte del hebreo a RD y luego de RD al chino. De esta manera, sólo se necesitan 28 funciones de conversión (una en cada dirección para cada uno de los catorce calendarios).

He aquí dos simples problemas a modo de precalentamiento que ejemplifican el tipo de matemáticas necesarias:

1. ¿Qué día de la semana será el 1 000 000 RD?
2. ¿Cuántos años tropicales medios completos transcurrirán entre 0 y 1 000 000 RD?

Para responder a la pregunta 1 observemos que los días de la semana forman un ciclo repetitivo de longitud siete, «enrollándose» como se muestra en la figura 41. Por consiguiente, cualquier RD que sea múltiplo de siete debe ser un domingo, cualquier RD que de un resto 1 al dividir por siete es un lunes, y así sucesivamente. Decimos que el número del día es un número módulo $7 : x \bmod 7$ significa «encontrar el resto de dividir x por 7». Puesto que $1\,000\,000 = 7 \times 142\,857 + 1$, este resto es 1 cuando $x = 1\,000\,000$, de modo que 1 000 000 RD es un lunes.

Para responder a la segunda pregunta dividamos 1 000 000 por 365,242189 para obtener 2 737,9094. Esto nos dice que 1 000 000 RD ocurre 2737 años (tropicales medios) completos después de 0 RD, un número que encontramos al omitir todo lo que hay tras la coma decimal.

Matemáticamente esto lo realiza la «función parte entera» [*x*], que es el mayor entero menor que o igual a *x*.

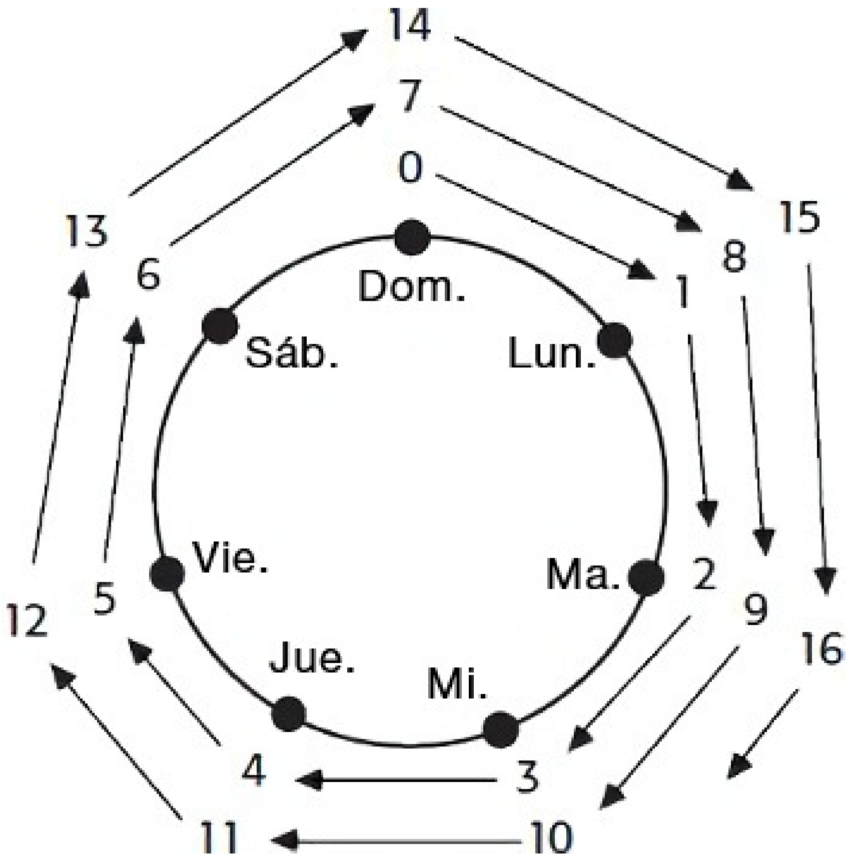


FIGURA 41. Cómo se encuentra el día de la semana contando módulo 7.

Consideremos ahora la conversión de una fecha gregoriana, tal como el 25 de diciembre de 1996, a su valor RD. Recordemos la regla del año bisiesto del papa Gregorio, que hace más precisa la longitud promedio de un año: los múltiplos de cuatro tienen un día extra el 29 de febrero, salvo que sean múltiplos de cien, aunque los múltiplos de cuatrocientos son también años bisiestos. Dershowitz y Reingold demuestran que esto lleva a la regla de cálculo que se expone en la caja. Por ejemplo, sea $M = 12$, $D = 25$, $A = 2100$. Entonces (a) = 766 135, (b) = 524 − 20 + 5 = 509, (c) = 336, (d) = −1 y (e) = 25. De modo que el valor RD del 25 de diciembre de 1996 es 766 135 + 509 + 336 − 1 + 25 = 767 004. Como una aplicación simple, el día de la semana es, por lo tanto, 767 004 mod 7 = 0, de modo que la Navidad de 1996 cayó en domingo.

Para ver la complejidad que el software en *Calendric Calculations* maneja con facilidad, consideremos el moderno calendario persa. Fue adoptado en 1925, pero su hito es el 19 de marzo de 622 d. C. —el equinoccio vernal anterior al hito del calendario islámico—. Está estrechamente basado en el más antiguo calendario Jalalai ideado por un comité de astrónomos entre los que figuraba Omar Khayyam. Hay doce meses: los seis primeros (Fravardin, Ordibehest, Xordad, Tit, Mordad, Sahrivar) tienen 31 días, los cinco siguientes (Mehr, Aban, Azar, Dey, Bahman) tienen 30, y el último (Esfand) tiene 29 en un año ordinario y 30 en un año bisiesto. La pauta de año bisiesto, tomada sin cambios del calendario Jalalai, es muy complicada. Sigue un ciclo de 2820 años, que contiene 683 años bisiestos. Los 2820 años están divididos en 21 subciclos de 128 años, seguidos por uno de 132. Cada subciclo de 128 años está dividido en subciclos de longitudes $29 + 33 + 33 + 33$; mientras que el subciclo de 132 años se divide en $29 + 33 + 33 + 37$. Finalmente, en cada subciclo los años 5, 9, 13 y así sucesivamente, yendo de cuatro en cuatro, son años bisiestos. El calendario persa tiene un error de 1,7 minutos al cabo de un ciclo de 2820 años, de modo que se necesitarían 2,39 millones de años para que se desfase un día con respecto a los ciclos astronómicos verdaderos.

ENCONTRAR EL VALOR RD DEL DÍA *D*, MES *M* Y AÑO *A* GREGORIANO

Calcular

(a) $365(A - 1)$
(b) $[(A - 1)/4] - [(A - 1)/100] + [(A - 1)/400]$
(c) $[(367M - 362)/12]$
(d) 0 si $M < 12$, −1 si $M > 2$ y A es un año bisiesto, y −2 en caso contrario
(e) D

y sumarlos.

El cálculo tiene la interpretación siguiente: (a) es el número de días no bisiestos en años previos, (b) es el número de días bisiestos en años previos (uno cada cuatro, salvo que cada cien se omite, pero se vuelve a contar cada cuatrocientos), (c) es una fórmula ingeniosa para el número de días en meses previos del año *A*, basada en la hipótesis de que febrero tiene treinta días, lo que no es cierto —de ahí el término de corrección (d)—. En el paso (e) el número *D* es, por supuesto el número de días en el mes en cuestión —los únicos días todavía no contados.

El viejo calendario lunisolar hindú sigue una pauta muy diferente. Los meses siguen estrechamente las fases de la luna, y se «intercala» un mes bisiesto adicional para mantener los meses al paso con el año solar. Sin embargo, a diferencia de la mayoría de los sistemas semejantes, el ciclo de intercalación no sigue una pauta fija y simple. La estructura global implica un ciclo que dura 1 577 917 500 días. El «año» (estrictamente el *año sidéreo ario*) es un 4 320 000 avo de esto, o 365,258 días. El *mes solar* es un doceavo de año, y hay doce meses con nombre. El mes lunar es un 53 433 336 avo del ciclo de 1 577 917 500 días, igual a 29,531 días. La idea básica consiste en manejar ambas longitudes de mes simultáneamente. Normalmente un mes lunar solapa una frontera entre meses solares, pero de cuando en cuando un mes lunar está completamente contenido en un mes solar. En ese caso, se considera un mes lunar bisiesto y se le da también su nombre al siguiente mes lunar (figura 42).

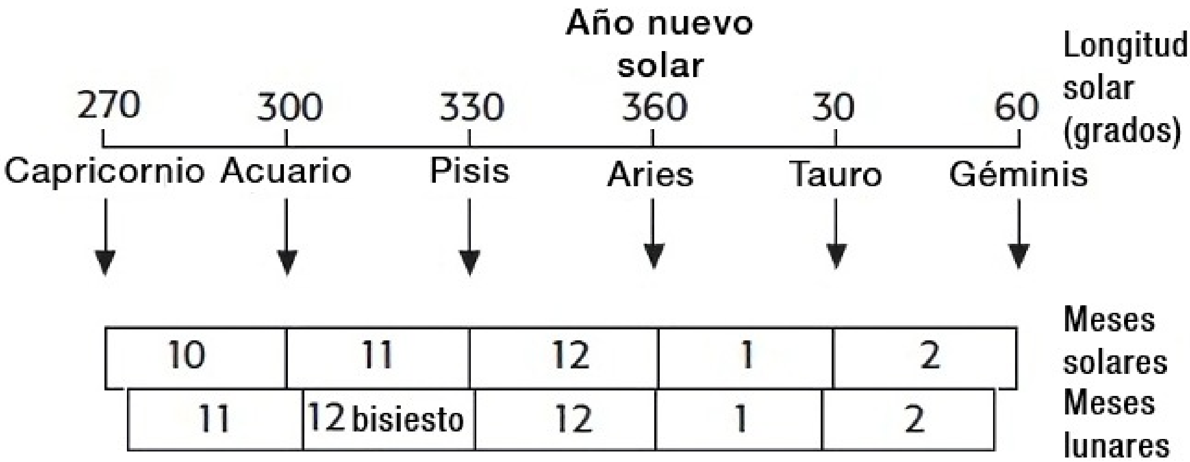


FIGURA 42. El calendario lunisolar hindú. Se añade un mes bisiesto cuando un mes lunar encaja dentro de un mes solar.

Finalmente, echemos una mirada al calendario chino, que está basado en sucesos astronómicos y no en reglas aritméticas. El calendario chino ha sido reformado al menos cincuenta veces: la versión implementada en *Calendric Calculations* es la más reciente, que data de 1645, el segundo año de la dinastía Qing. Los meses son lunares, empezando en el día de la luna nueva, y los años contienen o doce o trece meses. La disposición de los meses, sin embargo, depende del paso del Sol por los signos del Zodiaco. El año solar está dividido en doce períodos solares mayores llamados *zhongqi* y doce períodos solares menores llamados *jieqi*. Cada período corresponde a un segmento de 15° de longitud solar, empezando los mayores en múltiplos de 30° y los menores en los huecos entre aquellos. Estos períodos ocupan aproximadamente la misma época de cada año (figura 43). La regla básica que determina el calendario es que el solsticio de invierno ocurre siempre durante el undécimo mes del año. Por consiguiente, en un año que contiene sólo doce meses lunares completos los meses se numeran siempre 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. En un año que contiene trece, sin embargo, uno de los números se duplica en un mes bisiesto. ¿Cuál? Es el primer mes que no contiene un período solar mayor. (Puesto que hay trece meses lunares y sólo doce períodos solares mayores, al menos un mes debe dejar de contener un período solar mayor —una aplicación del denominado «principio del casillero»: si hay más casillas que objetos a colocar en ellas, entonces al menos una debe estar vacía—).

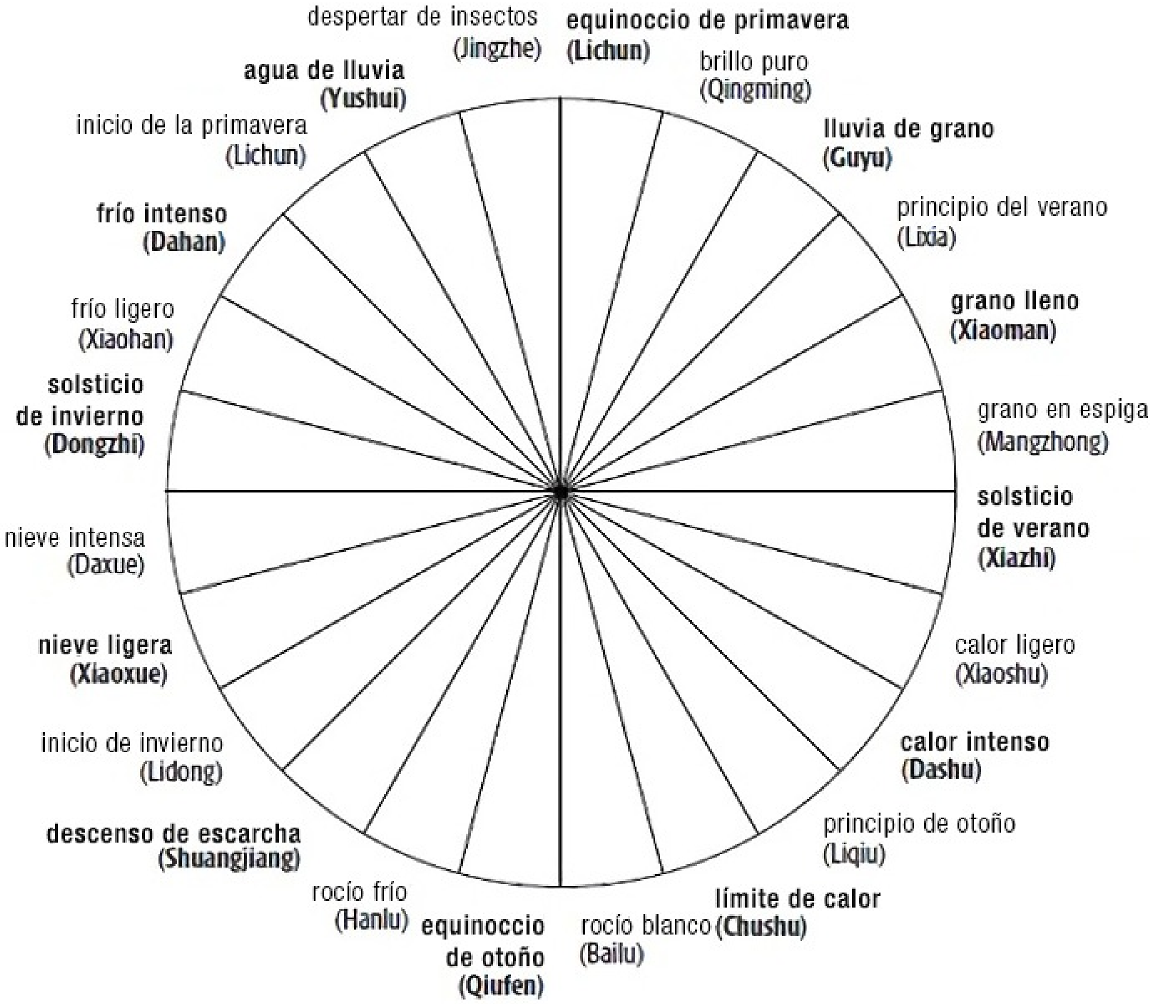
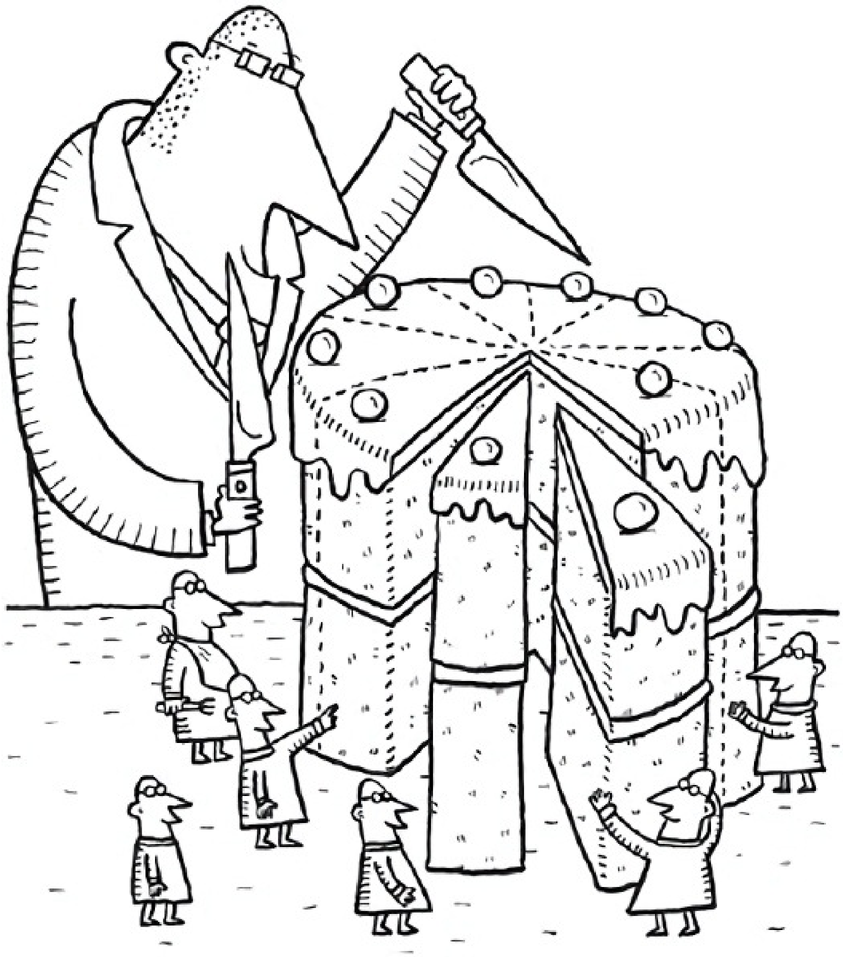


FIGURA 43. Períodos solares del año chino (períodos mayores en negrita).

Puesto que los calendarios actuales son tan complejos, ¿qué pasa con los futuros? Ahora las matemáticas que se requieren son la dinámica más las ciencias de la astronomía, física, climatología… Todos los diversos ciclos astronómicos están cambiando lentamente su longitud debido a las fuerzas gravitatorias de marea. Además, está la «precesión de los equinoccios», que no es estacionaria, sino que tiene saltos ocasionales relacionados con las eras glaciares; de modo que un calendario futuro debe estar ligado al clima. De hecho, un calendario futuro debe ser interactivo, ajustado según lo que realmente sucede, y no sólo basado en reglas preestablecidas porque los astrónomos Jack Wisdom (MIT) y Jacques Laskar (Bureau des Longitudes, París) han descubierto que el movimiento del sistema solar es caótico, de modo que si usted establece un calendario fijo para que se mantenga en fase con las estaciones, el infame «efecto mariposa» hará que se desajuste respecto a la realidad. El Día de la Independencia en 10 000 000 d. C, puede ser todavía el 4 de julio, pero nadie puede predecir a cuántos días estará eso a partir de ahora.

12
Repartiendo el botín



Repartir un pastel de forma justa entre dos personas es fácil: «Yo corto; tú escoges». Con más personas, el reparto justo es una tarea más complicada. Y lo que entendemos por «justo» es también más complicado. Uno puede tener la sensación de que ha obtenido su parte justa, pero al mismo tiempo puede tener la sensación de que algún otro obtuvo más que su parte justa. Una manera de repartir el pastel que evita este problema es un reparto «libre de envidias». Hasta hace poco tiempo sólo se conocía un método de reparto libre de envidias para dos o tres personas. Pero ahora…

Arturo el Astuto vació el saco sobre la mesa de la cocina. Berta la Bizca, Clara la Coja y Dani el Divo miraban, con los ojos fuera de las órbitas, cómo caían fajos de billetes y montones de joyas.

Ahora llegaba la parte difícil: repartir el botín. Ninguno de ellos se fiaba de los demás, y todos estaban decididos a que nadie obtuviese una parte más grande que la suya. Arturo repartió rápidamente el dinero, lo que no planteó problemas, mientras todos ponían mucha atención. Repartir las joyas iba a ser más difícil, porque cada uno de ellos tenía su propia opinión de lo que valían. Afortunadamente, muchas eran cosas como cadenas de oro, que podían cortarse en piezas si era necesario.

«Haríamos mejor en avanzar», dijo Clara nerviosamente. «La policía no debe estar lejos de nosotros y tenemos que hacer desaparecer el material».

«Yo me quedaré entonces con esa tiara de diamantes», dijo Berta, ajustándosela en la cabeza. «Entonces, Clara puede quedarse con los collares, y…».

«¡Esos collares son basura!», gritó Clara. «Yo quiero el broche de esmeraldas y el…».

«¡Callaos!», gritó Dani. «Vosotros, atajo de bandidos, nunca os pondréis de acuerdo si todo lo que hacéis es discutir. Lo que necesitamos es un método que garantice que todos quedemos satisfechos por haber obtenido la parte justa».

«Sí».

Miraron el montón de joyas surtidas.

Tres horas más tarde todavía lo estaban mirando. «Lo que necesitamos realmente —dijo Dani—, es lo que los matemáticos llaman un “protocolo de reparto proporcional libre de envidias”».

«Sí», dijo Arturo. «Seguro. ¡Eh!, Dani, ¿qué significa ese galimatías?».

«Envidia —interrumpió Clara—, es cuando una persona se queja porque algún otro ha obtenido algo que ella…».

«Yo entiendo lo que es envidia», dijo Arturo. «Me refiero a las palabras largas».

«¡Oh!, ¿de verdad?».

«Un protocolo de reparto —dijo Dani, antes de que hubiera una pelea— es un método sistemático para repartir cosas entre varias personas. Es proporcional si al final cada persona está satisfecha porque ha obtenido al menos su parte justa; y es libre de envidias si nadie piensa que algún otro ha obtenido más que su parte justa».

«¿No es lo mismo?», preguntó Berta.

«No, en absoluto», dijo Clara. «¿No tengo razón, Dani?».

Él asintió con la cabeza. «Los protocolos libres de envidias son siempre proporcionales, pero los proporcionales no tienen por qué ser libres de envidias».

«¿Por qué no?».

«Por ejemplo —dijo Dani—, supongamos que tres de vosotros os estáis repartiendo tres objetos: un brazalete, un collar y unos pendientes, digamos. En ese caso podríais evaluar subjetivamente las proporciones de esta manera:

	Brazalete	*Collar*	*Pendientes*
Arturo	**40** %	50 %	10 %
Berta	30 %	**50** %	20 %
Clara	30 %	20 %	**50** %

Se tiene un reparto proporcional si (ver los números en negrita) Arturo obtiene el brazalete, Berta obtiene el collar y Clara obtiene los pendientes. Cada uno de ellos piensa que su parte vale más del 33 por 100. Pero Arturo todavía tiene envidia de Berta porque ella obtuvo el collar, que para él es más valioso que el brazalete».

Como veremos, los protocolos libres de envidias son mucho más difíciles de conseguir que los proporcionales. También habría que tener en cuenta que junto con el protocolo hay un conjunto de estrategias, una por cada persona, que garantiza que ellos pensarán que han conseguido su objetivo. Estas estrategias no son parte del protocolo, y a menudo sólo son tácitas, pero son lo que garantiza que sea justo. Con frecuencia llamaremos a las personas «jugadores», porque es útil pensar que todo el proceso es una serie de movimientos en un juego y es costumbre representar por un pastel los valores que tienen que repartirse.

Para dos jugadores, digamos Arturo y Berta, hay un sencillo protocolo de reparto libre de envidias: «Yo corto, tú escoges». Arturo divide el botín en dos partes; Berta escoge la parte que ella quiere (figura 44).

Las estrategias que acompañan a este protocolo son:

Estrategia de Arturo: Dividir el botín al 50/50 de modo que él no puede perder sea cual sea la parte que escoja Berta.

Estrategia de Berta: Tomar la parte que a ella le parezca más grande.

La estrategia de Arturo asegura que él obtiene una parte que es al menos del 50 por 100 en su estimación; y lo mismo hace la estrategia de Berta. Por lo tanto, el protocolo de reparto es libre de envidias. Y por lo tanto proporcional, por supuesto.

FIGURA 44. Método tradicional de repartir una tarta entre dos personas.

Puesto que era idea de Dani encontrar un protocolo para repartir el botín, los otros tres ladrones le enviaron a la biblioteca de la universidad local para ver lo que podía encontrar. Pronto regresó con varios libros que, para colmo, había robado.

«¿Por qué simplemente no los pediste *prestados*, Dani?».

«Lo siento, Berta, la fuerza de la costumbre».

Dani había descubierto que esta área de las matemáticas nació en Polonia en tiempos de guerra, en la ciudad de Lvov. En 1944, mientras el ejército ruso luchaba para arrebatar Polonia a los alemanes, el matemático Hugo Steihaus buscó distracción en un acertijo. Él conocía el protocolo «Yo corto, tú escoges» para repartir un pastel entre dos personas, y sabía por qué las estrategias asociadas con dicho protocolo llevaban a cada jugador a creer que su parte era al menos la mitad. El primer jugador divide el pastel en dos partes que «en su opinión» son exactamente iguales. Si el segundo jugador discrepa, escoge la parte que piensa que es más grande. Ninguno de ellos tiene motivo de queja. Si el primer jugador no está satisfecho con el resultado final, debería haber sido más cuidadoso al hacer el primer corte; si el segundo jugador no está satisfecho, eligió la parte equivocado. Ninguno se vio obligado en ningún momento a hacer una elección que pudiera considerar injusta.

«Steinhaus —dijo Dani a Arturo, Berta y Clara—, se preguntó si se podía repartir un pastel entre tres personas: vosotros tres, pongamos por caso».

«Muy bien», dijo Arturo. «¿Quizá yo debería cortar el pastel en tres partes, que crea iguales, y luego Berta escoge una y después lo hace Clara?».

«No —protestó Berta—, eso no funciona. Clara y yo podemos pensar que una de las partes que hizo Arturo es mayor que un tercio del pastel, mientras que las otras dos son más pequeñas. Si es así, yo tomo esa parte más grande y Clara no queda satisfecha».

Dani les dijo que Steinhaus había dado con una complicada secuencia de nueve pasos cuyo resultado era que cada jugador quedaría satisfecho por haber recibido al menos un tercio del pastel. Es decir, encontró un protocolo proporcional que se explicará en un instante. Será útil cierta terminología. Decimos que un jugador piensa que una parte es «justa» si su tamaño es de un tercio (o más), «injusta» si piensa que su tamaño es menor que un tercio. «Pasar» en algún paso es no hacer nada. Por conveniencia hablamos del tamaño de las partes, pero lo que realmente queremos decir es su valor relativo tal como lo juzga el jugador interesado. Todos los juicios son subjetivos, hechos por las personas que ejecutan la acción implicada. Los enunciados entre paréntesis no son parte del protocolo, pero explican por qué funcionan: son comentarios sobre las estrategias a disposición de los jugadores para asegurar que obtienen su parte justa.

1. Arturo corta el pastel en tres partes (que piensa que son todas justas y, así, subjetivamente iguales).
2. Berta puede
    - pasar (si cree que al menos dos partes son justas) o
    - etiquetar dos partes (que piensa que son injustas) como «malas».
3. Si Berta pasó, entonces Clara escoge una parte (que piensa que es justa). Luego Berta escoge una parte (que piensa que es justa). Finalmente Arturo toma la última parte.
4. Si Berta etiquetó dos partes como «malas», entonces a Clara se le ofrecen las mismas opciones que a Berta: pasar o etiquetar dos partes

como «malas». Ella no toma en cuenta las etiquetas de Berta cuando escoge las suyas.

5. Si Clara no hizo nada, entonces los jugadores escogen partes en el orden, Berta, Clara, Arturo (utilizando la misma estrategia que en el paso 3).
6. De lo contrario, tanto Berta como Clara etiquetaron dos partes como «malas». Por lo tanto, debe haber al menos una parte que ambas consideraron «mala». Arturo toma esa parte. (Él piensa que todas las partes son justas, de modo que no puede quejarse.)
7. Se juntan las otras dos partes. (Clara y Berta piensan que el resultado de la unión es al menos 2/3 del pastel). Ahora Clara y Berta juegan a corta-y-escoge para repartir entre ellas lo que ha quedado (y con ello obtener lo que cada una juzga que es una parte justa).

«Uhhhhhh», dijo Arturo. «Eso es fuerte».

«Espera», dijo Dani. «Todavía no has visto nada». El problema es que el método de Steinaus, aunque proporcional, *no* está libre de envidias. Es posible encontrar casos donde cada jugador piensa que tiene una parte justa, pero (digamos) Clara piensa que Berta tiene una parte mayor que Clara.

Por ejemplo, supongamos que Berta piensa que la división de Arturo es justa. Entonces el protocolo se detiene tras el paso 3, y tanto Arturo como Berta consideran que las tres partes son de tamaño 1/3. Clara debe pensar que su propia parte tiene un tamaño de al menos 1/3, de modo que el reparto es proporcional. Pero si Clara ve la parte de Arturo como 1/6 y la de Berta como 1/2, entonces ella envidiará a Berta, porque Berta obtuvo primero una parte que *Clara piensa* que es mayor que la suya.

«¿Encontró Steinhaus un protocolo libre de envidias?», preguntó Clara.

«No», dijo Dani. «Él no se preocupó en absoluto sobre esa cuestión: eso vino bastante después». Arturo apretó los dientes y miró nerviosamente por la ventana. Ninguna señal de la policía todavía. «Lo que le interesaba —continuó Dani— era encontrar un protocolo para reparto proporcional entre cuatro o más personas. Y sus amigos Stefan Banach y B. Knaster pronto dieron con uno».

Supongamos que hay *n* jugadores, y llamémosles P_1, P_2,…P_n. Esta vez decimos que un jugador piensa que una parte es justa si tiene un tamaño 1/*n*, e injusta si es más pequeña. Entonces el protocolo Banach-Knaster es:

1. P_1 corta una parte (justa) *C*.
2. A P_2 se le ofrece una elección:

- pasar (si cree que C es injusta), o
- recortar C (para crear una parte justa que seguimos llamando C).
- Dejemos de lado por el momento los recortes.

3. A P_3 se le ofrece la misma elección con la nueva C; luego a P_4 se le ofrece la misma elección; y así sucesivamente hasta que cada jugador salvo P_1 ha tenido la oportunidad de recortar C si lo desea.
4. Si nadie recortó C, esta parte va a P_1. Si fue recortada, el último jugador en recortarla se queda con C. (Y la considera justa.)
5. Se vuelve a juntar el resto del pastel más los recortes. Los $n - 1$ jugadores restantes (todos los cuales consideran que ahora queda al menos $(n - 1)/n$ del pastel original) repiten el mismo procedimiento.
6. Esto continúa hasta que sólo quedan dos jugadores. Entonces éstos juegan a cortar-y-escoger.

«De nuevo, el protocolo Banach-Knaster es proporcional pero no libre de envidias», señaló Dani.

«Sí», dijo Berta. «También *difiere* del protocolo de Steinhaus cuando $n = 3$. De hecho, es más sencillo».

«Completamente correcto», dijo Dani. «Eso se debe a que introduce una nueva idea, el recorte. Y la contribución de Steinhaus ya había introducido otra idea importante: repartir parte del pastel y luego centrarse en lo que queda».

Berta se recostó en su silla y miró al techo. «Por supuesto, en nuestro problema no coincidimos necesariamente con cada uno de los demás en cuánto vale cada parte».

«Ah», dijo Dani. «Esto también era cierto para Steinhaus. Una característica clave de esta clase de problemas es que no es necesario que los jugadores coincidan en sus evaluaciones de los diversos trozos y partes del pastel. La posibilidad de diferencias subjetivas es un aspecto crucial. De hecho, como advirtió Steinhaus, el problema es generalmente *más fácil* si las personas discrepan».

«¿Por qué pasa eso? Suena muy poco probable».

«Si yo quiero la guinda del pastel y tú quieres el mazapán, Berta, entonces ambos podemos satisfacernos con bastante facilidad».

Arturo gruñó para indicar que él ya lo había entendido. «Dani, estas cosas de protocolo son un poco engorrosas. La policía podría presentarse en cualquier momento. ¿Hay algún otro método que pudiéramos utilizar?».

«Seguro. Hay pruebas de existencia matemáticas y abstractas, basadas en el denominado Teorema de Convexidad de Liapunov. Éstas nos dicen que siempre existen repartos equitativos del pastel, pero no nos dicen cómo encontrar un reparto semejante. Luego están los algoritmos de “cuchillo en movimiento”».

El siguiente, debido a L. E. Dubins y Edwin Spanier en 1961, es una muestra. Un gran cuchillo se mueve lentamente por encima y a lo largo del pastel. Los jugadores gritan «Corta» en cuanto están dispuesto a aceptar la rebanada resultante. Sin embargo, el método del cuchillo en movimiento implica un número de decisiones potencialmente infinito porque, en cada instante de tiempo, cada jugador debe decidir sí/no. De modo que no es un verdadero algoritmo. Todos los protocolos discutidos más abajo implican una secuencia discreta de decisiones.

«Así que estamos atascados con los protocolos», dijo Arturo. «Si esperamos un tiempo infinito, la policía se presentará aquí *con toda seguridad*».

«Yo no apostaría sobre eso», murmuró Clara en voz baja.

Dani le dio una patada por debajo de la mesa y siguió con su historia. «Bien. A principios de los años 60 del siglo XX, John Selfridge y John Horton Conway, independientemente, encontraron un protocolo libre de envidias para tres jugadores».

Su método circuló de manera informal entre los aficionados a las matemáticas recreativas, y finalmente se hizo público en la columna de «Juegos Matemáticos» de Martin Gardner en *Scientific American*. Es así:

1. Arturo corta el pastel en tres partes (justas).
2. Berta puede o bien:
    - pasar (si piensa que dos o más partes están empatadas como las más grandes) o
    - recortar la parte más grande (para crear tal empate). Cualquier recorte se denomina «resto» y se deja aparte.
3. Clara, Berta y Arturo, en ese orden, escogen una parte (que ellos creen que es más grande). Si Berta no pasó en el paso 2, entonces debe escoger la parte recortada a menos que Clara la escoja primero.

   [En esta fase, la porción del pastel distinta de los restos ha sido dividida en tres partes de una manera libre de envidias: un reparto parcial libre de envidias. Esto requiere una pequeña comprobación, pero es cierto.]

4. Si Berta pasó en el paso 2, no hay restos, y el reparto está hecho. Si no lo hizo, o Berta o Clara toman la parte recortada. Llamamos a esta persona el «no-cortador», y a la otra el «cortador». El cortador divide los restos en tres partes (que considera iguales).
   [Arturo tiene «una ventaja irrevocable» sobre el no-cortador, en el siguiente sentido. El no-cortador recibió la parte recortada. Incluso si, además de dicha parte, se queda con los restos, Arturo sigue pensando que el no-cortador no tiene más que una parte justa, porque Arturo pensaba que todas las partes originales eran justas. De modo que independientemente de cómo se dividan ahora los restos, Arturo no envidiará al no-cortador.]
5. Los tres trozos de restos son escogidos por los jugadores en el orden no-cortador, Arturo, cortador. (Cada uno escoge el trozo más grande entre los disponibles.)
   [El no-cortador escoge primero entre los restos, de modo que no tiene razón para ser envidioso. Arturo no envidia al no-cortador debido a su ventaja irrevocable; y no envidia al cortador porque él escoge antes. El cortador no puede envidiar a nadie puesto que era el que dividió los restos.]

«Eso está bien —dijo Arturo, cuya paciencia se estaba acabando—, pero nosotros somos cuatro, no tres». Entornó sus ojos, miró a Dani y sacó un gran cuchillo de su cinturón. «Por supuesto, podríamos arreglar eso si es necesario».

«No es necesario, te lo aseguro», dijo Dani apresuradamente. «Podría haberlo sido hace algunos años, porque en este punto se encalló el tema. Se sabía que para cuatro o más jugadores existe siempre un reparto libre de envidias, pero nadie pudo dar con un protocolo que produjera un reparto semejante en un número finito de pasos».

Clara se inclinó hacia delante. «Entonces ¿qué sucedió?».

«Intervino el divulgador de ciencia Dominic Olivastro», dijo Dani. «Él escribió una revisión del tema para la revista *The Sciences*. Steven Brams, un profesor de ciencia política en la Universidad de Nueva York que había escrito libros sobre Teoría de Juegos, leyó el artículo y quedó enganchado. Brams llevaba mucho tiempo fascinado por problemas políticos y económicos de división justa, tal como la partición de Alemania entre los Aliados al final de la segunda guerra mundial. Aquí estaba la misma cuestión planteada en forma puramente matemática».

«Brams empezó buscando un protocolo libre de envidias para tres jugadores sin darse cuenta de que Selfridge y Conway ya habían encontrado uno. Su método equivalía a los tres primeros pasos de los de aquéllos, un reparto parcial libre de envidias. Pero en lugar de su complicado método para dividir los restos, Brams utilizó simplemente el mismo método otra vez».

«Pero eso sólo crea más restos», protestó Berta.

«Cierto, pero son restos de segundo orden, mucho más pequeños que los primeros. Éstos se reparten mediante una tercera aplicación del método, y así sucesivamente».

«¿Es eso realmente un protocolo? No se detiene necesariamente después de un número finito de pasos».

«Correcto. Pero era simple y funcionaba».

«Bastante justo, supongo…».

«Estarás satisfecho con el método final, que *sí* se detiene. En cualquier caso, Brams, animado por su éxito anterior, pasó al caso de cuatro personas… y se quedó atascado».

Arturo agitó su cuchillo de forma significativa. Dani tragó saliva y siguió rápidamente. «En ese momento entró en contacto con Alan Taylor, un amigo matemático del Union Collegue, Schenectady. Taylor pensó en el problema mientras proponía un examen final a sus estudiantes, adoptando la misma actitud de que los restos no importan mucho realmente; y lo resolvió. Su solución era extraña, porque el primer paso era dividir el pastel en cinco partes, incluso si sólo había cuatro jugadores».

«Ésa es una pieza curiosa de pensamiento lateral».

«Cierto. Taylor admite que no tiene ni idea de dónde le vino». Aquí está el protocolo parcial libre de envidias de Taylor para cuatro jugadores:

1. Arturo corta el pastel en cinco partes (que piensa que son iguales).
2. Berta recorta hasta dos partes, si es necesario, para que queden tres empatadas como la más grande (en su opinión) y deja aparte los recortes.
3. Clara recorta entonces una parte, si es necesario, para que queden dos empatadas como la más grande (en su opinión).
4. Dani escoge primero, luego Clara, luego Berta, y Arturo toma la última parte que queda. Si o Clara o Berta recortaron una parte, deben escoger esa parte si está disponible cuando les llega el turno

No es difícil ver que cada jugador piensa que su parte está al menos empatada como la más grande, de modo que el reparto es libre de envidias.

«Todo eso está muy bien», dijo Arturo. «Pero no resuelve por completo el problema, ¿no es así, Dani?».

«No. El protocolo de Selfridge y Conway es finito: no continúa para siempre. Pero el poco elaborado tratamiento de los restos por parte de Brams —repetir indefinidamente— sí continúa para siempre, de modo que, estrictamente hablando, ellos no habían encontrado un protocolo genuino. Esto no preocupaba mucho a Brams (en ciencia política hay siempre cabos sueltos, y unos pocos trozos minúsculos de pastel perdido apenas importaban) pero preocupaba mucho a Taylor, el matemático. De modo que se encerró durante varios meses, asistido por dos colegas, William Zwicker y Fred Galvin, hasta que encontró una manera de reordenar la secuencia de elecciones de modo que el método siempre se detuviese, sin que quedase siquiera una miga minúscula».

Incluso para cuatro jugadores, el protocolo resultante es extremadamente complejo: recorre veinte pasos, uno de los cuales es una larga secuencia de decisiones recortar-y-escoger por parte de varios jugadores por turno. Debido a su complejidad, el método se describe en una caja separada. En dos de sus fases, el protocolo implica escoger un número que está relacionado con las estimaciones subjetivas que hacen los diversos jugadores de los tamaños relativos de las partes, de modo que el número de pasos depende de las preferencias exactas. Cualquiera que sean las preferencias, el número de pasos es finito, pero puede hacerse de la longitud que queramos si se establecen las preferencias iniciales de forma apropiada. Nótese que, a diferencia del reparto parcial originalmente encontrado por Taylor, empieza de forma más convencional con una división en cuatro partes. Sin embargo, su nueva idea de utilizar más partes que jugadores surge varias veces, y su protocolo original de cinco partes se manifiesta en su totalidad en una larga secuencia en la que los restos son subdivididos repetidamente.

Arturo, Berta, Clara y Dani empezaron a trabajar con el protocolo Brams-Taylor. Al cabo de unas dos horas, la mesa estaba cubierta con hojas de papel y largos cálculos garabateados. Arturo estaba mirando una sola esmeralda grande.

«Creo que tenemos que cortar esto en doce partes», dijo, mirando a Dani.

«Sí, bueno; el protocolo está bien para pasteles, por supuesto, y alguna otra cosa que pueda subdividirse fácilmente tanto como se quiera». Vio la mirada en el rostro de Arturo. «Uhmmm, el problema con trozos que no pueden subdividirse es mucho más difícil, y puede no tener soluciones». Gritó asustado. «Uhmmm, Arturo, Fede el Flaco podría cortar esa esmeralda en un abrir y cerrar de ojos…».

«Yo no quiero a Fede el Flaco mezclado en esto», dijo Arturo. «Has perdido un tiempo precioso, Dani, y no me gusta eso. La policía puede estar ahora tras nosotros, y si lo están, es todo por tu…».

Se detuvo. En la distancia oyeron el sonido de una sirena.

Se hizo más intenso.

Arturo se volvió hacia Berta y Clara. «Creo que es momento para un reparto desproporcionado libre de clemencia». Apuntó su cuchillo a Dani. «¿Corto?».

«Sí. Y nosotros escogeremos», dijo Berta.

EL PROTOCOLO DE BRAMS-TAYLOR PARA CUATRO JUGADORES

1. Berta corta el pastel en cuatro partes (justas) y pasa una a cada jugador.
2. A Arturo, Clara y Dani se les pregunta por turno si tienen objeciones a este reparto (lo que hacen si tienen envidia de otro jugador).
3. Si nadie objeta, alto.
4. De lo contrario, trabajamos con el primer jugador en objetar. Supongamos (por la elección de nombres) que es Arturo. Arturo escoge una parte que él envidia y la llama A; su parte original se llama B. Tras escoger A y B, el resto del pastel es reunido para consideración posterior.
5. Arturo elige un número entero $p \geq 10$. (Este p se elige de modo que tenga la curiosa propiedad siguiente. Supongamos que A se subdivide, de cualquier manera, en p partes. Luego Arturo prefiere A a B, incluso si se eliminan las 7 partes más pequeñas. Puede conseguir esto tomando $p > 7a(a - b)$ donde a es su evaluación de A, y b su evaluación de B.)
6. Berta divide cada uno de los A y B en p partes (que piensa que son iguales).

7. Arturo escoge las tres partes (más pequeñas) de *B* y las llama S_1, S_2, S_3. También hace una de estas dos cosas:

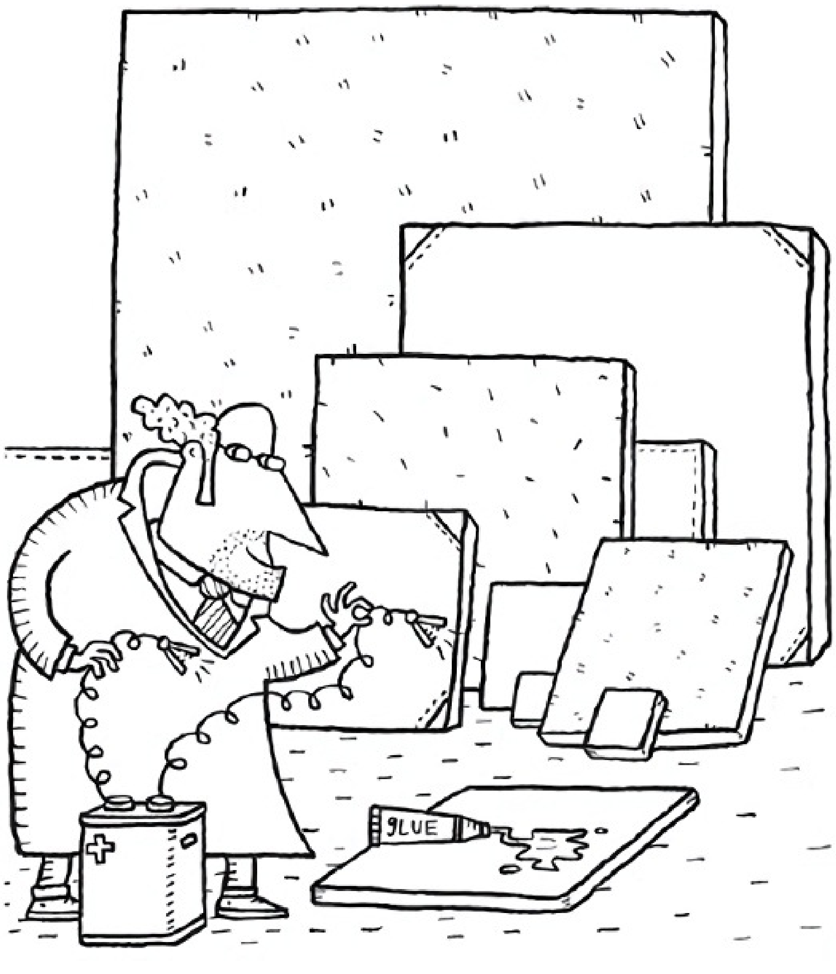
    - escoge tres partes (las más grandes) de *A* (si piensa que éstas son estrictamente más grandes que todas las 5) y recorta como máximo dos de ellas (al tamaño de la más pequeña entre esas tres), o
    - subdivide una de las partes (la más grande) de *A* en tres trozos (iguales).
    - Haga lo que haga, llama a dichos trozos T_1, T_2, T_3
    - Clara toma los seis *S* y *T*, y o bien
    - pasa (si piensa que ya hay dos empatadas como la más grande) o
    - recorta una (la más grande) para crear tal empate.

8. Dani, Clara, Berta y Arturo, en ese orden, escogen una parte de entre las seis *S* y *T*, modificada como en el paso 8 (que piensan que son más grandes o están empatadas como las más grandes). Clara debe tomar la parte que ella recortó si está disponible. Berta debe escoger un *S*; Arturo debe escoger un *T*. En esta etapa hemos conseguido un reparto parcial libre de envidias, con un montón de restos, en el que Arturo piensa que su parte es estrictamente mayor que la de Berta —digamos que en una cantidad *x*.
9. Arturo elige un número entero *q* (escogido de modo que $(4R/5)^q < x$, donde *R* es la evaluación que hace de Arturo de los restos). Elegir *q* por adelantado impide que la fase siguiente continúe indefinidamente.
10. Arturo corta los restos en cinco partes (una reliquia de la idea original de Taylor).
11. Berta recorta dos partes, si es necesario, para crear un triple empate para la más grande (en su opinión) y deja los recortes aparte.
12. Clara recorta luego una parte, si es necesario, para dejar sólo dos empatadas como la más grande (en su opinión).
13. Dani escoge primero, luego Clara, luego Berta, y Arturo toma la última parte que queda. Si Clara o Berta recortaron una parte, deben escoger dicha parte si está disponible cuando les llega el turno.

14. Los pasos 11-14 se repiten $q - 1$ veces, trabajando cada vez con los «restos» del ciclo anterior.
    Al final de este ciclo de subdivisiones, tenemos un reparto parcial libre de envidias, en el que Arturo tiene una ventaja irrevocable sobre Berta: él piensa que su parte es más grande que la de ella más todos los restos. Ahora creamos una lista de pares ordenados de jugadores, la lista de ventajas irrevocables, escribiendo el par (Arturo-Berta). Esto nos recuerda que Arturo tiene una ventaja irrevocable sobre Berta.
15. Berta corta los restos en doce partes (iguales).
16. Cada uno de los otros tres jugadores se declara «pro» si piensan que todas estas doce partes son del mismo tamaño, o «con» si no lo hacen.
17. Si todo «pro» tiene una ventaja irrevocable sobre todo «con» (ver la lista) entonces damos las doce partes a los «pro», recibiendo cada uno un número igual, y nos detenemos.
    (Ésta es la razón de que utilicemos 12: es divisible por 1, 2, 3 y 4.)
18. Si no, escogemos el primer par («pro», «con»), donde no hay tal ventaja irrevocable, y volvemos al paso 4 con el jugador «pro» en el papel de Arturo, el «con» en el papel de Berta y los restos en lugar del pastel.
19. Repetimos los pasos 5-18 hasta que (después de como máximo quince ciclos) cada par («pro», «con») está en la lista de ventajas irrevocables: el ciclo se detiene entonces en el paso 18.

Para una demostración completa de que esto funciona, ver el artículo de Brams y Taylor que aparece en Lecturas adicionales.

13
Cuadrando el cuadrado



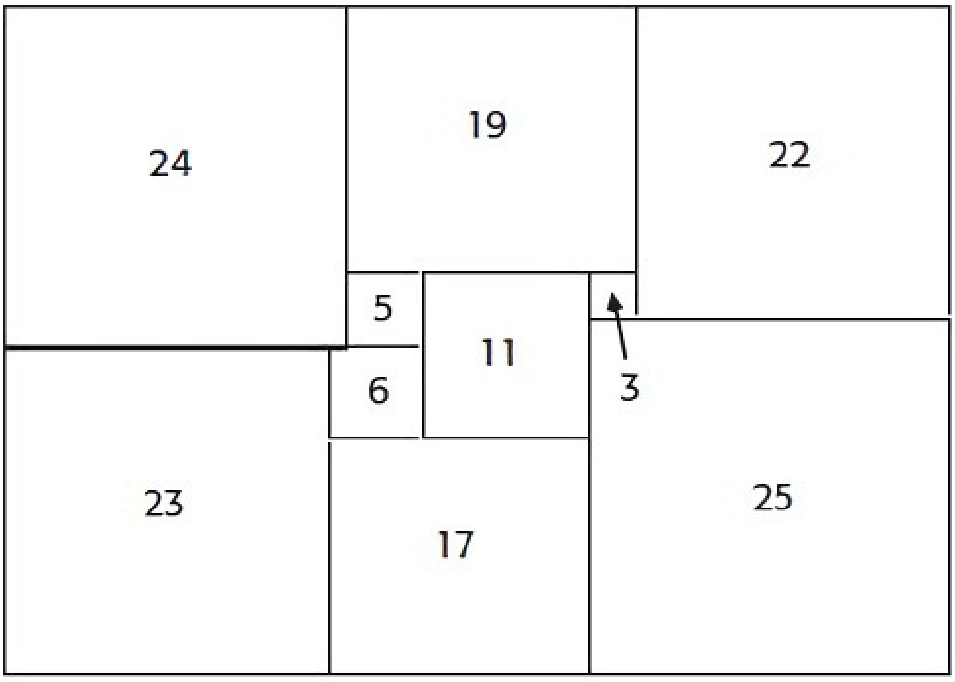
El problema de la cuadratura del círculo se remonta a los antiguos griegos, pero el de la cuadratura del cuadrado es considerablemente más reciente. ¿Se puede teselar un cuadrado utilizando teselas cuadradas? Fácil, podría decir usted: consideremos un tablero de ajedrez donde 64 cuadrados pequeños teselan uno grande. Sin embargo, hay una condición extra: todas las teselas deben ser de tamaños diferentes. Así que ¿cómo resolverlo? ¡Utilizando la teoría de circuitos eléctricos, naturalmente!

¿Se puede teselar un cuadrado utilizando teselas cuadradas, todas ellas de diferentes tamaños? Parece fácil: basta con experimentar. Pero hay demasiadas posibilidades para estar seguro de que se han probado todas, y muy pocas configuraciones funcionan. Se necesita algo más sistemático. El primer resultado importante sobre esta cuestión se remonta a 1903, y la respuesta definitiva no llegó hasta 1939. El trabajo posterior ha impuesto requisitos adicionales sobre la teselación y ha ampliado el problema a formas distintas del cuadrado. Quedan muchas cuestiones abiertas para ser investigadas por el matemático recreativo.

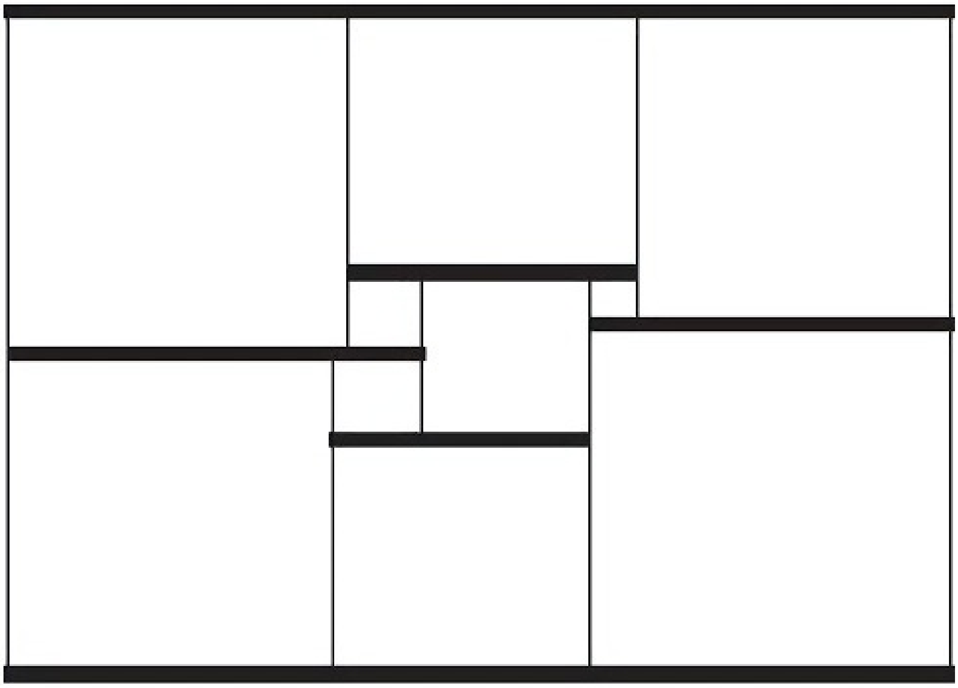
En 1903, Max Dehn demostró que si un rectángulo es teselado por cuadrados, ya sean diferentes o no, entonces los tamaños de las teselas, y el del propio rectángulo, son conmensurables; es decir, múltiplos enteros de un mismo número. En otras palabras, si escogemos una unidad de medida apropiada, todos los lados son números enteros. Desde entonces, este teorema ha sido demostrado de al menos una docena de formas diferentes —todas ellas muy ingeniosas, porque no es en absoluto un resultado obvio.

Decimos que un rectángulo o un cuadrado es *cuadrado* si puede ser teselado mediante teselas cuadradas distintas. En 1909, Z. Morón descubrió el primer rectángulo 33×32 cuadrado, utilizando nueve teselas cuadradas de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 y 18. También consiguió teselar un rectángulo 65×47 con diez teselas cuadradas de lados 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 y 25 (figura 45a). Quizá quiera usted construir el conjunto de nueve cuadrados y ensayar este rompecabezas: para la respuesta, ver *Unsolved Problems in Geometry* (véase Lecturas adicionales).

(a)



(b)



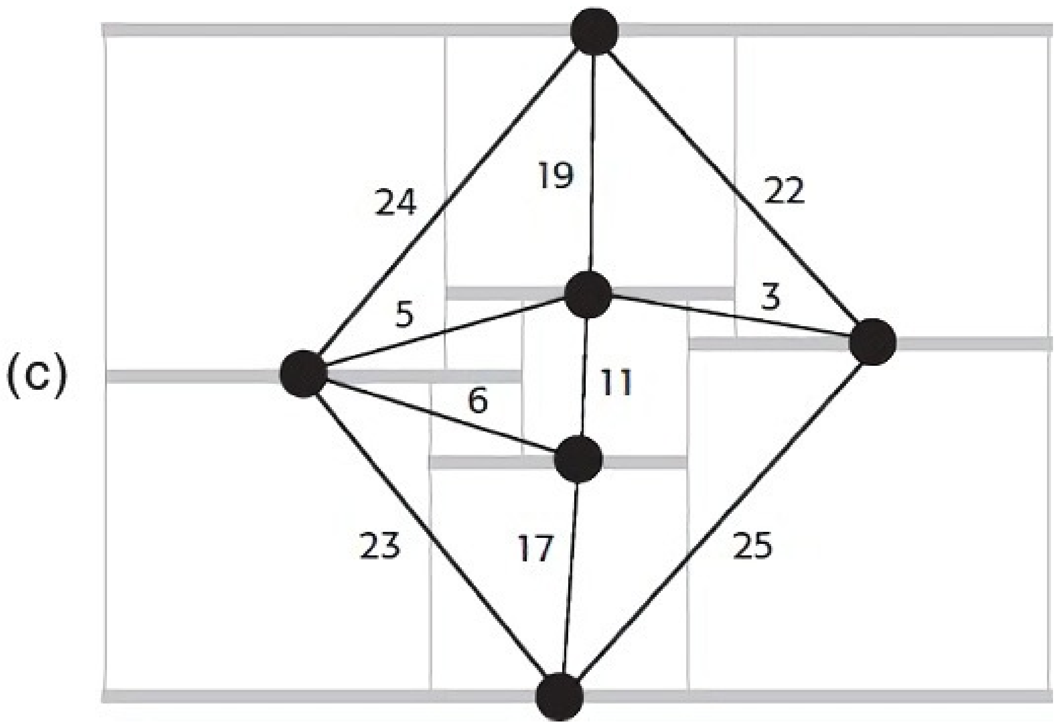


FIGURA 45

(a) Rectángulo de diez teselas de Morón.
(b) Sus segmentos horizontales.
(c) Su Diagrama de Smith: asocia un nodo con cada segmento, y una arista con cada tesela, y etiqueta la arista con el tamaño de la tesela. La corriente fluye hacia la parte inferior de la página.

El problema del «cuadrado cuadrado» fue resuelto en 1939 por R. Sprague, con una teselación que utilizaba 55 teselas cuadradas diferentes. Sin embargo, carecía de elegancia en un aspecto: era *compuesta*, lo que significa que contenía un rectángulo cuadrado más pequeño. Se dice que las teselaciones que no incluyen ningún rectángulo cuadrado son *simples*, y los cuadrados cuadrados con esta propiedad extra son más difíciles de encontrar.

En 1940, R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone y W. T. Tutte (véase Lecturas adicionales) descubrieron el primer cuadrado cuadrado simple. Su método ha sido descrito de forma entretenida por Martin Gardner en *More Mathematical Puzzles and Diversions* (véase Lecturas adicionales). Empezaron representando la estructura de cualquier rectángulo cuadrado mediante una red, conocida como su Diagrama de Smith. Cada línea horizontal en el rectángulo cuadrado corresponde a un nodo de la red, y cada tesela componente corresponde a una arista. Dicha arista une los dos nodos correspondientes a las líneas horizontales que recorren las partes superior e inferior de la tesela, y las aristas se etiquetan con el tamaño de dicha tesela. La figura 45b muestra su Diagrama de Smith.

Es de destacar que si se supone que cada arista del Diagrama de Smith es un cable de resistencia unidad, y se interpretan las etiquetas numéricas como corrientes eléctricas que fluyen a través de los cables (medidas, por ejemplo, en amperios y en dirección hacia la parte inferior de la página), entonces todo el diagrama forma un circuito eléctrico que obedece a las usuales «Leyes de Kirchhoff» de la ingeniería eléctrica. En particular, la cantidad total de corriente que entra en cualquier unión debe ser igual a la cantidad total que sale. Esto se sigue fácilmente de la geometría de la teselación. Por ejemplo, consideremos la línea horizontal a lo largo del lado inferior del cuadrado 19. Una corriente de 19 entra, y $5 + 11 + 3 = 19$ sale. Estos dos números son iguales porque la línea es también la parte superior de los cuadrados de tamaño 5, 11 y 3.

Utilizando ideas de la teoría de circuitos eléctricos, los cuatro matemáticos desarrollaron métodos sistemáticos para construir y analizar rectángulos cuadrados con el objetivo final de encontrar un cuadrado cuadrado simple. El primer avance crucial llegó de forma inesperada. Brooks había encontrado un rectángulo cuadrado 112×75 con 13 teselas (figura 46a) y estaba tan satisfecho por ello que construyó un «rompecabezas» a partir de las teselas. Su madre intentó resolver el rompecabezas y lo consiguió, pero su solución (figura 46b) era diferente de la de Brooks. Nunca antes el equipo de matemáticos se había encontrado con un fenómeno semejante: un conjunto de teselas cuadradas que teselaban el mismo rectángulo de dos maneras diferentes. En lo que sí confiaban era en encontrar dos rectángulos cuadrados del mismo tamaño que no tuvieran tamaños de teselas comunes, porque entonces sería fácil encajarlas, con dos cuadrados extra, para formar un cuadrado cuadrado (figura 47). Sería un cuadrado compuesto, pero sería un inicio. (En ese momento, Sprague no había publicado aún su descubrimiento).

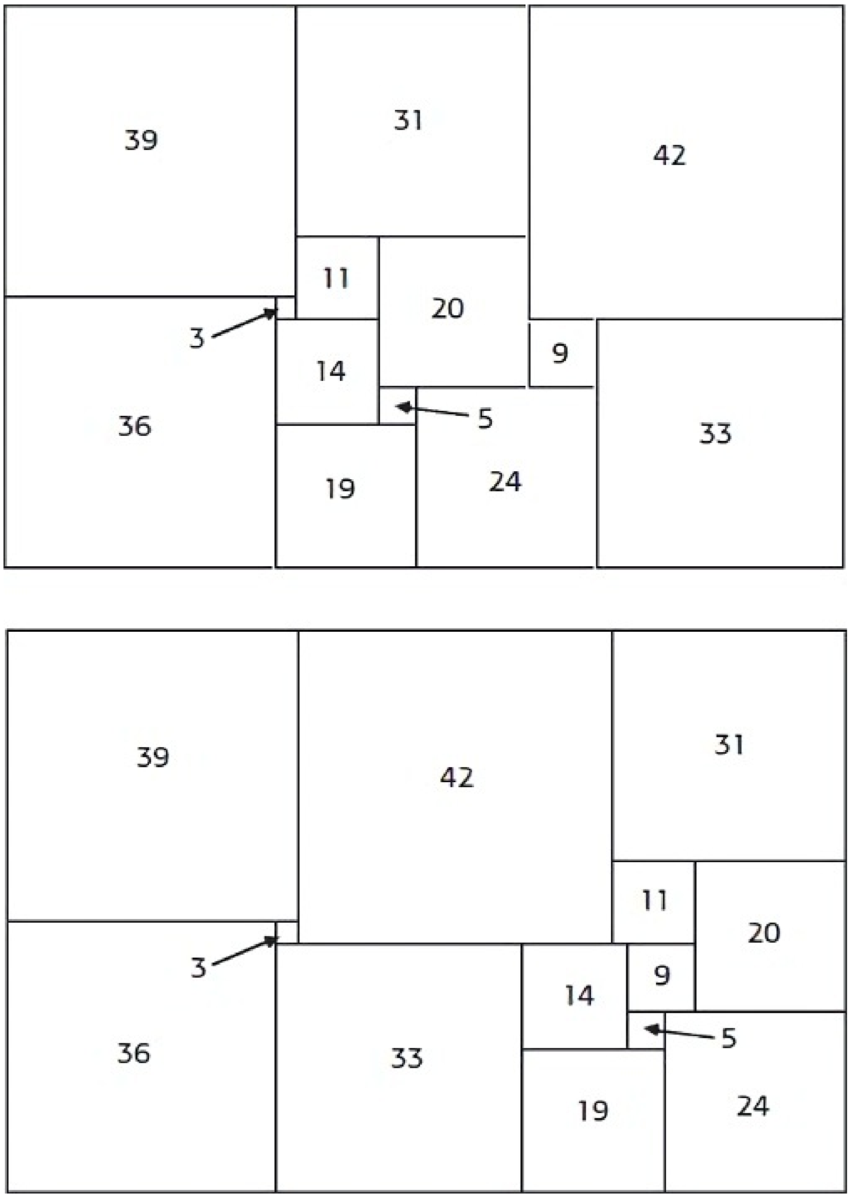


FIGURA 46

(a) Rompecabezas del rectángulo de Brooks.
(b) La solución diferente que encontró su madre.

El rectángulo de Brooks podía ciertamente ser teselado de dos maneras, pero puesto que en ambas ocasiones se utilizaba el mismo conjunto de teselas, el rectángulo de Brooks no conduciría a un cuadrado cuadrado. De todas formas, ellos confiaban en que si llegaban a comprender por qué el rectángulo de Brooks podía ser teselado de dos maneras, podrían obtener una visión útil del problema. Al considerar el Diagrama de Smith de las dos teselaciones se dieron cuenta de que podían obtener un diagrama a partir de otro si «identificaban» dos nodos, es decir, los consideraban idealmente como el mismo. Además, el flujo de electricidad a través del circuito no se veía afectado por «cortocircuitar» el diagrama de esta manera porque, en este caso particular, los dos puntos que se identificaban estaban al mismo potencial eléctrico. Con algún esfuerzo calcularon por qué era así: estaba relacionado con las simetrías en el Diagrama de Smith. A partir de esta clave desarrollaron otras maneras de retocar los Diagramas de Smith, produciendo diferentes rectángulos cuadrados del mismo tamaño pero con menos tamaños de teselas en común. Finalmente este enfoque dio resultado y les llevó a un simple cuadrado cuadrado formado a partir de 69 teselas. Con un esfuerzo adicional, Brooks redujo el número de teselas a 39.

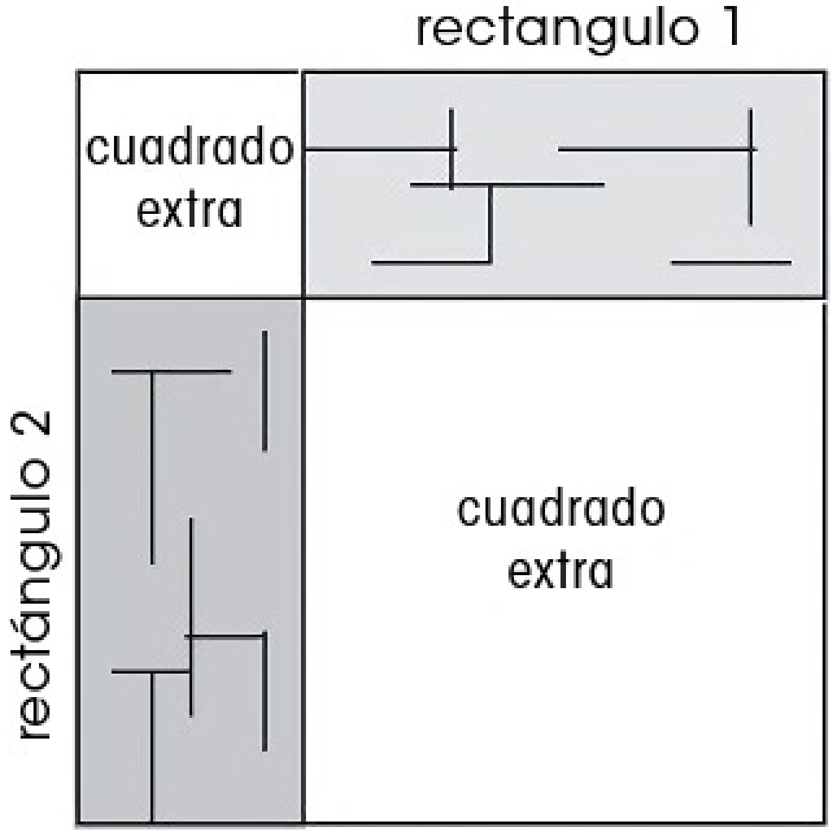


FIGURA 47. Cómo combinar dos rectángulos cuadrados para obtener un cuadrado cuadrado, con tal de que los rectángulos no tengan teselas de tamaño común.

En 1948, T. H. Willcocks redujo aún más el número de teselas, al encontrar un cuadrado cuadrado con 24 teselas. Pero su cuadrado no era simple. Mientras tanto, J. W. Bouwkamp y colegas estaban catalogando todos los posibles rectángulos cuadrados con hasta quince teselas: encontraron un total de 3663. En 1962, A. W. J. Duivestijn demostró que cualquier cuadrado cuadrado simple debe contener al menos 21 teselas; en 1978 había encontrado un cuadrado semejante, y demostró que era el único (figura 48). En 1992, Bouwkamp y Duivestijn publicaron 205 cuadrados cuadrados simples con entre 21 y 25 teselas —todas ellas cuadrados, de hecho.

Aunque estos resultados despachan básicamente el problema de cuadrar cuadrados, existen innumerables variantes. ¿Qué pasa con los dominós cuadrados, es decir, rectángulos con un lado doble de largo que el otro? Existe una forma trivial de cuadrar un rectángulo semejante: empezar con un cuadrado cuadrado y añadirle luego una tesela cuadrada adicional del tamaño del cuadrado cuadrado entero. Pero ¿existen formas *no* triviales? ¿Qué pasa con un rectángulo con un lado tres veces más largo que el otro?

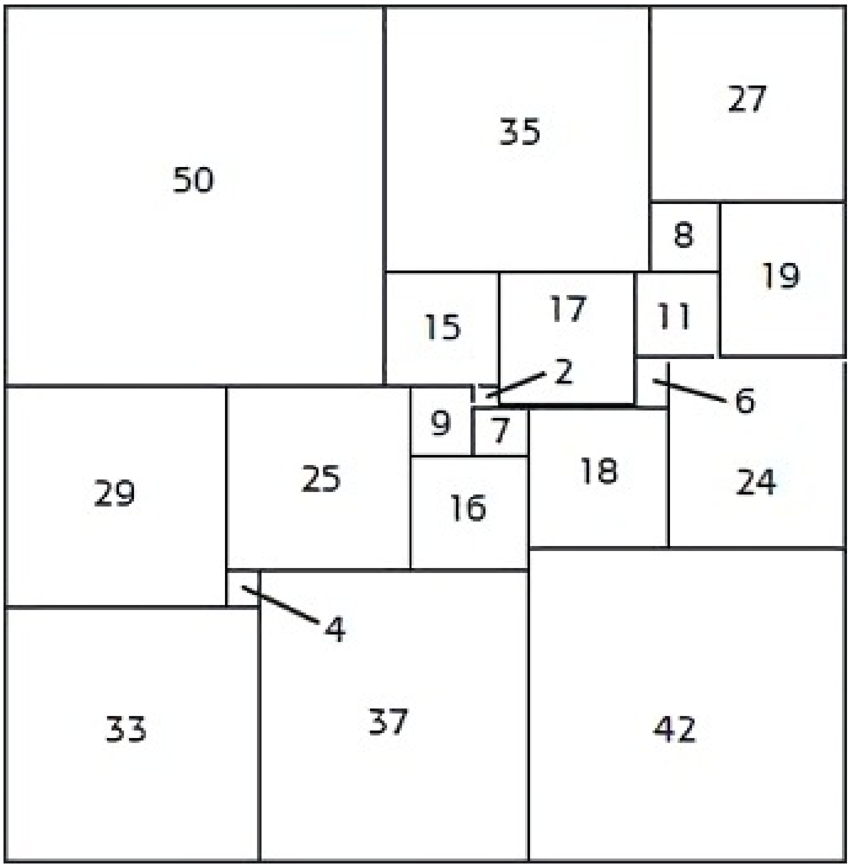


FIGURA 48. El único cuadrado cuadrado con el mínimo número de teselas.

Otra ampliación del problema consiste en teselar superficies distintas de cuadrados y rectángulos, una opción discutida por David Gale en *The Mathematical Intelligencer* (véase Lecturas adicionales). Los topólogos saben que se pueden construir varias superficies interesantes identificando aristas opuestas de rectángulos — «empalmándolas», al menos en la imaginación—. Tomemos un rectángulo y empalmemos dos aristas opuestas: obtenemos un cilindro. Demos al rectángulo medio giro antes de empalmarlo, y obtenemos una banda de Möbius. Empalmemos ambos pares de aristas opuestas, sin giros, y el resultado es un toro (una superficie en forma de rosquilla, con agujero y todo). Empalmemos ambos pares de aristas opuestas, dando medio giro a un par, y obtenemos una botella de Klein (una famosa superficie de una cara que no puede formarse en el espacio tridimensional sin cortarse a sí misma). Demos medio giro a ambos pares, y obtenemos un plano proyectivo (también de una cara e imposible de representar en tres dimensiones).

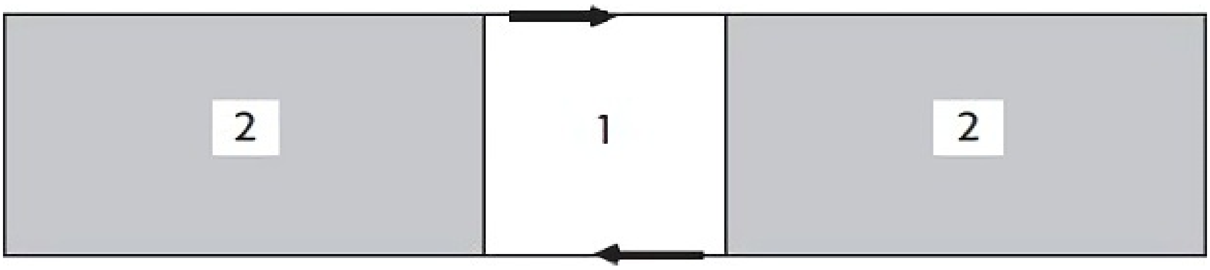


FIGURA 49. Cuadrando una banda de Möbius con dos teselas.

Evidentemente, con cualquiera de estas maneras de empalmar los bordes del rectángulo cualquier teselación del rectángulo lleva a una teselación de la superficie resultante. Pero la superficie puede poseer teselaciones adicionales, porque las teselas en la superficie pueden atravesar los bordes pegados. Por ejemplo, la figura 49 muestra una banda de Möbius teselada con sólo *dos* cuadrados, de lados 1 y 2 respectivamente. Las flechas marcan los lados que hay que empalmar; las direcciones de las flechas muestran los giros. Aunque en la imagen parece que el cuadrado de lado 2 está dividido en dos rectángulos, estas piezas se unen cuando se empalman los bordes. Sin embargo, esta teselación de la banda de Möbius tiene una característica bastante fea: la tesela pequeña tiene una frontera común consigo misma. Sus bordes superior e inferior se empalman, de modo que realmente es una banda de Möbius en sí misma, no un cuadrado. En 1993, S. J. Chapman encontró una teselación de la banda de Möbius sin esta característica molesta, utilizando cinco teselas (figura 50). No existe ninguna teselación semejante con menos teselas.

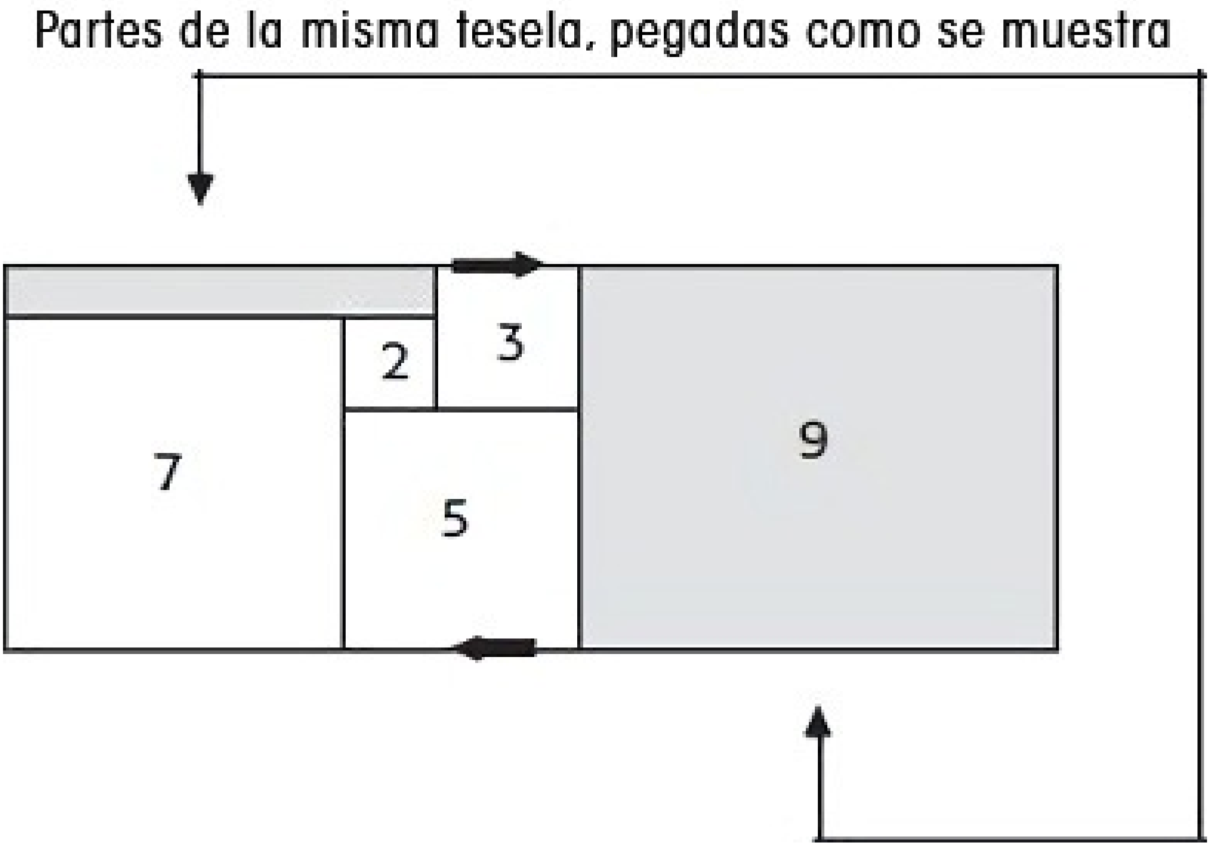


FIGURA 50. Cuadrando una banda de Möbius utilizando teselas cuyos contornos no se cortan.

Un cilindro puede cuadrarse, pero esto requiere al menos nueve teselas —igual que para los rectángulos—. Las cuadraturas «triviales» simplemente toman rectángulos de Morón y unen bordes apropiados; pero hay también dos cuadraturas no triviales de nueve teselas. Sus teselas son del mismo tamaño que las de Morón, pero la disposición es diferente (figura 51).

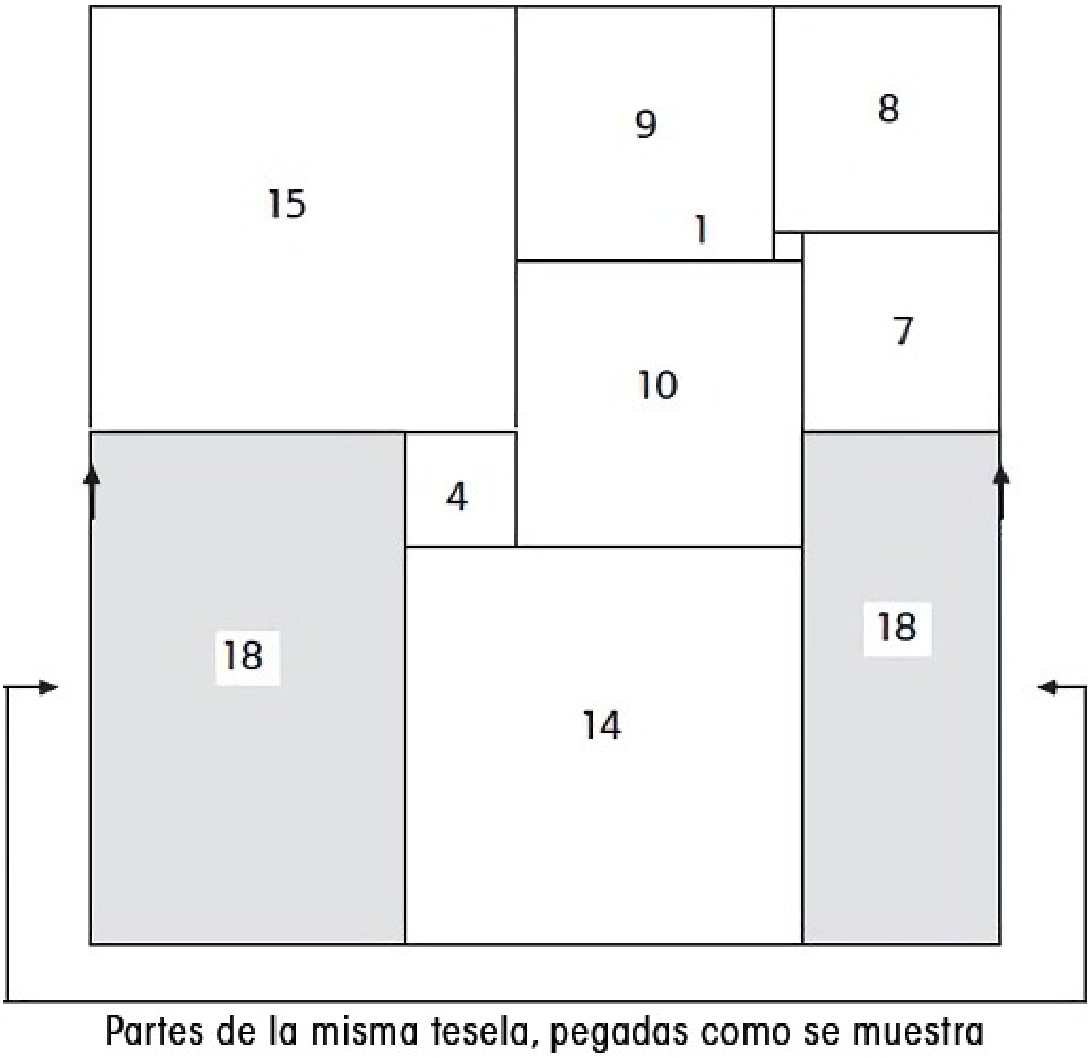


FIGURA 51. Cuadratura no trivial de un cilindro.

En el caso del cilindro y la banda de Möbius los bordes de las teselas tienen que ser paralelos a los de la superficie. Sin embargo, el toro, la botella de Klein y el plano proyectivo no tienen bordes, de modo que idealmente las teselas podrían colocarse formando un ángulo. De hecho, si se hace esto, un toro puede ser teselado con sólo dos teselas cuadradas (figura 52) con tal de que permitamos que se corten dos bordes de la misma tesela. (Como premio adicional, hay una demostración del Teorema de Pitágoras oculta en esta imagen: ¿puede usted ver por qué?).

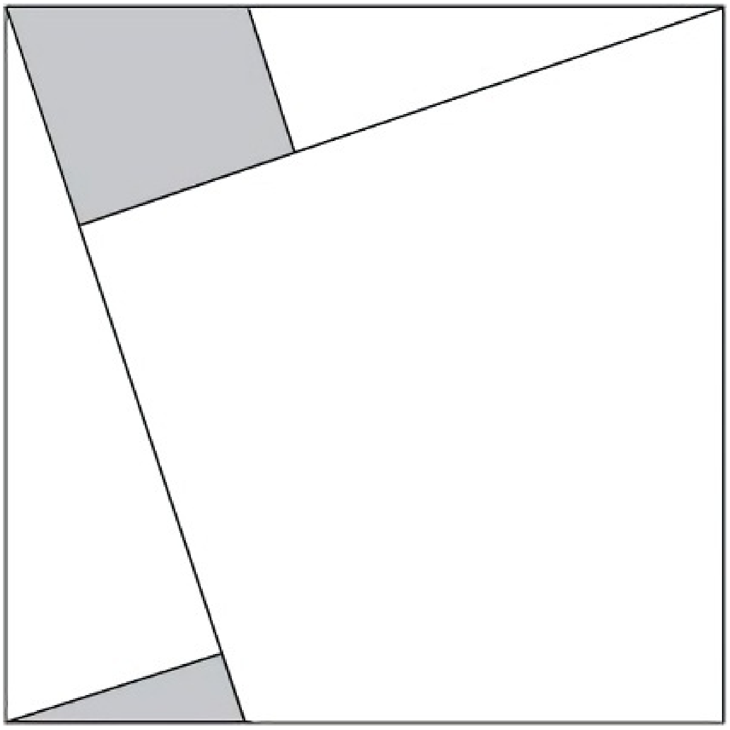
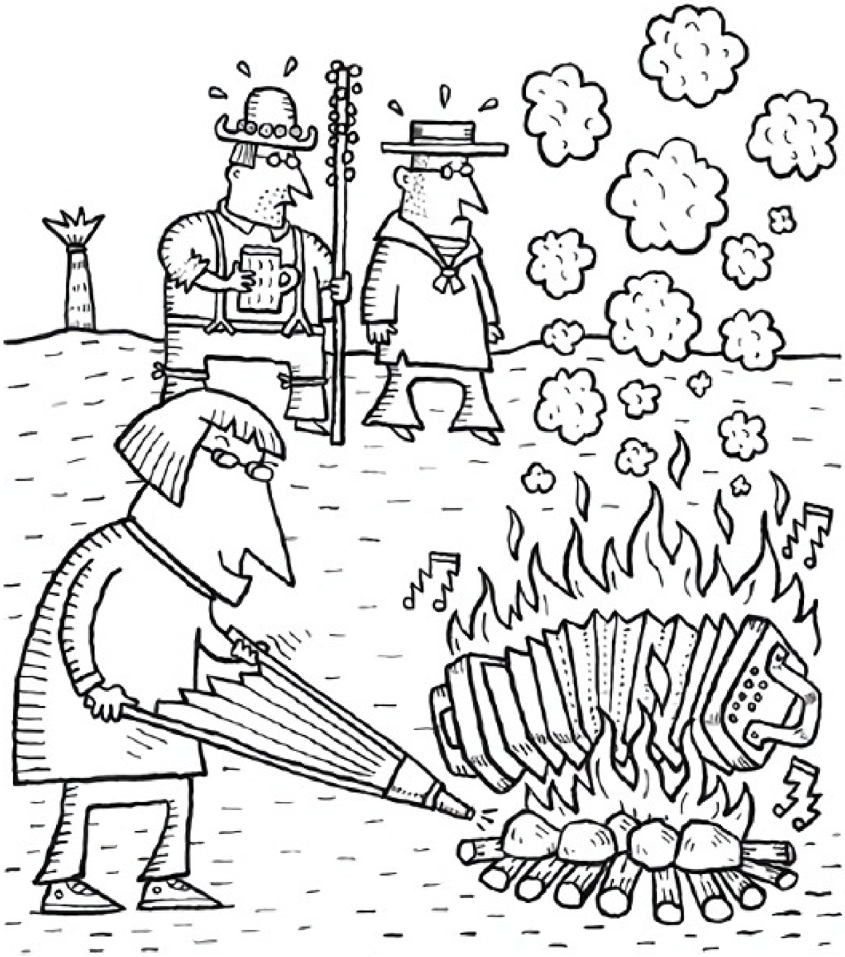


FIGURA 52. Cuadratura de un toro con sólo dos teselas —y una demostración oculta de Pitágoras—. (Sugerencia: considere el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el borde izquierdo del diagrama).

Parece que no se sabe mucho sobre teselaciones de la botella de Klein. Toda teselación de una banda de Möbius puede empalmarse a lo largo de su borde (hay sólo uno) para dar una teselación de la botella de Klein, y no hay otras maneras de teselar la botella de Klein con seis o menos teselas cuadradas. Nadie sabe si esto sigue siendo cierto para siete u ocho teselas, pero es falso para nueve.

No se sabe prácticamente nada sobre teselaciones del plano proyectivo. ¿Y qué pasa con la teselación, digamos, de la superficie de un cubo? El campo entero está totalmente abierto.

14
La conjetura del fuelle



¿Puede ser flexible un poliedro con caras triangulares? Contrariamente al saber convencional, resulta que algunos de ellos sí pueden. Ahora se ha demostrado que si un poliedro puede flexionarse, entonces su volumen no puede cambiar, debido a una notable fórmula que pasaron por alto los matemáticos clásicos. Entonces ¿por qué funciona una concertina?

Cualquier carpintero aficionado que haya tratado de construir una librería sabe que los rectángulos no son rígidos. Si uno se apoya sobre la esquina de un rectángulo, entonces éste se ladea para formar un paralelogramo (figura 53a); y con gran probabilidad acaba por cerrarse. Un triángulo, por el contrario, es rígido: no puede deformarse si no cambia la longitud de al menos un lado. Euclides lo sabía, en la forma «si dos triángulos tienen lados de las mismas longitudes, entonces los triángulos son congruentes (tienen la misma forma)». De hecho, el triángulo es el único polígono rígido en el plano. Cualquier otra forma poligonal debe ser apuntalada de alguna manera. Por ejemplo, pueden añadirse puntales cruzados para dividirlo en triángulos (figura 53b), o pueden ensamblarse en tríos formas que son rígidas por sí mismas (figura 53c).

Otra forma de hacer rígida su librería consiste en fijarle un fondo plano. Esto lleva el problema a la tercera dimensión, donde todo se hace mucho más interesante y abundan las sorpresas. Durante casi doscientos años, los matemáticos han estado intrigados por la rigidez, o no, de los poliedros —sólidos con un número finito de caras poligonales que se juntan en pares a lo largo de aristas—. Hasta hace poco se suponía que cualquier poliedro con caras triangulares debe ser rígido; pero eso resultó no ser cierto. Existen poliedros «flexibles», que cambian de forma incluso si ninguna cara se distorsiona o se curva siquiera en la más mínima cantidad. Volveré a ello en un momento.

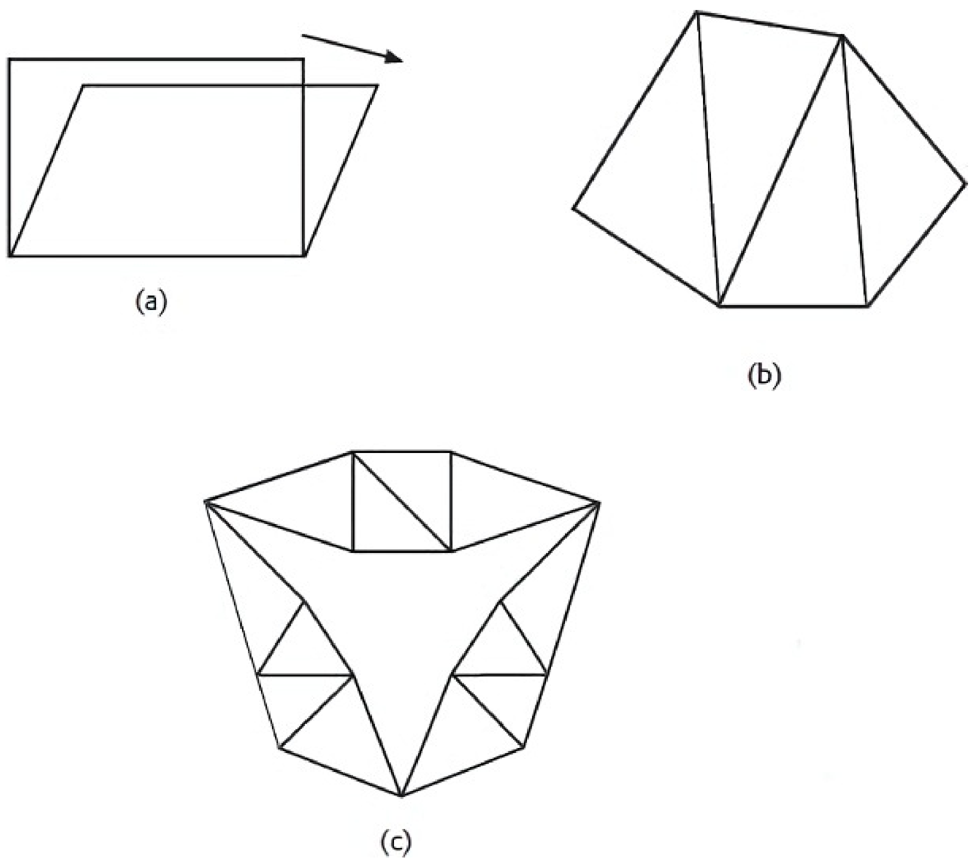


FIGURA 53

(a) La flexión de un rectángulo cambia su área.
(b) Puntales cruzados pueden hacer rígido un polígono.
(c) Algunas formas rígidas no tienen por qué estar hechas de triángulos.

El más reciente descubrimiento, debido a Robert Connelly (Cornell), Idzhad Sabitov (Universidad Estatal de Moscú) y Anke Walz (Cornell), es que los poliedros flexibles no pueden cambiar de volumen. No es posible hacer un «fuelle» poliédrico que pueda plegarse y expulsar aire a través de un agujero mientras se contrae su volumen interno. (¿Qué pasa con las concertinas? Véase más adelante). Su demostración les exigió descubrir algunas propiedades insospechadas de los poliedros, que probablemente se mostrarán importantes en la investigación futura.

Antes de empezar con las matemáticas tendría que aclarar una cosa. Cualquiera que haya practicado la papiroflexia sabe que es posible hacer pajaritas que baten sus alas, ranas que mueven las patas, y cosas así. ¿No son estos poliedros flexibles? La respuesta es «no», por dos razones. Una razón es que el papel tiene bordes, de modo que no forma un poliedro. La otra razón, más importante, es que cuando una rana de papel mueve sus patas, el papel se *comba* ligeramente. Lo mismo pasa con las concertinas, que a primera vista parecen ser fuelles poliédricos, pero también éstas funcionan sólo a causa de la ligera combadura (y quizá incluso un pequeño estiramiento). De ahora en adelante no se permitirá ninguna combadura, ni siquiera de una billonésima de micra. Cuando un poliedro se flexiona, las únicas cosas que pueden cambiar son los ángulos entre sus caras adyacentes. Imaginemos que las caras están unidas mediante bisagras a lo largo de sus aristas y que flexionamos las bisagras. Todo lo demás es perfectamente rígido.

Toda esta área de investigación se remonta a 1813, cuando el gran matemático francés Augustin-Louis Cauchy demostró que un poliedro convexo —un poliedro sin entrantes— no puede flexionarse. Pero ¿qué pasa si hay entrantes? El primer poliedro no-convexo flexible fue encontrado por Raoul Bricard, un ingeniero francés, con la salvedad de que a las caras de su ejemplo se les permitía interpenetrarse libremente y pasar unas a través de otras. Esto es, por supuesto, imposible para un objeto físico real. Sin embargo, el ejemplo de Bricard puede realizarse si eliminamos las caras y reemplazamos las aristas por varillas rígidas para obtener un *entramado*. Bricard también ideó cadenas de poliedros simples, unidos arista con arista, que pueden flexionarse. Según el famoso libro de W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays* (véase Lecturas adicionales), el más sencillo de tales anillos fue ideado por J. M. Andreas y R. M. Stalker. Éstos son anillos de seis o más tetraedros regulares (el número debe ser siempre par) unidos a lo largo de pares de aristas opuestas (figura 54). Con seis tetraedros, la cantidad de movimiento es ligera, pero con ocho o más, el anillo puede dar vueltas indefinidamente, como un anillo de humo. Con 22 o más, el anillo incluso puede anudarse. Sin embargo, tales formas no son auténticos poliedros porque a lo largo de algunas aristas se encuentran más de dos caras

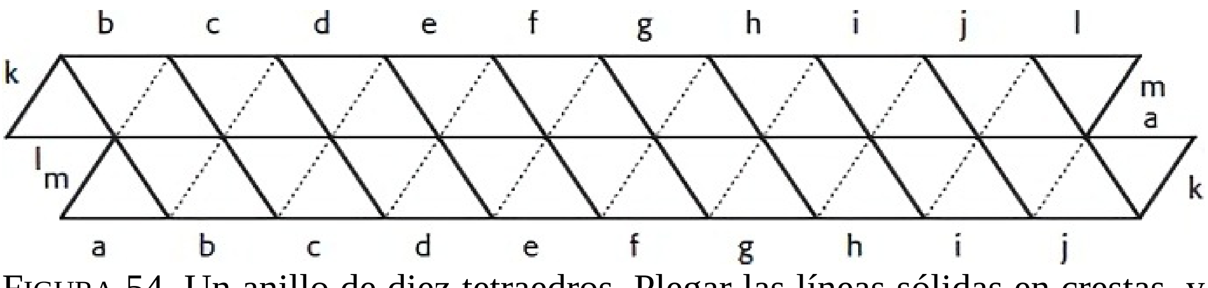


FIGURA 54. Un anillo de diez tetraedros. Plegar las líneas sólidas en crestas, y las de puntos en valles. Unir los eslabones con la misma letra.

El tema no se hizo realmente vivo hasta los años setenta del siglo XX, cuando Connelly modificó el poliedro flexible autopenetrante de Bricard de tal manera que seguía siendo flexible pero dejaba de ser autopenetrante. En pocos años, la construcción había sido simplificada por Klaus Steffen (Universidad de Düsseldorf), para dar un poliedro flexible con nueve vértices y catorce caras triangulares (figura 55). Es divertido hacer un modelo con cartulina y ver cómo se flexiona. Hasta donde se conoce, éste es el poliedro flexible más sencillo posible, pero es muy difícil ver la forma de abordar la demostración de tal enunciado.

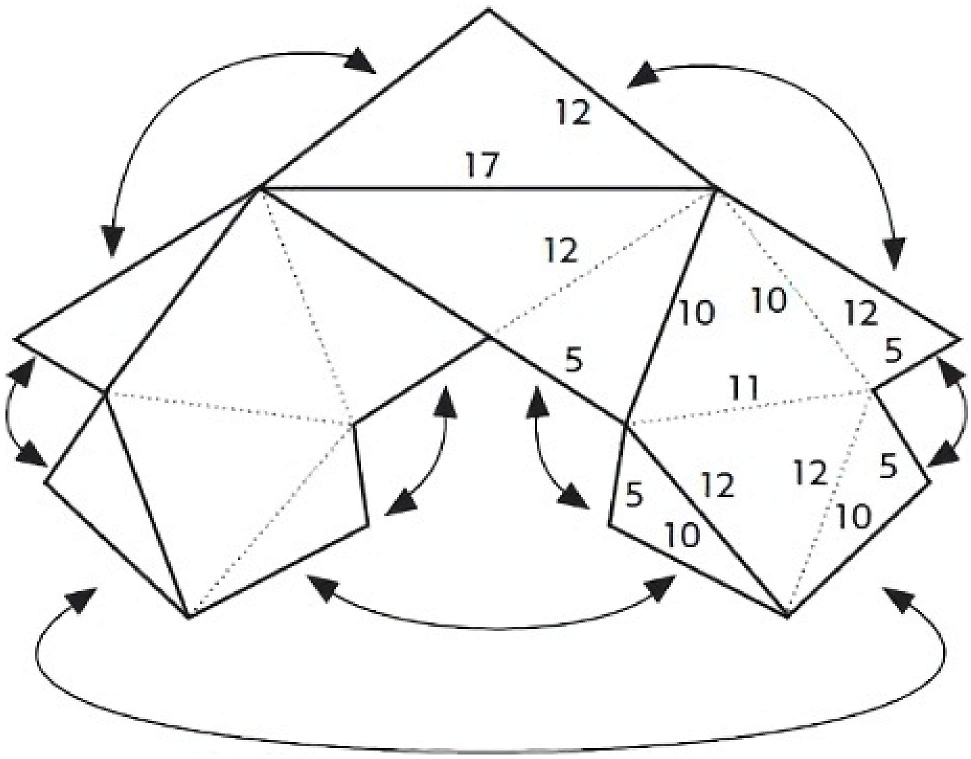


FIGURA 55. Poliedro flexible de Steffen. Plegar las líneas sólidas en crestas, y las de puntos en valles.

Los matemáticos que investigaron éste y otros poliedros flexibles advirtieron rápidamente que, cuando se flexionaban, algunas partes se acercaban mientras otras se separaban. Cualitativamente, al menos, parecía como si el volumen total no pudiera cambiar durante el movimiento. Dennis Sullivan (City University de Nueva York) llenó de humo un poliedro flexible, lo flexionó y observó que no expulsaba humo. Este experimento elegante pero tosco sugería, aunque por supuesto no demostraba, que el volumen permanecía invariable. Y así nació la Conjetura del Fuelle. Afirma que un poliedro flexible mantiene el volumen constante mientras se flexiona: no es posible hacer un fuelle poliédrico.

La primera característica interesante de la Conjetura del Fuelle es que su análoga plana es falsa. Cuando un polígono flexible, tal como un rectángulo, se deforma para dar un paralelogramo, el área se hace más pequeña.

Claramente hay algo inusual en el espacio tridimensional que hace imposible un fuelle. Pero ¿qué es? El grupo de Connelly se centró en una famosa fórmula para el área de un triángulo que se cree debida a Arquímedes, aunque normalmente se atribuye a Herón de Alejandría quién apuntó una demostración. Herón fue un matemático griego que vivió en algún momento entre 100 a. C y 100 d. C., y él estableció y demostró la fórmula en sus libros *Dioptría y Métrica*. La fórmula se muestra en la caja, pero lo que importa aquí no son tanto los detalles como la naturaleza general de la fórmula. Puede reordenarse, utilizando álgebra, para dar una ecuación que relaciona el área del triángulo con sus tres lados. Además, esta ecuación es polinómica: sus términos son simplemente potencias enteras de las variables, multiplicadas por números fijos.

Sabitov dio con la curiosa, y al principio implausible, idea de que podría haber una ecuación polinómica similar para *cualquier* poliedro que relacione el volumen del mismo con las longitudes de sus lados. Tal polinomio sería un descubrimiento verdaderamente notable, porque hasta ese momento nadie había sospechado que pudiera existir algo semejante. Es cierto que había algunas fórmulas especiales bien conocidas: eran fáciles para cajas rectangulares y cúbicas, y algo parecidas a la fórmula de Herón para tetraedros (sólidos con cuatro caras triangulares, pirámides regulares o irregulares sobre una base triangular) sólo que más engorrosas. Pero no hay nada completamente general que se aplique a cualquier poliedro.

FÓRMULA DE HERÓN

Supongamos que un triángulo tiene lados a, b y c, y área x. Sea s el semiperímetro:

$$s = (a + b + c)/2$$

Entonces

$$x = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Elevemos esta ecuación al cuadrado y reordenémosla para deshacernos de los 1/2: el resultado es

$$16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

Ésta es una ecuación polinómica que relaciona el área x con los tres lados a, b, c.

¿Realmente podían los grandes matemáticos del pasado haber pasado por alto una idea tan maravillosa? Parece poco probable.

De todas formas, supongamos que tal fórmula *sí* existe. Entonces la Conjetura del Fuelle es una simple consecuencia. La razón es simple. La fórmula relaciona el volumen con sus lados. Cuando el poliedro se flexiona, las longitudes de sus lados no cambian, de modo que la fórmula sigue siendo exactamente la misma. Por lo tanto, su solución, el volumen, también debe seguir siendo el mismo.

En realidad, hay que tener cuidado con un punto técnico. Una ecuación polinómica puede tener varias soluciones distintas, de modo que en principio el volumen podría saltar repentinamente de una solución a otra diferente. Sin embargo, es obvio que el volumen cambia *gradualmente* si la flexión es gradual, de modo que, haga lo que haga el volumen, no puede dar saltos. Fin de la demostración.

Cuando escribí sobre esto por primera vez, algunos lectores me dijeron que debía estar equivocado. Por ejemplo, si uno hace una casa con forma de caja con un tejado y luego invierte el tejado, todos los lados tienen la misma longitud que antes pero el volumen se hace mucho menor (figura 56). Eso es cierto, pero no invalida el razonamiento. En primer lugar, las mismas longitudes pueden corresponder a varios poliedros diferentes (como ocurre aquí) porque, como se acaba de señalar, una ecuación polinómica tiene en general varias soluciones. El número debe ser finito, pero cuanto mayor es el grado del polinomio, más soluciones puede haber. En segundo lugar, uno no puede deformar la casa normal en la otra de una manera continua sin que las caras se comben y se tuerzan en el proceso. ¡Objeción superada!

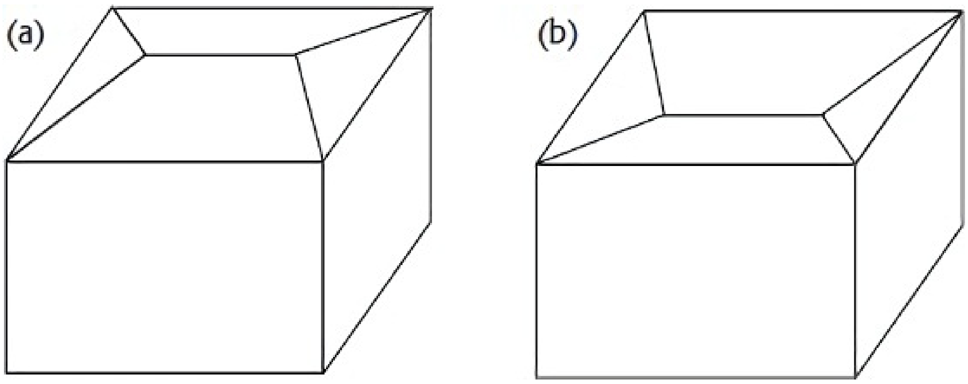


FIGURA 56

(a) Casa con techo.
(b) Casa con techo invertido. Ambas tienen las mismas aristas pero diferente volumen.

En cualquier caso, el problema se resolverá si podemos encontrar una ecuación polinómica para el volumen de un poliedro en función de sus lados. Hay un lugar obvio donde empezar: la fórmula clásica para el volumen de un tetraedro, el poliedro más simple. De la misma forma que cualquier polígono puede dividirse en triángulos, también cualquier poliedro puede dividirse en tetraedros. Entonces, el volumen del poliedro es simplemente la suma de los volúmenes de dichas piezas tetraédricas. Pero eso, por sí mismo, no resolverá el problema. La fórmula que lleva a ello incluye a todas las aristas de todas las piezas, pero muchas de ellas no son aristas del poliedro original. En su lugar, hay varias líneas «diagonales», que van de una esquina del poliedro a otra, cuyas longitudes pueden cambiar si se flexiona el poliedro. Así que de algún modo la fórmula tiene que ser manipulada algebraicamente para deshacerse de esas aristas indeseadas y «empalmar» todas las ecuaciones componentes en una Gran Ecuación Unificada.

Todo tendía a hacerse más complicado. Para un octaedro, con ocho caras triangulares, resultó que tal procedimiento de manipulación era posible, pero en la ecuación aparecía la decimosexta potencia del volumen. Poliedros más complejos requerirían seguramente potencias aún más altas. Sin embargo, el octaedro fue un buen inicio. En 1996, Sabitov pudo desarrollar un procedimiento explícito aunque extraordinariamente complicado para encontrar ecuaciones apropiadas. En 1997, el equipo de Connelly, Sabitov y Walz encontró una forma mucho más sencilla de conseguir el mismo resultado.

No se entiende por completo la razón por la que existen tales ecuaciones. En dos dimensiones no existen, salvo para el triángulo rígido y la ecuación de Herón. En tres dimensiones, sabemos ahora que sí existen. Connelly y Walz piensan que saben cómo demostrar una Conjetura del Fuelle tetradimensional. Para cinco dimensiones o más, el problema está totalmente abierto. Pero es fascinante ver cómo un simple experimento con algunos trozos de cartulina y un poco de humo dio paso a un descubrimiento matemático maravilloso, fundamental y totalmente inesperado. Y hay ideas sencillas que los grandes matemáticos del pasado pudieron haber descubierto… pero no lo hicieron.

15
Apilando pirámides premeditadamente

¿Cuántos hombres se necesitan para construir una pirámide? Presumiblemente, más de los que se necesitan para cambiar una bombilla, aunque un hombre solo podría hacerlo si viviera lo suficiente. Un millón harían el trabajo más rápido, si no tropezasen unos con otros. La respuesta correcta debe estar en un número entre esos dos, pero ¿de qué tamaño aproximadamente? El historiador griego Herodoto afirmaba que la Gran Pirámide fue construida utilizando cien mil esclavos. La arqueología ha demostrado que los trabajadores no eran esclavos. Las matemáticas muestran que cien mil es un número demasiado grande. Todo es una cuestión de energía.

Las pirámides del antiguo Egipto figuran entre los misterios arqueológicos más enigmáticos. Algunas de ellas son enormes. La «Gran» Pirámide de Quéope en Guiza, que data aproximadamente del 2500 a. C., tenía originalmente un volumen de más de 2,5 millones de metros cúbicos y una masa de siete millones de toneladas. Está hecha de enormes bloques de piedra, que fueron extraídos de la cantera, cortados en una forma bastante regular, transportados hasta el emplazamiento de la construcción y luego apilados unos sobre otros con sorprendente precisión.

¿Cómo juntaron los antiguos egipcios edificios tan enormes? ¿Para qué servían? ¿Cómo fueron construidos? Básicamente, no lo sabemos; aunque sí sabemos que muchas pirámides fueron utilizadas como tumbas para los reyes y hay muchas teorías sobre la construcción de las mismas. Sin embargo, gracias a un perspicaz trabajo detectivesco matemático por parte de Stuart Kirkland Wier del Museo Denver de Historia Natural (véase Lecturas adicionales), ahora tenemos una buena idea de cuál era el tamaño de la fuerza de trabajo empleada.

Unos dos milenios después de que se construyeran las pirámides, el historiador griego Herodoto informaba de que se necesitaron cien mil hombres para construir la Gran Pirámide. Sin embargo, Herodoto no es una fuente fiable, y ahora parece que sobreestimó la fuerza de trabajo en un orden de magnitud. Según Wier, la cifra verdadera era probablemente de alrededor de diez mil, que sorprende por su pequeñez. ¿Cómo podemos estar seguros del número de trabajadores cuando no tenemos una idea clara de cómo se construyeron las pirámides? Con tal de que hagamos unas pocas hipótesis razonables acerca de cómo se manejaban los egipcios, y dando por supuesto que no eran totalmente incompetentes, podemos estimar la fuerza de trabajo a partir de unos pocos sencillos principios matemáticos.

Para concretar, Wier trabaja con la pirámide de Quéope, pero el mismo método puede aplicarse a otras pirámides con resultados aproximadamente similares. La idea básica consiste en calcular cuánta energía contiene una pirámide. Por «energía» entiendo aquí «energía potencial»: el trabajo requerido para elevar una masa dada a una altura dada contra la fuerza de la gravedad. Si dividimos la energía potencial de la pirámide por el número de días necesarios para construirla, obtenemos la energía media requerida por día para elevar los bloques. Todo lo que necesitamos ahora es una estimación de cuánta energía por día sería capaz de proporcionar un típico trabajador de la construcción egipcio y, con ello, podemos calcular el tamaño promedio de la fuerza de trabajo. Simplemente dividimos la energía total por día por la energía aportada por un típico hombre-día.

Tal como está, un cálculo semejante hace varias hipótesis. Omite cualesquiera otras actividades que requieran energía, tales como el transporte de los materiales, el corte de la piedra, la construcción de la maquinaria… incluso la alimentación de la fuerza de trabajo. Pone un límite inferior al número de trabajadores, pero no un límite superior. E incluso si conocemos el tamaño medio de la fuerza de trabajo, no podemos estar seguros de cómo variaba el tamaño real en torno a dicha media. Para mejorar la estimación debemos determinar valores aproximados para cualesquiera otros requisitos importantes de energía, considerar cuán eficiente habría sido el uso de la energía y tratar de imaginar la pauta de construcción probable. ¿Emplearon los constructores de pirámides una fuerza de trabajo de tamaño fijo? ¿O contrataban trabajadores extra cuando el proyecto lo exigía y los despedían cuando ya no eran necesarios? Los registros históricos no nos lo dicen, pero podemos inferir bastante más de lo que cabría esperar suponiendo que los egipcios se comportaban como personas cuerdas y razonables.

La mayor incertidumbre es el tiempo. ¿Cuánto se tardó en construir la pirámide de Quéope? Quéope reinó durante 23 años. La construcción de la pirámide no habría empezado mucho antes del inicio de su reinado, y habría terminado antes de su muerte o poco después. Por otra parte, el jefe de la construcción no habría sabido con certeza cuándo iba a morir Quéope. Así pues, para una estimación aproximada, la hipótesis más simple es que se tardó 23 años en construir la pirámide de Quéope —la misma duración que el reinado de Quéope—. Eso equivale a 8400 días, suponiendo que la construcción continuaba durante todo el año. El tiempo real podría haber sido la mitad o el doble de largo: debido a esta incertidumbre fundamental sobre el tiempo no tiene sentido entrar en mucho detalle cuando estimamos otras cifras relevantes.

Puede deducirse algo sobre las técnicas de construcción de pirámides a partir de los registros antiguos y del plano del emplazamiento de la pirámide (figura 57). Las pirámides estaban hechas de bloques de piedra, sacados de canteras cercanas cuya localización es a veces conocida. La única fuente de potencia eran los músculos humanos (y no la potencia hidráulica, por ejemplo) asistidos por herramientas primitivas pero efectivas, tales como palancas. En conjunto, una pirámide se construía por capas de abajo a arriba; desde luego, ningún bloque podía ponerse en su lugar hasta que hubiesen sido colocados los de debajo. El transporte horizontal de los bloques se hacía por medio de trabajadores que arrastraban trineos de madera (los relieves egipcios muestran cómo se hacía). Nadie sabe cómo se conseguía el transporte vertical: las teorías incluyen enormes rampas de arena, ingeniosas disposiciones de palancas y pilas de soportes de madera.

La pirámide de Quéope, recién construida, tenía unos 146,7 metros de altura, con una base cuadrada de 230,4 metros de lado. El volumen de una pirámide de altura h y una base cuadrada de lado s es $s^2h/3$, que en este caso da $2{,}59 \times 10^6$ metros cúbicos. El material es piedra caliza, de densidad $d = 2{,}7 \times 10^3$ kilogramos por metro cúbico, de modo que la masa es $7{,}01 \times 10^9$ kilogramos. La energía potencial de una pirámide (un interesante ejercicio de cálculo infinitesimal) es $gds^2h^2/12$, donde g es la aceleración debida a la gravedad (9,81 metros por segundo cada segundo). Esto equivale a $2{,}52 \times 10^{12}$ julios, siendo un julio la unidad de energía relevante.

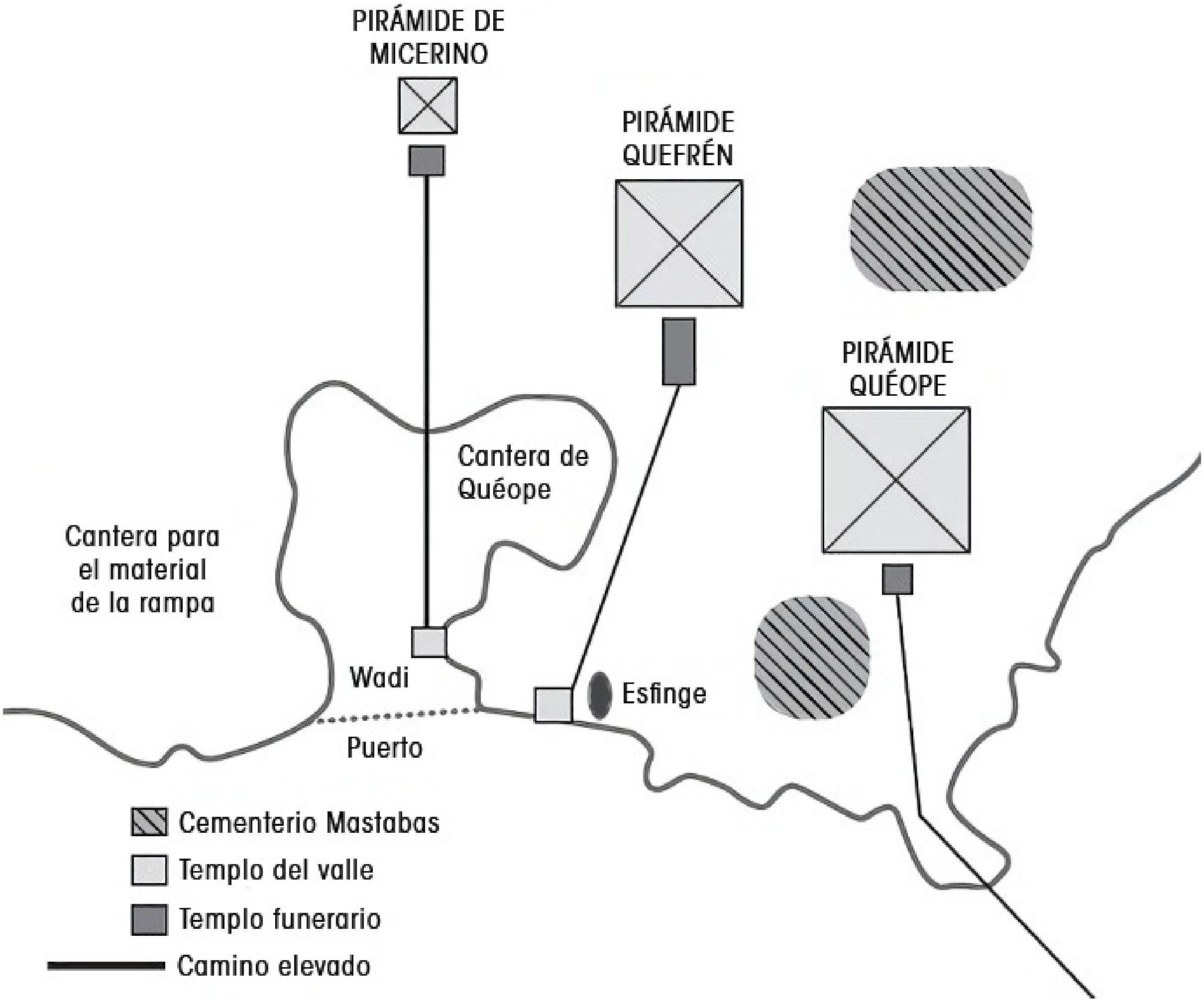


FIGURA 57. Mapa esquemático de la pirámide de Quéope y parte de sus alrededores.

Según *The Engineer's Manual* de 1917, la cantidad media de trabajo útil proporcionado por un hombre en un día es aproximadamente $2{,}4 \times 10^5$ julios. De modo que el número de hombres que serían necesarios solamente para elevar los bloques hasta su posición, suponiendo eficiencia perfecta, es $2{,}52 \times 10^{12}/(8400 \times 2{,}4 \times 10^5)$, que es 1253. Esta estimación es claramente demasiado baja, porque en la práctica la eficiencia no es perfecta, pero da una idea del esfuerzo requerido: no es tanto como cabría esperar.

Obtener una mejor estimación requiere más reflexión sobre la logística. Las pirámides no son sólo monótonos montones de piedra: tienen pasadizos y cámaras, algunas de las cuales son extraordinarias proezas de ingeniería por sí mismas. Pero la parte abrumadora del trabajo consistía en apilar dichas piedras, de modo que podemos ignorar los detalles estructurales. Si dividimos el volumen de la pirámide por el tiempo disponible para construirla resulta que, en promedio, hay que colocar aproximadamente 310 metros cúbicos de piedra por día. A medida que aumenta la altura a la que debe ser elevado un bloque, también aumenta la energía necesaria por bloque; además, el espacio de trabajo encima de la pirámide disminuye a medida que la pirámide se hace más alta. Estos factores dejan claro que un ritmo estacionario de 310 metros cúbicos por día no es razonable. En su lugar, el ritmo de instalación de piedra debería ser mayor cuando la pirámide es baja, y caer a medida que gana altura.

Wier considera tres programas de construcción representativos para la pirámide:

(A) Un ritmo constante, sujeto al requisito práctico de que el área disponible para instalar piedra nunca caiga por debajo de diez metros cuadrados por cada metro cúbico instalado en un día dado.
(B) Un ritmo de construcción que decrece linealmente con la altura de la porción de la pirámide que se está construyendo en cada momento.
(C) Un ritmo de construcción que disminuye lentamente, luego más rápidamente, y finalmente decrece de nuevo lentamente.

Estos programas no se proponen como modelo de lo que los egipcios hacían realmente: son posibilidades representativas para utilizar como guía.

Suponiendo 8400 días para completar cada programa, la figura 58 muestra cómo varía el ritmo de construcción con la altura de la porción construida en cada momento, y la figura 59 muestra cómo varía el ritmo de construcción con el tiempo. Por ejemplo, el programa (A) requiere que durante los 8110 primeros días se instalen 315 metros cúbicos de piedra cada día, después de lo cual, la construcción decae rápidamente debido al espacio limitado en la parte alta de la pirámide.

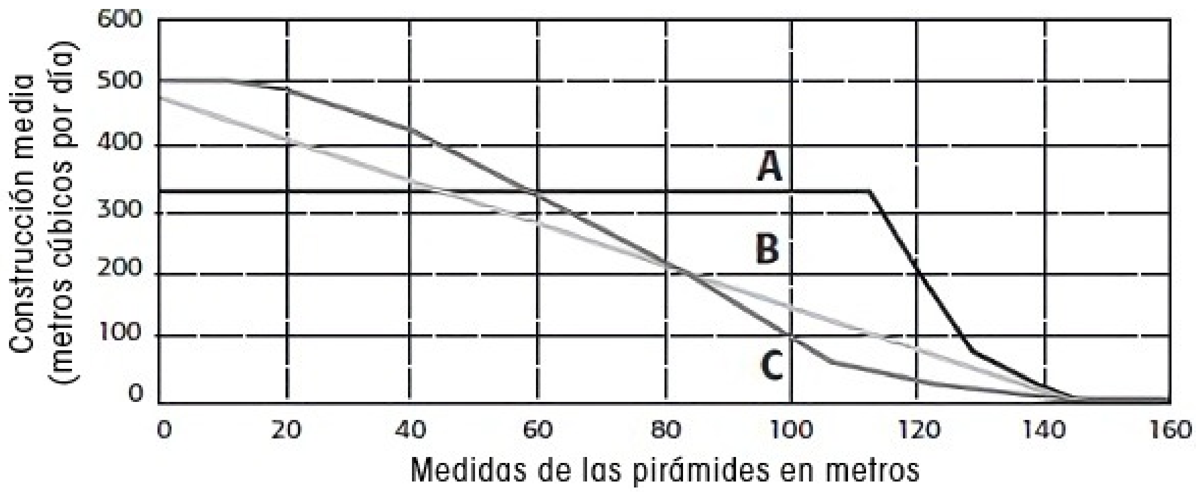


FIGURA 58. Cómo varía el ritmo de construcción con la altura, para tres programas representativos.

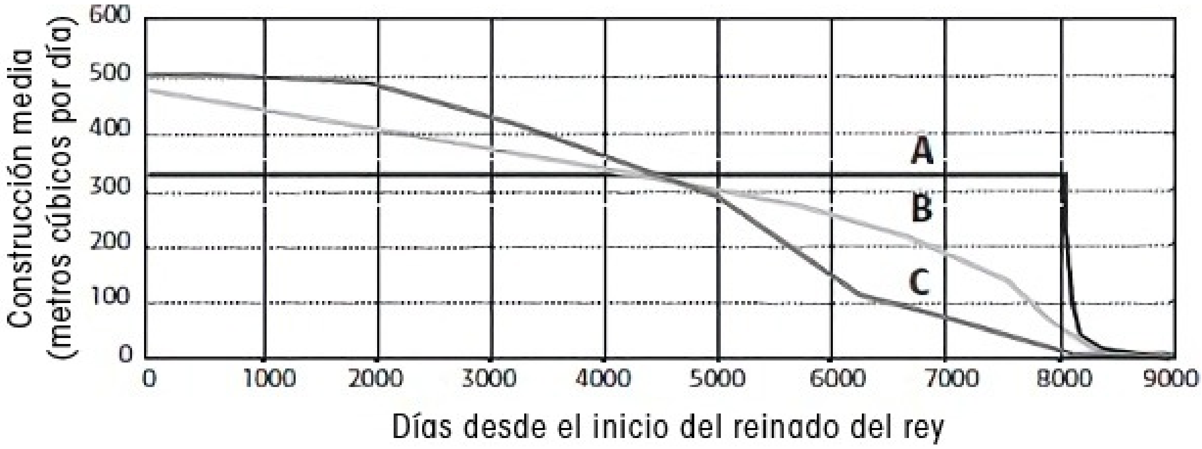


FIGURA 59. Cómo varía el ritmo de construcción con el tiempo, para tres programas representativos.

Una vez que se conoce el ritmo de construcción, puede estimarse la mano de obra requerida. Por ejemplo, tomemos el caso (B). Aquí el ritmo de construcción empieza en 462 metros cúbicos por día cuando la pirámide tiene una altura de cero metros, y decae aproximadamente 31 metros cúbicos por día por cada diez metros de altura extra. Un truco matemático útil consiste en separar el movimiento de piedras en dos componentes: vertical («elevación») y horizontal («arrastre»). Con esto no estamos suponiendo que estos dos componentes se dan realmente por separado; por ejemplo, si las piedras son arrastradas por una rampa inclinada, entonces ambos componentes cambian simultáneamente. Lo que ocurre, simplemente, es que es más fácil calcular las dos contribuciones por separado.

La parte vertical incluye no sólo elevar las piedras en la pirámide, sino elevarlas desde el fondo de la cantera hasta el nivel de la base de la pirámide, una distancia que se sabe que es de 19 metros. El número de hombres requerido para elevar las piedras puede calcularse a partir de la energía potencial necesaria, multiplicada por un factor ajustado para dar cuenta del uso ineficiente de la fuerza muscular. La parte horizontal incluye deslizar las piedras desde la cantera a la pirámide —una distancia de 635 metros o menos — y cualquier otro movimiento horizontal necesario para situarlas en su lugar en la propia pirámide. Para encontrar el número de hombres requeridos para el arrastre, estimamos la fricción entre un trineo de madera y el suelo arenoso y calculamos el trabajo realizado en contra de la fricción, que da la energía involucrada.

La mano, de obra es necesaria también para otras tareas: extraer las piedras de la cantera, darles forma, hacer trineos de madera, lo que sea. Wier supone que todas estas tareas combinadas requieren entre cinco y diez hombres por metro cúbico de piedra por día. Los resultados, para el caso (B), se muestran en la figura 60, tomando la estimación superior de diez hombres por día. En ninguna fase la fuerza de trabajo excede de 12 800 hombres, un número ligeramente menor que el 1 por 100 de la fuerza de trabajo egipcia en esa época. Los casos (A) y (C) llevan a resultados muy similares, lo que deja claro que cualquier programa de construcción razonable implicaría una fuerza de trabajo de aproximadamente ese tamaño.

MEDIDA	ELEVACIÓN	ARRASTRE	OTROS	TOTAL
145	15	5	21	41
140	215	85	321	621
130	860	370	1360	2590
120	1290	590	2120	4000
110	1640	810	2850	5300
100	1930	1030	3540	6500
90	2150	1250	4190	7590
80	2290	1470	4830	8590
70	2370	1690	5400	9460
60	2380	1910	6010	10300
50	2320	2130	6450	10900
40	2190	2350	6960	11500
30	1990	2570	7440	12000
20	1716	2794	7890	12400
10	1380	3010	8210	12600
0	970	3230	8600	12800

FIGURA 60. Requisitos de fuerza de trabajo estimados para el programa (B).

Quizá el programa más simple consiste en emplear una fuerza de trabajo de tamaño constante, excepto cerca del final donde en la parte superior de la pirámide no hay espacio suficiente para más de unos pocos trabajadores. Resulta que, con las mismas hipótesis, 8300 hombres bastan en este caso para construir la pirámide de Quéope. Resultados similares son válidos para otras pirámides (figura 61). Pese al sorprendente tamaño de las pirámides, parece que la mano de obra no era un problema.

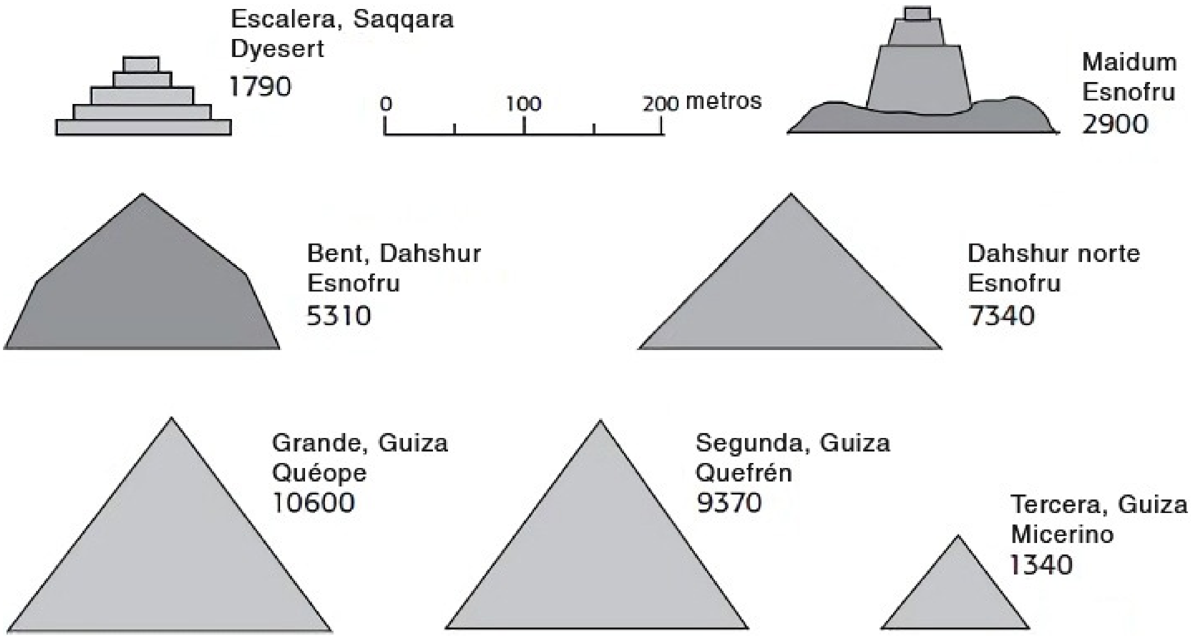


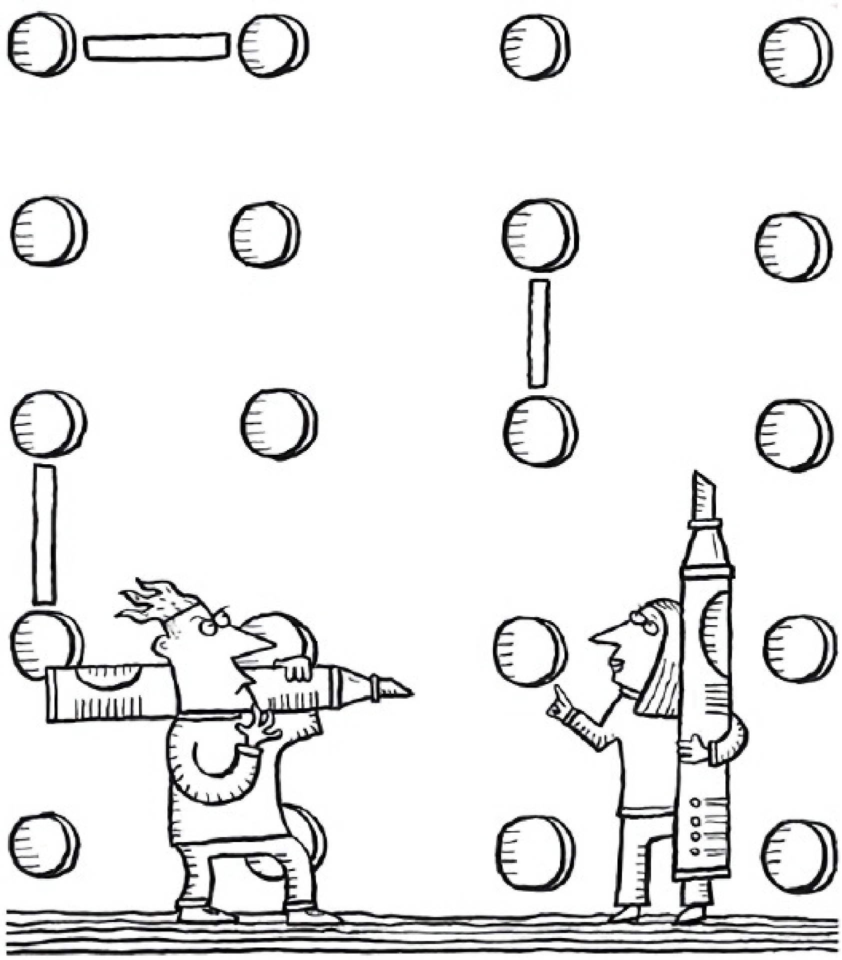
FIGURA 61. Fuerza de trabajo estimada para diversas pirámides supervivientes.

¿Cómo elevaron los egipcios tantas piedras hasta su lugar? Una teoría común es que utilizaban enormes rampas hechas de arena que más tarde eran eliminadas. Ciertamente utilizaban rampas pequeñas con diversos fines de construcción, pero parece poco probable que construyeran rampas gigantescas que llegaran hasta la parte superior de la pirámide. Se necesita mucha energía para construir una rampa —aproximadamente tanta como para construir una pirámide completa— y luego hay que quitar de nuevo la rampa. Otro problema con las rampas es que los trabajadores no sólo tienen que elevar las piedras en contra de la gravedad sino que tienen que elevarse ellos mismos mientras suben por la rampa. A menos que tiren de cuerdas, lo que no es fácil si la rampa es larga.

Una forma mejor sería limitar lo más posible el movimiento de los trabajadores. Una forma simple y eficiente de conseguirlo me la sugirió hace unos pocos años Alan Moore, un inglés que había estado interesado durante mucho tiempo en enigmas sobre la tecnología antigua. Su idea consiste en utilizar una serie de palancas levantadas en la cara de la pirámide. Las piedras sujetas en «bolsas» de cuerda podían ser traspasadas rápidamente de una palanca a otra, subiendo por la pirámide de escalón en escalón. Los hombres que manejaban las palancas no tenían que subir o bajar, salvo cuando cambiaban el turno. Aparte del esfuerzo inicial de construir las palancas, que es minúsculo en comparación con el resto del trabajo, este método desperdicia muy poca energía y, lo que es una ventaja mayor, necesita muy poco espacio de trabajo.

Quizá no sepamos nunca qué hacían exactamente los egipcios, pero es instructivo buscar métodos prácticos y calcular cuánto esfuerzo requerirían. Y algunos de los resultados, como advirtió Wier, son básicamente independientes de los métodos utilizados, debido a principios matemáticos simples y universales.

16
Sea un gran maestro de Puntos-y-Cajas



Todos hemos jugado a este juego cuando éramos niños. Dibujas una cuadrícula rectangular de puntos y esperas tu turno para unir puntos vecinos. Si cierras una caja cuadrada, pones tu inicial: es tuya. Y tienes que jugar de nuevo, hasta que dejas de completar cajas. Gana el que tenga más cajas. ¿Sencillo? Las reglas lo son; las implicaciones estratégicas no. Puntos-y-Cajas (o simplemente Cajas) es uno de los juegos más increíblemente complicados nunca inventado. Y muy pocas personas alcanzan siquiera el primer nivel de competencia o advierten que existe.

Nunca he dejado de sorprenderme con las sutilezas matemáticas inherentes a lo que parecen ser los juegos más simples. Incluso los juegos de niños plantean cuestiones que requieren matemáticas sofisticadas. El libro *The Dots and Boxes Game* de Elwyn Berlekamp (véase Lecturas adicionales) lleva esta reflexión a alturas insospechadas. Prácticamente todo el mundo ha jugado a este juego en la escuela primaria, pero tras leer el libro dudo de que una persona entre un millón lo haya jugado cerca del máximo nivel alcanzable. Pocos jugadores son conscientes siquiera del primer nivel de sutileza en la estrategia para el juego. Berlekamp deja claro que hay muchos niveles más profundos, y sigue habiendo profundidades por explorar.

Recordemos las reglas. El juego empieza con una cuadrícula rectangular de puntos. Los jugadores trazan por turno líneas que unen dos puntos que son adyacentes horizontal o verticalmente (pero no en diagonal). Si un jugador completa el cuarto lado de una caja —un cuadrado de lado unidad— entonces escribe su inicial en esa caja y juega de nuevo (y *debe* continuar jugando mientras siga completando cajas). Al final del juego gana el jugador que haya puesto su inicial en el mayor número de cajas.

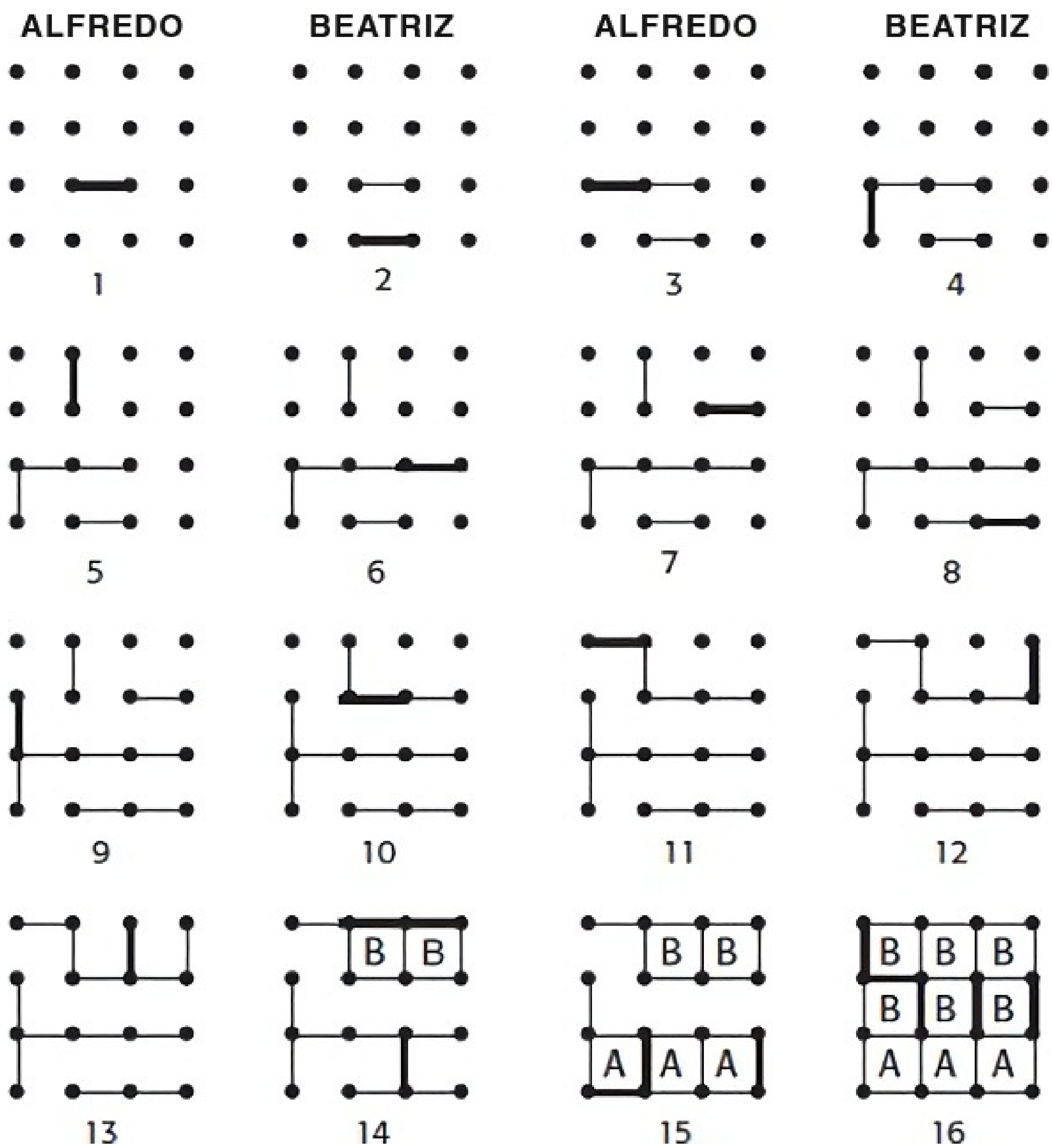


FIGURA 62. Un típico juego de Nivel 0.

Llamemos a los jugadores Alfredo y Beatriz y establezcamos el convenio estándar de que siempre empieza Alfredo. La figura 62 muestra un juego típico de niños (¡y muchos adultos!): le llamaré juego de Nivel 0. Los jugadores evitan ceder cajas mientras sea posible, haciendo jugadas que no creen el tercer lado de una caja potencial. Como resultado, la cuadrícula queda dividida en una serie de «cadenas». Éstas son regiones serpenteantes acotadas por líneas tales que, en cuanto un jugador se hace con una caja en el comienzo de la cadena, puede seguir haciéndose con cajas hasta que toda la cadena se acaba. Las cadenas pueden cerrarse en bucles.

Llega un momento en que la cuadrícula ha quedado completamente dividida en cadenas de este tipo, un estado que llamaré *colapso total*. En nuestro caso, Beatriz crea un estado semejante en la jugada doce. Una vez que se alcanza el colapso, lo habitual es que los jugadores tracen la línea siguiente en la cadena más corta disponible, dando con ello al adversario el menor número de cajas. Tras haber completado esta cadena, el adversario cede entonces la siguiente cadena más pequeña… y así continúa el juego.

En el juego aquí ilustrado hay tres cadenas en el colapso total: contienen 2, 3 y 4 cajas potenciales, respectivamente. Con juego de Nivel 0 Alfredo se ve finalmente obligado a ceder a Beatriz una cadena de longitud 2. A su vez, Beatriz cede a Alfredo una cadena de longitud 3, y Alfredo se ve entonces obligado a ofrecer a Beatriz una cadena de longitud 4. Beatriz gana por 6 cajas frente a las 3 de Alfredo.

El Nivel 1 de juego mejora el Nivel 0. Lo hace analizando quién es el que gana una vez que se alcanza el colapso y tratando de escoger jugadas que aseguren que es usted y no su adversario. En el Nivel 0 de juego, el ganador depende de la paridad (par o impar) del número de cadenas existentes cuando se alcanza el colapso, y de qué jugador cede la posesión de la primera cadena a su adversario al jugar dentro de dicha cadena inmediatamente después del colapso. Decimos que «abre» la cadena: note que usted abre una cadena al ofrecerla a su adversario —usted no la gana para sí.

Si el número de cadenas en el colapso es par, entonces el jugador que abre la primera cadena gana, porque por cada cadena que completa su adversario él obtiene a continuación una cadena igual o superior. Nótese que en esta situación el jugador que abre la primera cadena hace la última jugada. Por el contrario, si el número de cadenas es impar, entonces el jugador que abre la primera cadena pierde, porque su adversario obtiene la primera cadena y cada cadena posterior que obtiene el primero es igualada o superada por la cadena siguiente de su adversario. En esta situación, el adversario hace la última jugada.

En nuestro ejemplo hay tres cadenas (impar) en el colapso, y el número de jugadas necesarias para llegar al colapso es 12 (par). Alfredo está obligado a abrir una cadena, de modo que Beatriz obtiene las cadenas primera y tercera; Alfredo tiene que conformarse sólo con la segunda.

Qué jugador es el primero en romper el colapso depende de la paridad del número de jugadas realizadas para alcanzar dicho estado. Si este número es par, entonces Alfredo abre la primera cadena y Beatriz obtiene la primera ganancia territorial; si es impar, Beatriz abre la primera cadena y Alfredo obtiene la primera ganancia territorial. Si Alfredo quiere ganar un juego en el que Beatriz está jugando al Nivel 0, él tiene que asegurar que el número de jugadas realizadas hasta llegar al colapso, *más* el número de cadenas que resultan, es par. Si es así, entonces o bien Alfredo abre la primera de un número par de cadenas, o bien Beatriz abre la primera de un número impar de cadenas. En cualquier caso, Alfredo gana.

Sin embargo, Beatriz también puede jugar al Nivel 1. Si Alfredo está jugando al Nivel 1, entonces ella tiene que asegurar que el número de jugadas realizadas hasta alcanzar el colapso, *más* el número de cadenas que resultan, es impar. Una cuidadosa consideración de las alternativas, a unas pocas jugadas antes del colapso, puede ayudarle a alcanzar este objetivo, pero no siempre lo garantiza.

Incluso en este bajo nivel de juego vemos que hay principios matemáticos simples que tienen que ver con las paridades de diversos números asociados con el estado del juego. Sin embargo, el Nivel 2 de juego contradice estos principios, pues rechaza jugar la estrategia del Nivel 1 de juego si lleva a una pérdida. En este ejemplo, Alfredo sabe que si ambos jugadores utilizan la estrategia del Nivel 1 tras la posición 12, entonces él perderá. Por consiguiente, da con un ingenioso plan para poner a Beatriz en desventaja. En la jugada 13 él sigue abriendo la cadena de longitud 2, ofreciendo a Beatriz dos cajas. En la jugada 14 ella abre la cadena de longitud 3 para que la tome Alfredo. Pero en la jugada 15, Alfredo se niega a aceptar las tres cajas de la cadena. En su lugar, él acepta una de ellas, y luego traza una línea que deja un rectángulo 2×1 cerrado, lo que llamaré un *dominó* (figura 63).

Esto se conoce como una jugada *capciosa*. Es un sacrificio, pues ofrece a Beatriz una fácil conquista territorial, pero la coloca en una posición fatal, ya acepte el sacrificio o no. Si ella juega en el dominó, gana dos cajas pero tiene que jugar otra vez. Para ello tiene que abrir la cadena de longitud 4, lo que permite a Alfredo birlar el lote y ganar por 5 cajas frente a 4. Si, en lugar de eso, ella abre la cadena de longitud 4, entonces es incluso peor. Alfredo toma la cadena entera y luego toma también las dos cajas en el dominó, ganando por 7 cajas frente a 2.

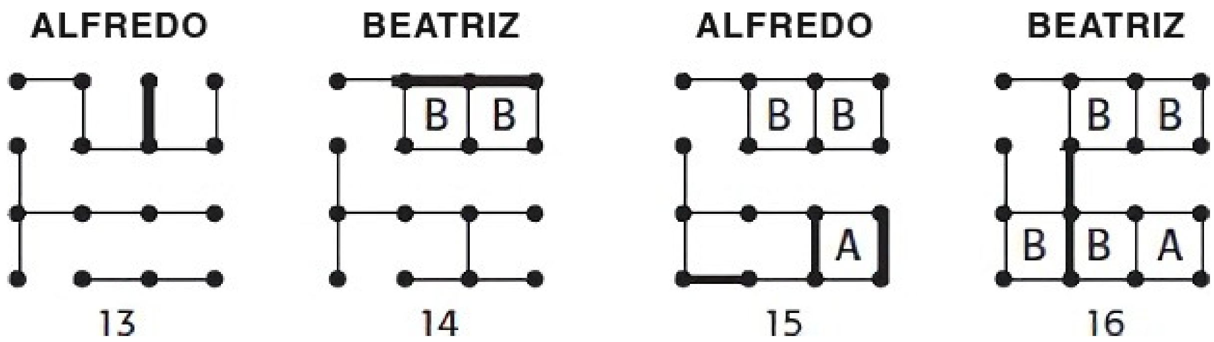


FIGURA 63. Una mejora de Nivel 2.

En este caso, la causa de Beatriz está claramente perdida en el momento en que Alfredo hace su jugada capciosa, porque sólo queda una cadena, además del dominó. Supongamos, sin embargo, que quedan varias cadenas. ¿No puede Beatriz recuperar algún territorio haciendo ella misma jugadas capciosas?

No siempre. Supongamos que se llega a una posición en la que hay varios dominós, junto con algunas cadenas de longitud 3 o más, que a partir de ahora llamaremos «cadenas largas». Supongamos que Beatriz tiene que jugar. Ella puede también hacerse con todos los dominós disponibles; si no, Alfredo puede tomarlos a mitad de su siguiente serie de movimientos sin ponerse en una situación peor. Así que ahora ella trata de jugar una estrategia de Nivel 1 modificada: abrir la más corta cadena larga restante. Entonces Alfredo estará obligado a abrir la siguiente más corta… de modo que todo depende de la paridad del número de cadenas largas, muy parecido a lo que pasaba antes. ¿Sí?

No. Si el número de cadenas largas que quedan es impar, entonces ciertamente Alfredo sería feliz de jugar un juego de Nivel 1. Pero si es par (de hecho si es impar) él no está obligado a aceptar toda la cadena. En su lugar, él puede jugar una estrategia de Nivel 3 tomando *todas las cajas menos dos*, y cerrar con una jugada capciosa. Ahora Beatriz tiene el mismo problema que antes, pero con una cadena larga menos (lo que implica un cambio de paridad). De hecho, Alfredo puede dar cortésmente dos cajas por cadena a Beatriz, quedándose con el resto, y obligarla a seguir abriendo nuevas cadenas largas.

Si estas cadenas largas contienen 5 cajas o más, Alfredo gana en todas las ocasiones. Si contienen 4, él y Beatriz se las reparten. Solo si contienen 3 cajas esta estrategia da a Beatriz una caja más que a Alfredo. Si hay varias cadenas largas, y un número suficiente tienen longitud 5 o más para cancelar las pérdidas sufridas con las de longitud 3, entonces Alfredo gana.

Se dice que un jugador *tiene control* del juego si puede obligar a sus adversarios a abrir una cadena larga. Entonces lo que hemos entendido hasta ahora puede resumirse como sigue. Una buena manera de jugar (quizá no la mejor, pero sí efectiva frente a la mayoría de los jugadores) es obtener el control, y luego retenerlo declinando las dos últimas cajas de cada cadena larga. Excepto la última, por supuesto, cuando uno hace mejor tomando también las dos últimas cajas. Si hay varias cadenas largas, lo que es habitual, entonces esta estrategia normalmente funciona muy bien.

En resumen, el juego no trata de cajas como tales: trata de ganar el control. Ahora estamos listos para pasar a la estrategia de Nivel 4. ¿Cómo se hace uno con el control? La clave la tiene una vez más la paridad, pero primero necesitamos otro concepto. Cuando un jugador acepta un dominó rellenando el trazo central, y adquiriendo con ello dos cajas con una jugada, lo llamamos una *doble cruz*. Entonces una estrategia efectiva para obtener el control es:

- Alfredo trata de hacer que el número de puntos iniciales más el número de dobles cruces sea *impar*.
- Beatriz trata de hacer que el número de puntos iniciales más el número de dobles cruces sea *par*.

Podemos establecer esta regla de forma más simple notando que, cualquiera que sea el tamaño de la cuadrícula, el número de puntos más el número de dobles cruces es igual al número total de jugadas en el juego. Un poco de reflexión conduce a:

- Alfredo trata de hacer que el número de puntos iniciales más el número de cadenas largas finales sea *par*.
- Beatriz trata de hacer que el número de puntos iniciales más el número de cadenas largas finales sea *impar*.

Usted puede pensar que esto se está haciendo muy profundo, pero hasta el momento sólo hemos alcanzado la página siete de las 86 de estrategia en el libro de Berlekamp. Otros temas incluyen un juego íntimamente relacionado, llamado Nimstring, y el concepto de nimadición, que es fundamental para muchos juegos pero se necesitaría otro capítulo, si no diez, para describirlo adecuadamente. Cuando haya dominado estas técnicas, usted ganará más frecuentemente en juegos donde la puntuación final sea muy apretada.

Describiré un concepto más, no obstante: *una jugada alocada*. Ésta es una de las siguientes:

- Completar una cadena de longitud 2 de tal modo que el adversario puede crear un dominó (conocida como una *donación tibia*). Véase figura 64.
- Abrir una cadena larga.

- Abrir un lazo de longitud 4 o más.

Puede demostrarse que si su adversario hace una jugada alocada, entonces usted puede asegurarse al menos la mitad de las cajas restantes. Sin embargo, la demostración no es constructiva, es decir, no especifica cómo debería jugar para conseguir ese objetivo. La idea es que en cada caso usted tiene una elección entre dos enfoques, y si una de ellas es buena para su adversario, entonces la otra es buena para usted. Nimstring sirve para arrojar luz sobre qué movimientos son buenos aquí.

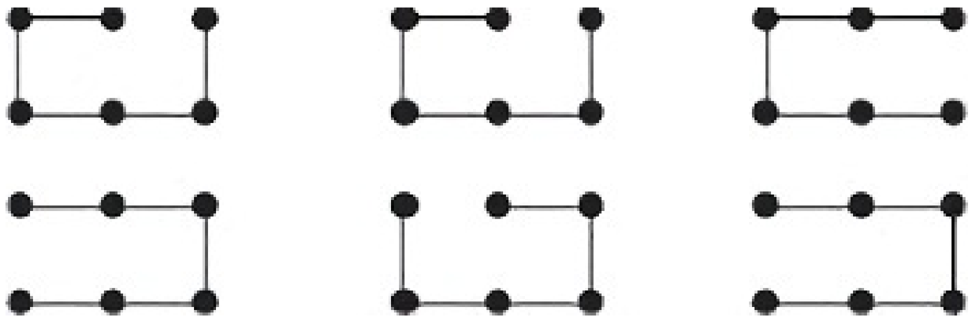
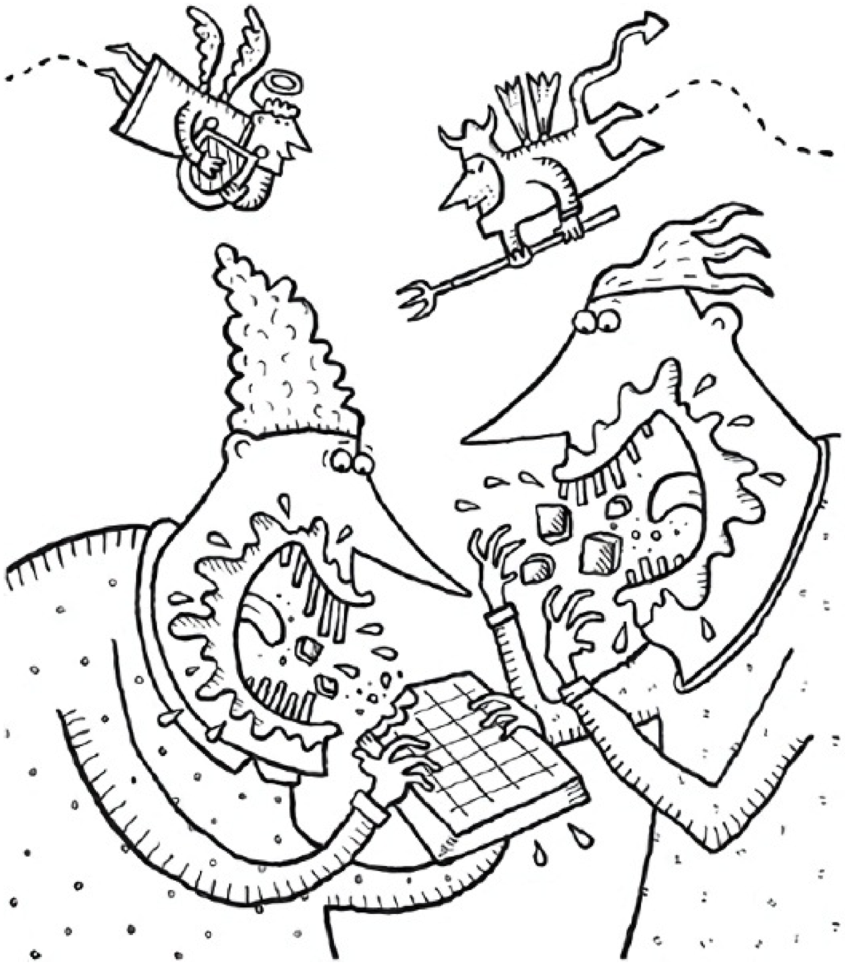


FIGURA 64. Donaciones tibias.

La mayoría de los juegos jugados entre expertos llegan finalmente a una posición en la que todas las jugadas disponibles son alocadas. Éste es el *final de juego alocado*, y matemáticamente se hace muy complejo: Berlekamp lo analiza en profundidad. Ganar un *final de juego alocado* es fundamentalmente una cuestión de ganar el control —de modo que, una vez más, volvemos al control como clave.

El viejo Puntos-y-Cajas es así un juego mucho más sofisticado de lo que la mayoría de nosotros imaginamos; tan sofisticado que no se conoce ninguna estrategia ganadora completa. Berlekamp lo describe como «el juego de niños popular más rico matemáticamente del mundo, por amplio margen». Nunca subestimen el contenido matemático de juegos aparentemente simples.

17
Chupando chocolate campechanamente



Yucky Choccy y Chomp son juegos para adictos al chocolate con reglas muy similares, pero ahí termina el parecido. El primero es un «juego de ensueño» con una fácil estrategia ganadora. El segundo es un «juego de pesadilla»: sabemos que el primer jugador debería ganar siempre si hace las jugadas óptimas, pero no sabemos cuáles son esas jugadas. Estos dos juegos nos enseñan mucho sobre estrategias ganadoras y cómo encontrarlas. O no.

Que un juego tenga reglas simples no implica que deba haber una estrategia simple para ganar. A veces la hay: el juego de tres en raya es un buen ejemplo. Pero a veces no la hay: otro juego de niños, Puntos-y-Cajas, en el que los jugadores trazan por turno aristas en una cuadrícula de puntos y se hacen con los cuadrados que completan, es uno de estos casos (véase el capítulo 16). Llamo a los del primer tipo «juegos de ensueño», y a los otros «juegos de pesadilla», por razones bastante obvias. Juegos con reglas muy similares pueden ser sorprendentemente diferentes en lo que se refiere a su estatus de ensueño o de pesadilla. Y, por supuesto, los juegos de pesadilla son a menudo los más interesantes porque uno puede jugarlos sin saber por adelantado quien debería ganar — o, en algunos casos, sabiendo quien debería ganar pero sin saber cómo puede hacerlo.

Como ilustración de estos hechos sorprendentes, voy a discutir dos juegos basados en barras de chocolate. Uno, «Yucky Choccy» (choco engrudo), es un juego de ensueño. El otro, «Chomp» (masticar), tiene reglas muy similares, pero es un juego de pesadilla —con el asombroso ingrediente extra de que, con juego óptimo, debería ganar siempre el jugador que empieza, pero nadie sabe cómo.

Yo no tengo ni idea de quien inventó yucky choccy: a mí me lo explicó Keith Austin, un matemático británico de la Universidad de Sheffield. Se juega sobre una barra de chocolate idealizada, un rectángulo dividido en cuadrados más pequeños. Los jugadores —les llamaré «Uno» y «Dos» por el orden en que juegan— hacen turnos para partir trozos de chocolate, que se deben comer. Llamamos a esta acción un *movimiento* del juego. El corte debe ser una única línea recta que cruza el rectángulo de un lado a otro a lo largo de las líneas entre los cuadrados. Un cuadrado de una esquina contiene un trozo de jabón, y el jugador que tiene que comerse este cuadrado, pierde. La flecha negra en la figura 65 muestra los movimientos realizados en un juego con una barra 4×4, y las flechas grises muestran todos los demás movimientos que podrían haberse hecho en su lugar. El diagrama entero constituye el árbol del juego para un yucky choccy 4×4. Como veremos inmediatamente, Dos cometió un grave error y perdió un juego que debería haber ganado.

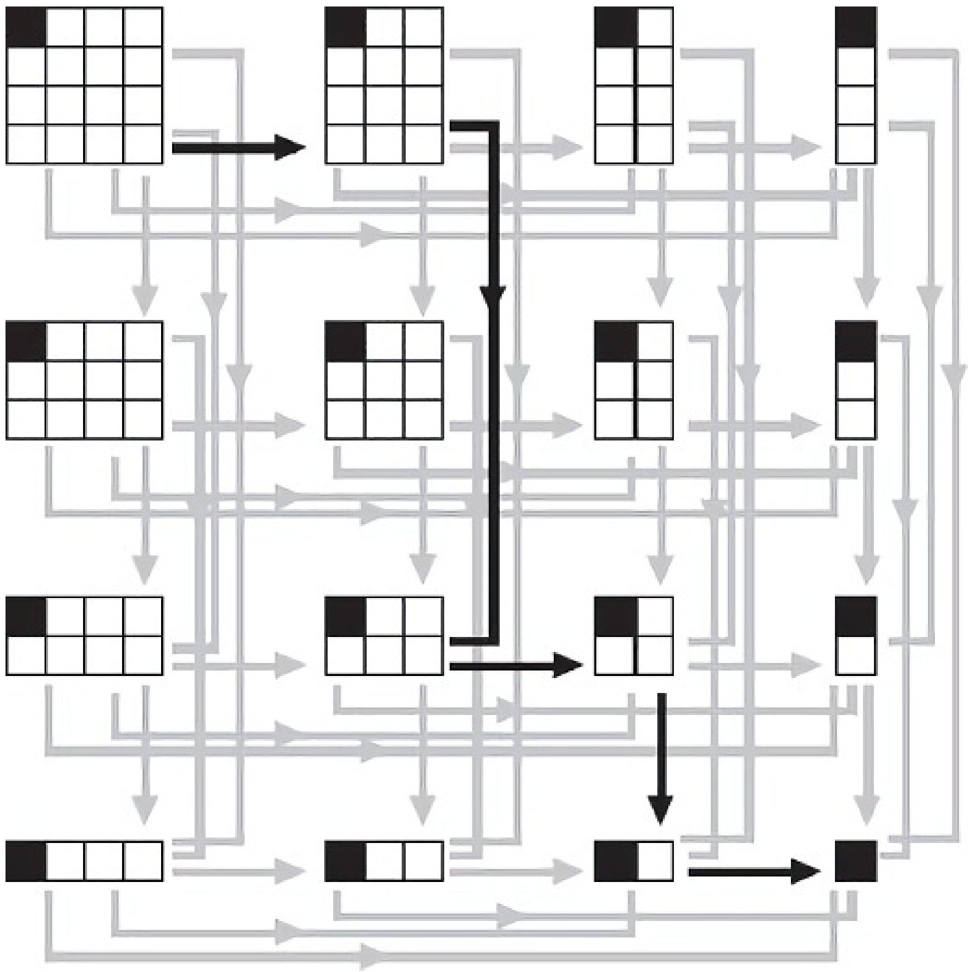


FIGURA 65. Árbol de juego para yucky choccy 4×4. Las flechas indican movimientos legales: el trozo eliminado se come. El cuadrado marcado en negro es el jabonoso. Las flechas sólidas indican un juego real; las flechas difuminadas, movimientos alternativos que podrían haberse hecho en lugar de aquéllos.

Una *estrategia ganadora* es una secuencia de movimientos que fuerza una victoria, sean cuales sean los movimientos que haga el adversario. El concepto de una estrategia implica no sólo un juego, sino a todos los juegos posibles. Cuando usted juega al ajedrez, su plan se centra básicamente en cuestiones «qué pasa si». «Si avanzo mi peón, ¿que podría hacer su reina?». Táctica y estrategia se centran en qué movimientos *podrían* hacer usted o su adversario en el futuro, y no sólo en los movimientos que *realmente* hacen.

Hay una clara teoría de estrategias para juegos «finitos», es decir, juegos que no pueden continuar indefinidamente y en los que el empate es imposible. Se basa en dos principios simples:

(1) Una posición es ganadora si usted puede hacer *algún* movimiento que coloca a su adversario en una posición perdedora.
(2) Una posición es perdedora si *cualquier* movimiento que usted puede hacer coloca a su adversario en una posición ganadora.

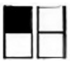
La lógica puede parecer aquí circular, pero no lo es: es recursiva. La diferencia es que con razonamiento recursivo usted tiene un lugar donde empezar. Para ver cómo, utilizaré los dos principios anteriores para encontrar una estrategia ganadora para un yucky choccy 4 × 4. El truco está en empezar desde el final y trabajar hacia atrás, un proceso denominado «podar el árbol del juego».

La simple pieza jabonosa es una posición perdedora. Simbolizaré este hecho mediante el diagrama

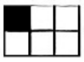
P	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

cuyas entradas se refieren no a una barra de chocolate, sino a las diversas posiciones marcadas en la figura 65. Aquí «P» significa «posición perdedora», «*» significa «todavía no se sabe», y «G» significará «posición ganadora» una vez que haya encontrado una. De hecho, ■□□ ■□□□ son todas posiciones ganadoras, porque usted puede partir todos los cuadrados blancos en un movimiento para dejar a su adversario con la posición perdedora de pieza-simple. De forma equivalente, existen flechas en el árbol del juego que llevan desde dichas posiciones directamente a ■, y por el principio (1) todas estas posiciones son ganadoras. Por razones similares las mismas posiciones rotadas un ángulo recto son también ganadoras, de modo que ahora tenemos que podar todas las ramas del árbol del juego que llevan en un paso al simple cuadrado jabonoso, lo que nos dice el estatus de dichas posiciones:

P	G	G	G
G	*	*	*
G	*	*	*
G	*	*	*

¿Qué pasa con ? Bien, los únicos movimientos que usted puede hacer son  o , y cuando usted elimina el trozo todo-blanco deja una posición ganadora para su adversario. El principio (2) nos dice ahora que es perdedora, de modo que podemos podar una rama más para obtener

P	G	G	G
G	P	*	*
G	*	*	*
G	*	*	*

Esto a su vez implica que , y así sucesivamente son ganadoras (rompa un pedazo para dejar ) lo que lleva a

P	G	G	G
G	P	G	G
G	G	*	*
G	G	*	*

Trabajando hacia atrás de esta manera usted puede deducir finalmente el estatus ganador/perdedor de cualquier posición. La lógica no discurre en círculos, sino en espirales entrelazadas, descendiendo por el árbol del juego desde la hoja a la ramita, desde la ramita a la rama, desde la rama al tallo… De ahí la imagen de la poda. Tenemos que empezar desde el *final*, no obstante, lo que es un fastidio. Lo que realmente queremos hacer es talar de un golpe todo el árbol del juego, a la manera de George Washington, para encontrar el estatus de la posición de apertura; y si es ganadora, descubrir qué movimiento hay que jugar. Para juegos con un árbol pequeño no hay dificultad: podas repetidas dan el estatus de todas las posiciones. En la figura 65 podemos llevar esto a cabo para obtener

P	G	G	G
G	P	G	G
G	G	P	G
G	G	G	P

De modo que la posición 4 × 4, por ejemplo, es perdedora.

Si usted prueba con barras de chocolate más grandes, cuadradas o rectangulares, encontrará rápidamente que emerge la misma pauta: las perdedoras viven a lo largo de la diagonal, todas las otras barras son ganadoras. Ahora bien, las barras en dicha diagonal son las cuadradas 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4. Esto sugiere una sencilla estrategia que deberla aplicarse a barras de cualquier tamaño: los cuadrados son perdedores, los rectángulos son ganadores. Tras advertir esta pauta evidente, podemos comprobar su validez sin recorrer el árbol de juego entero verificando las propiedades (1) y (2). Éste es el razonamiento. Es evidente que todo rectángulo (ganador) puede convertirse siempre en un cuadrado (perdedor) en un movimiento. Por el contrario, cualquiera que sea el movimiento que usted haga empezando con un cuadrado (perdedor), no puede evitar dejar a su adversario un rectángulo (ganador). Además, es cuadrado, y sabemos que es una posición perdedora. Todo esto es consistente con los principios (1) y (2), de modo que trabajando hacia atrás deducimos (recursivamente) que *todo* cuadrado es un perdedor y *todo* rectángulo es un ganador. Ahora vemos que el primer movimiento de Dos en la figura 65 fue un error. Y vemos que yucky choccy es un juego de ensueño independientemente del tamaño que tenga la barra.

En teoría, el mismo procedimiento se aplica a cualquier juego finito. La posición de apertura es la «raíz» del árbol del juego. En el otro extremo están las puntas de las ramitas más exteriores, que terminan en posiciones en las que uno u otro jugador ha ganado. Puesto que sabemos el estatus ganador/perdedor de estas posiciones terminales, podemos trabajar hacia atrás a lo largo de las ramas del árbol del juego utilizando los principios (1) y (2), etiquetando las posiciones «ganadora» o «perdedora» a medida que avanzamos. La primera vez, determinamos el estatus de todas las posiciones que están a un movimiento del final del juego. La siguiente, determinamos el estatus de todas las posiciones que están a dos movimientos del final del juego, y así sucesivamente. Puesto que, por hipótesis, el árbol del juego es finito, finalmente llegamos a la raíz del árbol: la posición de apertura. Si ésta obtiene la etiqueta «ganadora», entonces Uno tiene una estrategia ganadora; si no, la tiene Dos.

Incluso podemos decir, de nuevo en teoría, cuál es la estrategia ganadora. Si la posición de apertura es «ganadora», entonces Uno siempre debería pasar a una posición etiquetada «perdedora», a la que entonces se enfrentará Dos. Debido a que ésta es una posición perdedora, cualquier movimiento que haga Dos presenta a Uno una posición «ganadora». De modo que Uno puede repetir la misma estrategia hasta que el juego termina. Análogamente, si la posición de apertura está etiquetada como «perdedora», entonces Dos tiene una estrategia ganadora —con la misma descripción—. De modo que en juegos finitos y sin empate, trabajar hacia atrás a través del árbol del juego decide en teoría el estatus de todas las posiciones, incluyendo la de apertura. Digo «en teoría» porque los cálculos se hacen intratables si el árbol del juego es grande. E incluso juegos sencillos pueden tener árboles del juego enormes, porque el árbol del juego incluye todas las posiciones y líneas de juego posibles. Esto abre la puerta a los juegos de pesadilla.

Ahora contrastamos el yucky choccy con un juego cuyas reglas son casi las mismas, pero donde rápidamente se hace imposible podar el árbol del juego; y si la poda *es* posible, no revela ninguna pauta que pudiera conducir a una receta estratégica sencilla. Este juego es chomp, inventado hace muchos años por David Gale (Universidad de California en Berkeley) y descrito en su maravilloso libro sobre matemáticas recreativas, *Tracking the Automatic Ant* (véase Lecturas adicionales). Gale describe chomp utilizando un conjunto rectangular de galletas o biscuits, pero yo sigo con el chocolate. (Se juega mejor con un conjunto de botones o similares). Chomp es igual que el yucky choccy, con la única diferencia de que un movimiento legítimo consiste en eliminar un trozo rectangular de chocolate, como en la figura 66. En concreto, un jugador elige uno de los cuadrados componentes y entonces elimina todos los cuadrados en esa fila y columna, junto con todos los cuadrados a la derecha y por encima de aquéllos.

Hay una ingeniosa demostración de que para cualquier tamaño de barra (figura 67a) distinto del 1×1, chomp es una victoria para Uno. Para ello partamos del supuesto de que, por el contrario, Dos tiene una estrategia ganadora. Uno procede entonces eliminando el cuadrado superior derecho (figura 67b). Esto no puede dejar a Dos enfrentándose a una posición perdedora, puesto que estamos suponiendo que la posición de apertura es perdedora para Uno. De modo que, Dos puede jugar un movimiento ganador, algo como la figura 67c, para dejar a Uno enfrentándose a una posición perdedora. Pero en tal caso, Uno podría haber jugado la figura 67d, dejando a Dos enfrentado a la misma posición perdedora. Esto contradice la hipótesis de que Dos tiene una estrategia ganadora, de modo que la hipótesis debe ser falsa. Por consiguiente, Uno tiene una estrategia ganadora.

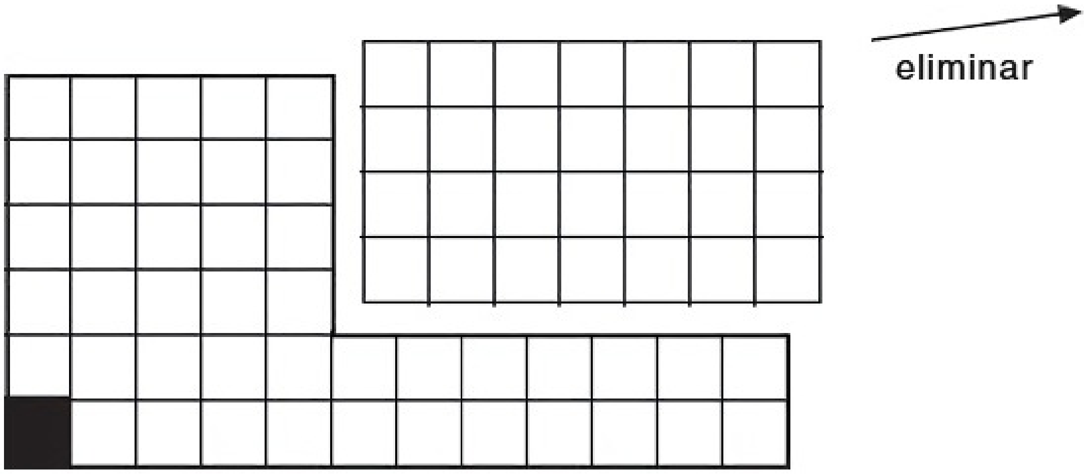


FIGURA 66. Movimiento típico en chomp.

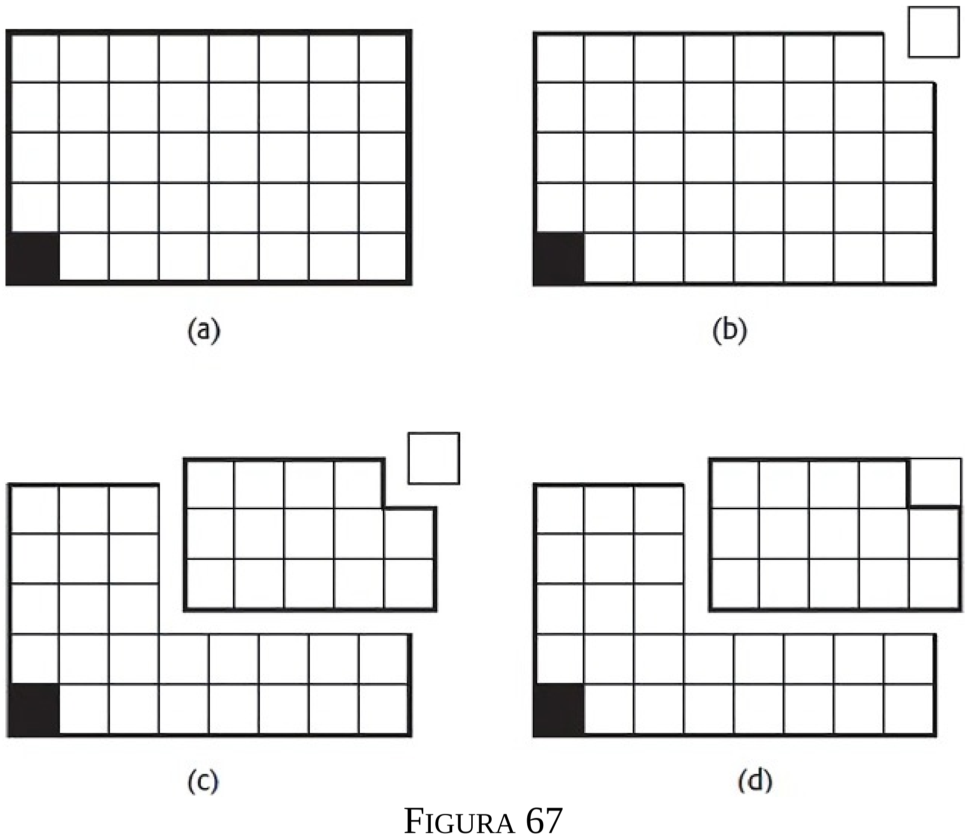


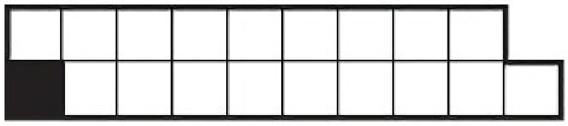
FIGURA 67

(a) Barra de chomp lista para robo de estrategia.
(b) Si Uno hace esto…
(c) …y Dos hace un supuesto movimiento ganador…

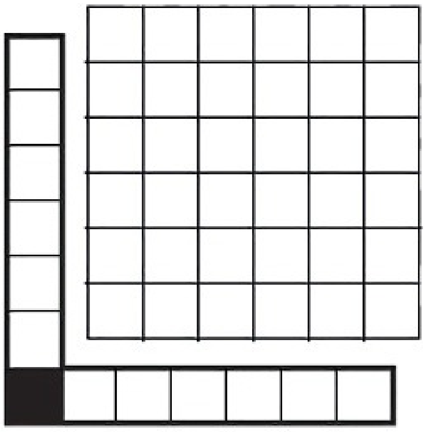
(d) …entonces, Uno podría haber jugado el movimiento de Dos en primer lugar.

Las pruebas de este tipo se denominan «robo de estrategia». Si Uno puede hacer un movimiento «tonto», con intención de pasar a ser el segundo jugador y ganar siguiendo lo que debería ser una estrategia ganadora para Dos, entonces Dos no podría haber tenido una estrategia semejante con la que empezar —lo que implica que Uno debe haber tenido una estrategia ganadora—. La ironía de este método de demostración, cuando funciona, es que ¡no ofrece ninguna clave de cuál debería ser la estrategia ganadora de Uno!

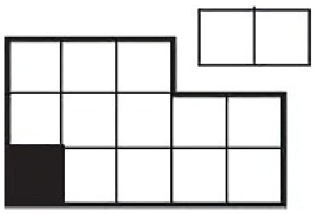
En el caso de chomp no se conocen estrategias ganadoras detalladas, excepto en algunos casos sencillos. En el caso $2 \times n$ (o $n \times 2$), Uno siempre puede asegurar que Dos se enfrenta a una posición que es un rectángulo menos una simple esquina cuadrada (figura 68a). En el caso $n \times n$, Uno elimina todo excepto un borde con forma de L (figura 68b), y después de eso copia cualquier movimiento que haga Dos, pero reflejado en la diagonal. Se conocen otros pocos casos: por ejemplo en chomp 3×5 el único movimiento ganador para Uno es la figura 68c. «El» movimiento ganador no tiene por qué ser único: en el juego 6×13 hay dos movimientos ganadores diferentes.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 68. Movimientos ganadores en:

(a) chomp $2 \times n$
(b) chomp $n \times n$

(c) chomp 3 × 5

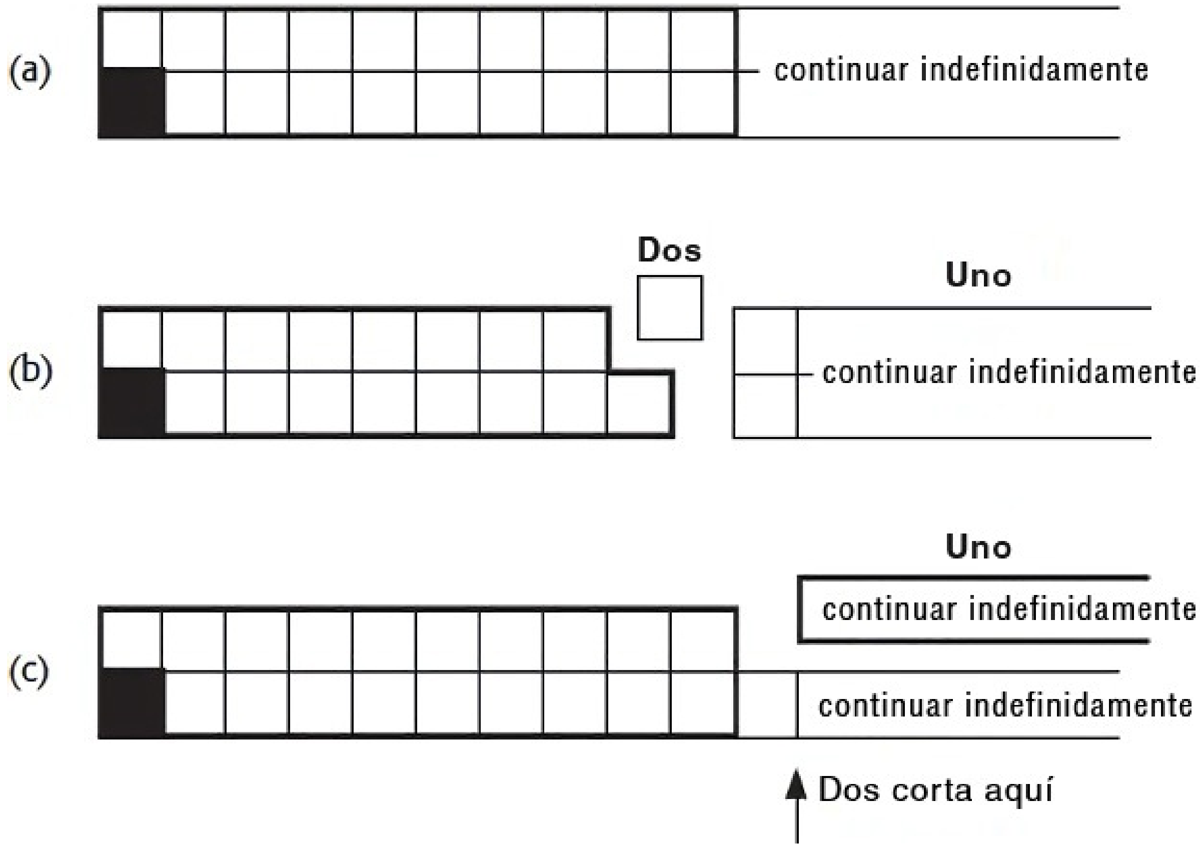
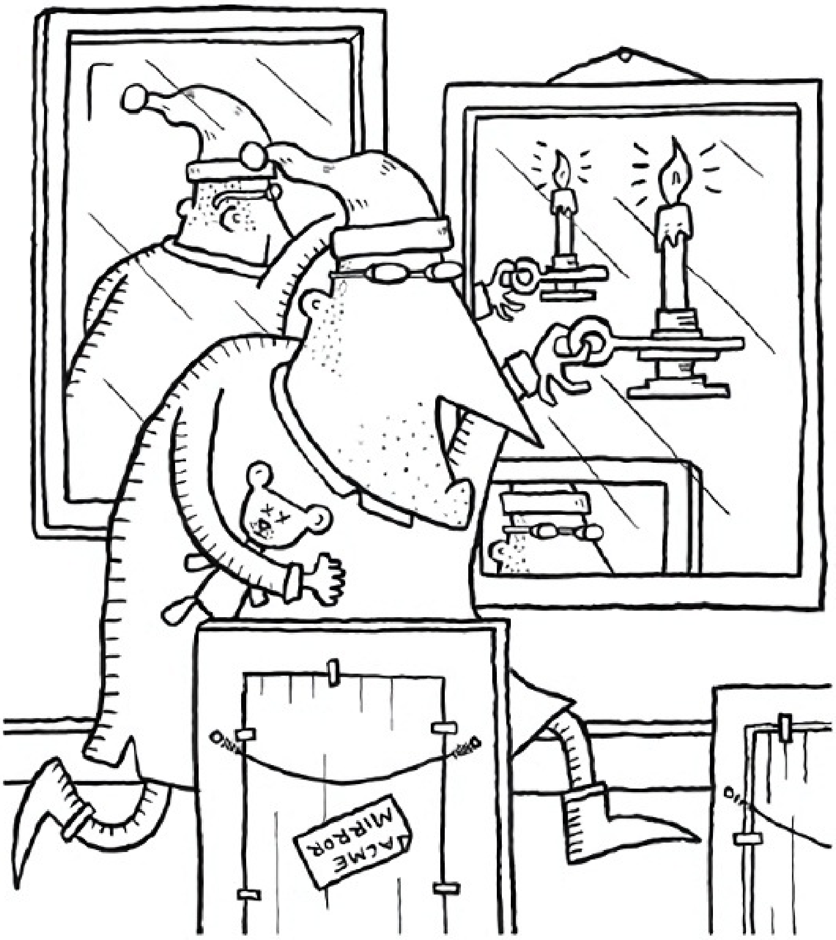


FIGURA 69. Cómo gana Dos en chomp 2 × ∞:

(a) Inicio.
(b) Un tipo de juego posible para Uno y su réplica.
(c) El otro tipo de juego posible para Uno y su réplica.

Más información sobre posiciones chomp puede encontrarse en *Winning Ways* de Berlekamp, Conway y Guy (véase Lecturas adicionales). Chomp también puede jugarse con una barra de chocolate infinita, en cuyo caso, paradójicamente, sigue siendo un juego finito porque después de muchos movimientos sólo queda una porción finita de barra. Pero hay un cambio: Dos puede ganar a veces. Esto sucede, por ejemplo, con la barra 2 × ∞ La figura 69 muestra que, haga lo que haga Uno, Dos puede elegir una réplica que lleva a la figura 68a, que ya sabemos que es perdedora. Estrictamente hablando, yo debería ser aquí más cuidadoso. Por «∞» entiendo realmente el conjunto de enteros positivos en su orden habitual, lo que los teóricos de conjuntos simbolizan como ω («omega») y llaman «primer ordinal infinito». Hay muchos otros ordinales infinitos, pero sus propiedades son demasiado técnicas para describirlas aquí: ver el libro de Gale para más detalles. Chomp puede jugarse en conjuntos doblemente infinitos de ordinales, o en tres o más dimensiones: en conjunto, se sabe poco sobre estrategias ganadoras para estas generalizaciones.

18
Arrojando un poco de oscuridad



Si dos personas están en una sala de espejos y una de ellas enciende una cerilla, ¿puede la otra verla siempre —reflejada en alguna serie de espejos, quizá muy, muy tenue, pero aun visible si es suficientemente brillante—? Con espejos curvos, la respuesta es «no». Pero ¿qué pasa si son planos? En 1995 se demostró que también en este caso la respuesta es «no». Como parece apropiado, la demostración implica un astuto uso de las reflexiones.

Ángela se encuentra en una sala de espejos, una habitación cuyas paredes son perfectamente reflectantes. En otro lugar de la habitación, su amigo Bruno enciende una cerilla. ¿Es cierto que, no importa donde ellos estén, Ángela puede ver siempre la cerilla o uno de sus reflejos, con tal de que mire en la dirección correcta? De forma equivalente, ¿es la habitación «iluminable desde cualquier punto» en el sentido de que la luz de la cerilla llena toda la habitación —sin dejar siquiera un punto aislado— independientemente de dónde esté situada la cerilla?

Este problema fue planteado en prensa por primera vez por Victor Klee en 1969, pero se piensa que su origen se remonta a mucho antes, al menos a Ernst Straus en los años cincuenta del siglo pasado. Tiene diversas variantes: la habitación puede ser simplemente un plano bidimensional, o tener una forma genuinamente tridimensional: en este último caso, su suelo y su techo —y con más generalidad, todas sus superficies interiores— deben ser también espejos. En cualquiera de los dos casos podemos plantear la cuestión para habitaciones con paredes planas —polígonos en dos dimensiones, poliedros en tres— o con paredes curvas. En todas las versiones del problema, la idealización matemática estándar reemplaza el ojo de Ángela y la llama de Bruno por puntos, que no yacen en el contorno cubierto de espejos de la habitación, y se supone que ambos, Ángela y Bruno, son transparentes. La ley de reflexión en cualquier parte del contorno es la habitual: «ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión». Dichos ángulos están definidos sólo en puntos del contorno que poseen una tangente única, de modo que es costumbre suponer que la luz que incide en cualquier punto del contorno sin una tangente única (tal como un vértice de un polígono o de un poliedro, un lugar donde el contorno cambia abruptamente de dirección) es «absorbida» y ya no sigue viajando.

En 1958, L. Penrose y Roger Penrose ofrecieron una respuesta negativa, que describiré más adelante, para el caso de dos dimensiones. Esta respuesta requería contornos curvos. El problema para habitaciones planas poligonales siguió abierto hasta muy recientemente. Su solución fue publicada por George Tokarsky en el número de diciembre de 1995 de *The American Mathematical Monthly* (véase Lecturas adicionales). Su elegante demostración implica apropiadamente un «truco de reflexión» y, como las mejores matemáticas, es sorprendentemente simple. El mismo tipo de truco de reflexión es ampliamente utilizado en matemáticas. Tokarsky generaliza su método para ofrecer muchos otros ejemplos en dos y tres dimensiones en los que habitaciones de lados planos no son iluminables desde todos los puntos.

La idea clave consiste en empezar con un triángulo rectángulo isósceles: un cuadrado dividido por la mitad a lo largo de su diagonal, con un ángulo de 90° y dos de 45°. Un triángulo semejante puede «desplegarse» en una pauta reticular regular (figura 70) reflejándolo repetidamente sobre sus tres lados. Si usted construyera una habitación cuya planta fuera de esta misma forma triangular y cuyas paredes fueran espejos, y permaneciera en su interior, entonces las paredes tendrían un efecto caleidoscópico y usted «vería» esta pauta reticular.

El retículo se utiliza para probar un hecho clave: si se coloca una cerilla en uno de los ángulos de 45° de una habitación con la forma de este triángulo y con espejos como paredes, entonces ningún rayo que emane de ella puede volver a la cerilla por muchas veces que rebote en los espejos. Para ver por qué, observemos que cualquier rayo semejante, por ejemplo el marcado ABCD, puede ser desplegado de la misma forma que el triángulo. Por ejemplo, el segmento BC en el interior del triángulo se despliega en BC′ al otro lado de la pared, y continuando el proceso CD se despliega en C′D′. De modo que aquí, ABCD se despliega para dar ABC′D′. La ley de reflexión implica que el rayo desplegado ABC′D′ es una línea recta, y este hecho es crucial para todo lo que sigue.

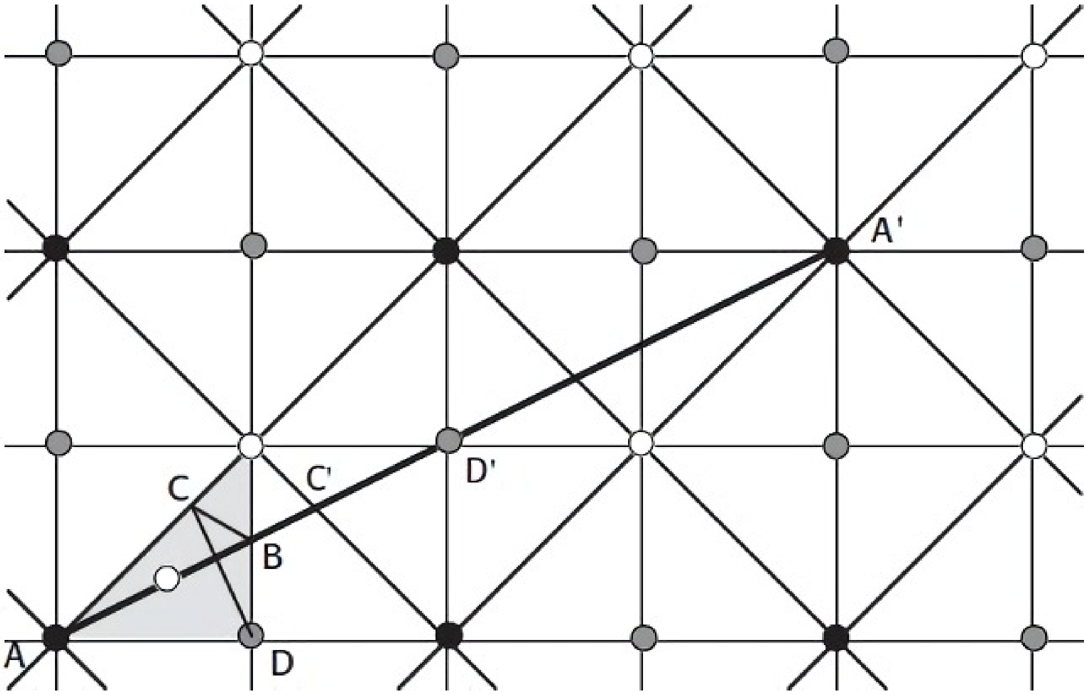


FIGURA 70. Un triángulo rectángulo isósceles (sombreado) se «despliega» por reflexión repetida para formar un retículo: los puntos muestran la correspondencia entre puntos del retículo y vértices del triángulo. Un rayo de luz tal como ABCD también se despliega, para dar un camino en línea recta ABC′D′. Cualquier supuesto rayo de luz que vaya de A a de nuevo A se despliega análogamente para dar una línea recta tal como AA′. Sin embargo, esta línea debe atravesar un punto gris o un punto blanco del retículo (aquí D′) de modo que el rayo original debe incidir en un vértice y ser absorbido.

Hemos coloreado los tres vértices del triángulo de modo que el vértice A en un ángulo de 45° es negro, el otro vértice de 45° es blanco, y el vértice en 90° es gris. El camino ABCD ilustrado termina en D porque ésa es una esquina del triángulo: dicho de otra forma, el punto «desplegado» D′ yace en el retículo. Argumentamos que si hubiera un camino que llevara de A a de nuevo A, entonces lo mismo sucedería necesariamente —lo que implica que no puede existir un camino semejante.

Para demostrarlo, imaginemos que tenemos un camino de A a A, y lo desplegamos para obtener un camino en línea recta desde A a algún punto A′ en el retículo. Puesto que A′ se pliega para dar A, se sigue que A′ es uno de los puntos negros en el retículo. Ahora bien, los puntos negros están espaciados un número *par* de unidades de retículo tanto en la dirección horizontal como en la vertical: sus coordenadas son enteros pares. Esto implica que en alguna parte a lo largo del camino AA′ debe haber un punto del retículo que es o blanco o gris. Este hecho es obvio si el espaciado horizontal o el vertical es el doble de un número impar, porque entonces el punto medio de AA′ tiene al menos una coordenada que es un entero impar y es, por lo tanto, un punto gris o blanco del retículo. Este argumento falla si ambas coordenadas de A′ son múltiplos de cuatro, pero entonces el punto medio A″ de AA′ es un punto negro del retículo y podemos repetir el argumento con AA″. O bien el punto medio A‴ de AA″ es un punto gris o blanco del retículo, o *también* A″ tiene ambas coordenadas múltiplos de cuatro. Si es esto último, podemos reemplazar A″ por el nuevo punto medio A‴, y así sucesivamente. Después de muchos de tales reemplazamientos, debe aplicarse el primer caso del argumento. Por ejemplo, si las coordenadas de A′ son 48 en horizontal y 28 en vertical, entonces A″ tiene coordenadas (24,14). El punto medio de AA″ tiene coordenadas (12,7) y es, por lo tanto, un punto gris o blanco del retículo.

Tras establecer que *cualquier* camino desplegado que une A con un punto negro del retículo debe incidir en un punto gris o blanco del retículo, ahora plegamos de nuevo el camino para concluir que el camino original dentro del triángulo incide en una de las otras dos esquinas (y es así absorbido) antes de que vuelva a A. Eso es lo que queríamos establecer.

Podemos construir habitaciones poligonales ajustando segmentos horizontales, verticales o diagonales del retículo dibujado en la figura 70. Supongamos que un rayo de luz rebota dentro de dicha habitación, partiendo de un punto negro (Bruno), terminando en un punto negro diferente (Ángela), y rebotando en las paredes de acuerdo con la ley de reflexión a ángulos iguales. Entonces podemos plegar ese camino para obtener un rayo de luz en el triángulo rectángulo equilátero original que generó el retículo. Sin embargo, acabamos de establecer que cualquier camino semejante debe incidir en un vértice gris o blanco, y desplegando de nuevo concluimos que el camino original debe incidir en un punto gris o blanco del retículo. De modo que cualquier rayo de luz que parte de Bruno, rebota en las paredes especulares y termina en Ángela, debe encontrar un punto gris o blanco en su camino. Supongamos que nos las arreglamos para que se cumplan las tres condiciones siguientes:

- Los dos puntos negros (que representan a Ángela y Bruno) están en el interior de la habitación.
- Ningún punto gris o blanco yace en el interior de la habitación.
- Todo punto gris o blanco en el contorno de la habitación yace en un vértice.

Entonces, cualquier rayo que incida en un punto gris o blanco debe incidir en un vértice, y ser así absorbido; luego no existe ningún rayo de luz semejante.

Un ejemplo de una habitación semejante se da en la figura 71. Si usted trata de diseñar tales habitaciones encontrará que requiere cierta dosis de ingenio para asegurar que se respetan las tres reglas anteriores. Es más fácil de lo que usted pueda pensar tener puntos reticulares grises o blancos en el contorno pero que no estén en un vértice, por ejemplo, de modo que hay que añadir triángulos extra para introducir codos adicionales en el contorno; y, a menos que sea cuidadoso, estos codos pueden crear puntos reticulares interiores extra indeseados porque violan la segunda regla… Pero con un poco de cuidado es bastante fácil.

La habitación mostrada en la figura 71 está construida a partir de 39 copias reflejadas del triángulo rectángulo isósceles además del original. El artículo de Tokarsky incluye una con sólo 29 triángulos componentes. ¿Puede usted encontrarla? ¿Puede alguien hacerlo mejor? ¿Qué hay de minimizar el número de aristas? Tokarsky también desarrolla una teoría similar para habitaciones obtenidas «desplegando» un cuadrado en lugar de un triángulo rectángulo isósceles (figura 72a), triángulos de otras formas (figura 72b), y habitaciones tridimensionales obtenidas utilizando principios de reflexión similares.

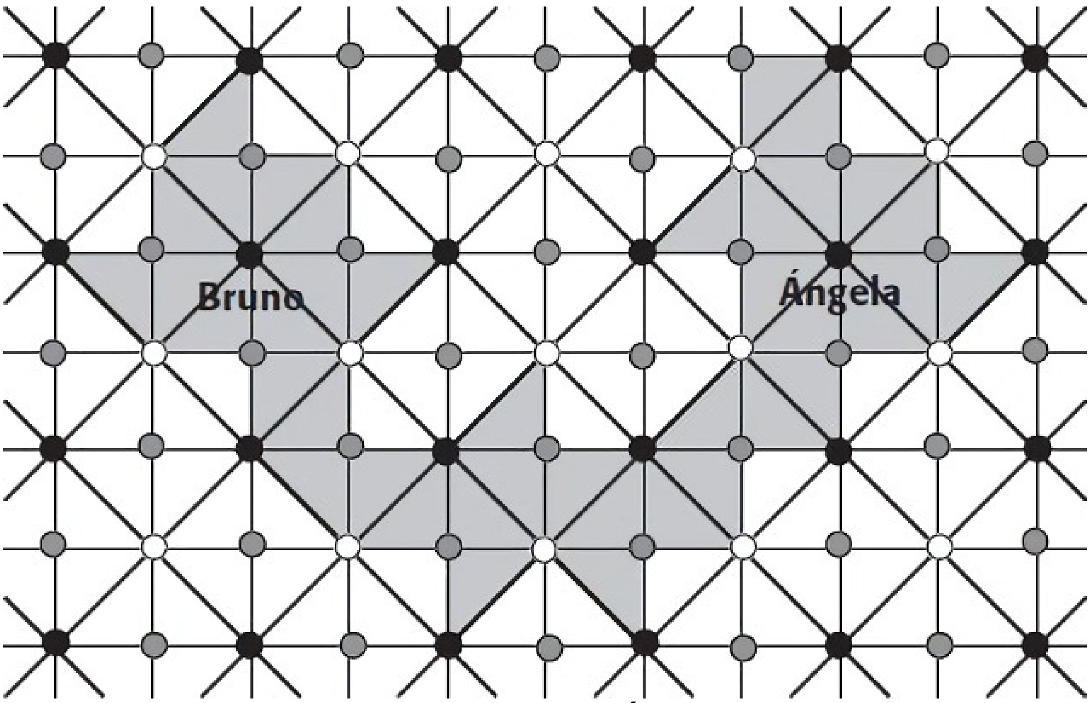


FIGURA 71. Una sala de espejos en la que Ángela no puede ver la cerilla de Bruno.

Estos ejemplos muestran que en una habitación poligonal pueden existir posiciones para una cerilla que no iluminan todo punto de la habitación. Sin embargo, todo lo que hemos demostrado es que al menos un punto no es iluminado. ¿Es posible que haya toda una *región* de área no nula que no sea iluminada? Este problema es bastante más difícil —por ejemplo, en la figura 70 no queda claro, y ciertamente no lo hemos probado, que rayos que parten de Bruno no puedan pasar tan cerca como queramos de Ángela—. Todo lo que sabemos es que no pueden dar en ella *exactamente*. Parece que la respuesta no se conoce para habitaciones poligonales; pero si la habitación tiene lados curvos, entonces un ingenioso argumento debido a los Penrose muestra que pueden existir regiones no iluminadas. Recordemos que la curva conocida como elipse tiene dos puntos especiales conocidos como *focos* (figura 73a). Puede demostrarse que cualquier rayo de luz que pasa entre los dos focos y rebota en la curva pasará de nuevo entre los dos focos antes de que incida de nuevo en la curva. Por «pasar entre» los focos entendemos «cruzar la línea recta que los une». Teniendo en cuenta esta propiedad, es fácil comprobar que la habitación de la figura 73b tiene regiones no iluminables. En concreto, los rayos que se originan en la región sombreada etiquetada Bruno nunca pueden entrar en la débilmente sombreada etiquetada Ángela.

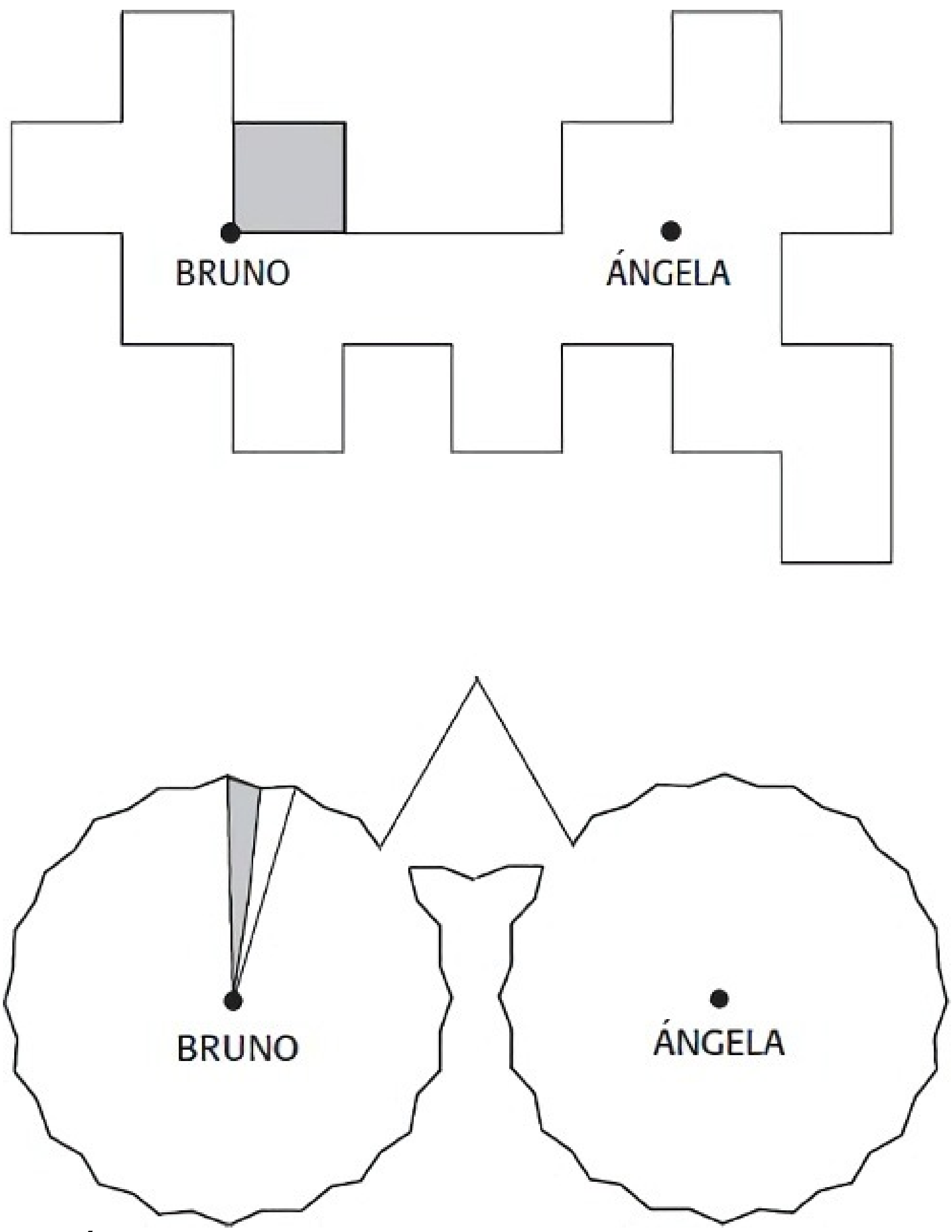


FIGURA 72. Ángela tampoco puede ver la cerilla de Bruno en habitaciones formadas reflejando

(a) cuadrados y
(b) triángulos cuyos lados son 9° 72° y 99°

En una carta, Tokarsky me envió otros muchos ejemplos y algunas generalizaciones. Entre ellos están los siguientes. Existen habitaciones poligonales en las que usted no puede verse reflejado (si usted es un punto), por ejemplo la figura 74. Existe una habitación no iluminable con 24 lados, menos lados que los ejemplos antes listados (figura 75). Y aunque todos los ejemplos de habitaciones no iluminables que les he mostrado hasta ahora tienen un número par de lados, hay una con 27 lados, un número impar (figura 76).

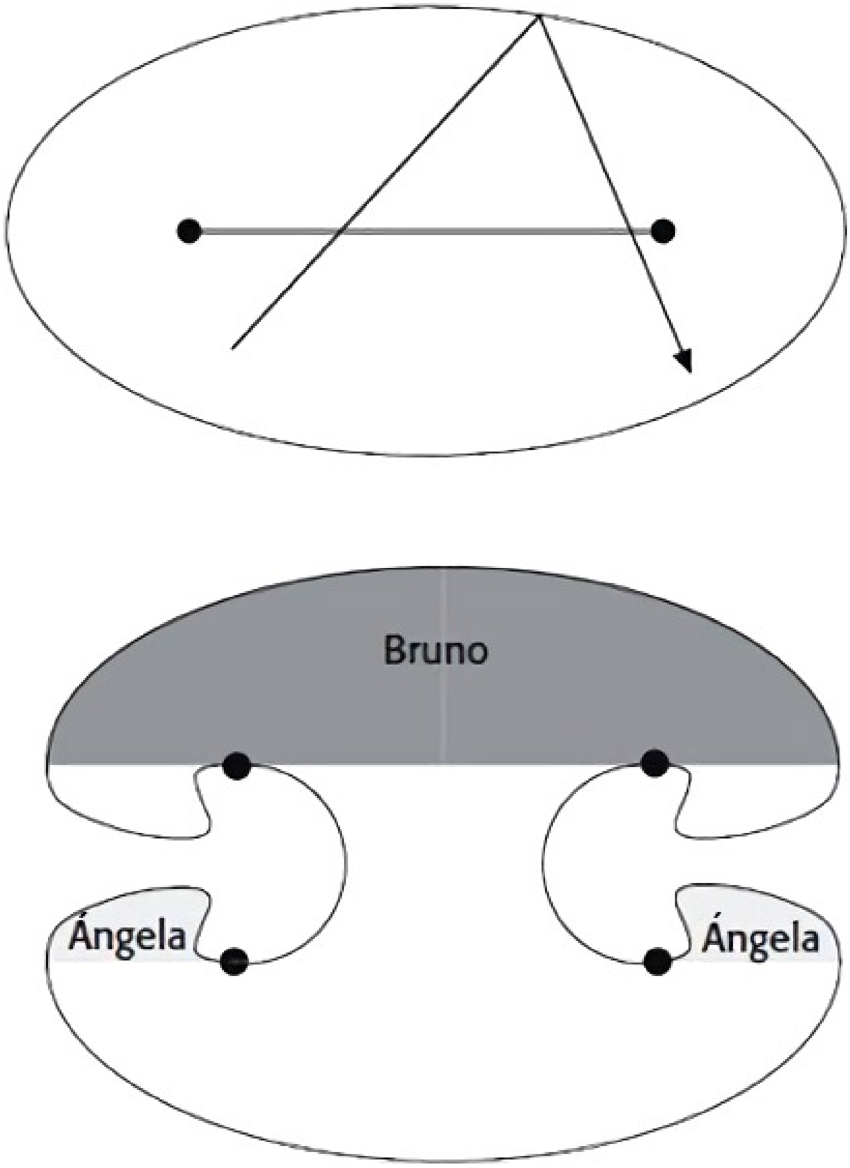


FIGURA 73

(a) Un rayo que pasa entre los focos de una elipse es reflejado de nuevo entre ellos.
(b) Dos semi-elipses con focos como los que se muestran, unidas por curvas onduladas cuya forma exacta es irrelevante. Ningún rayo originario de la región «Bruno» puede alcanzar nunca cualquiera de las regiones «Ángela».

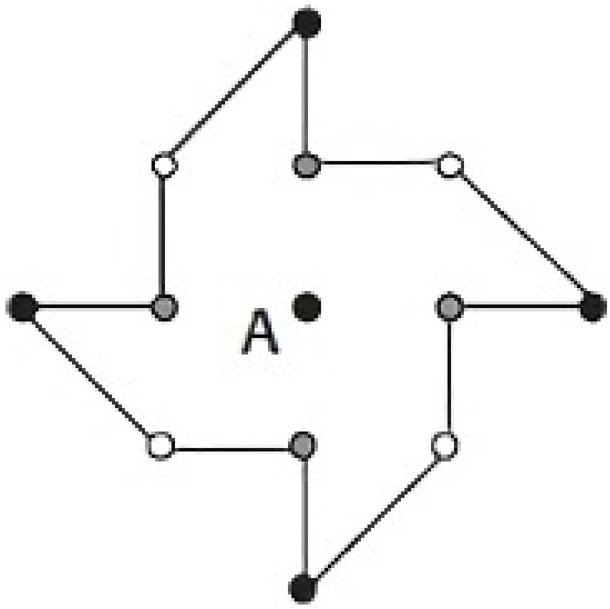


FIGURA 74. Habitación en la que usted no puede verse a sí mismo reflejado, si usted es un punto en A.

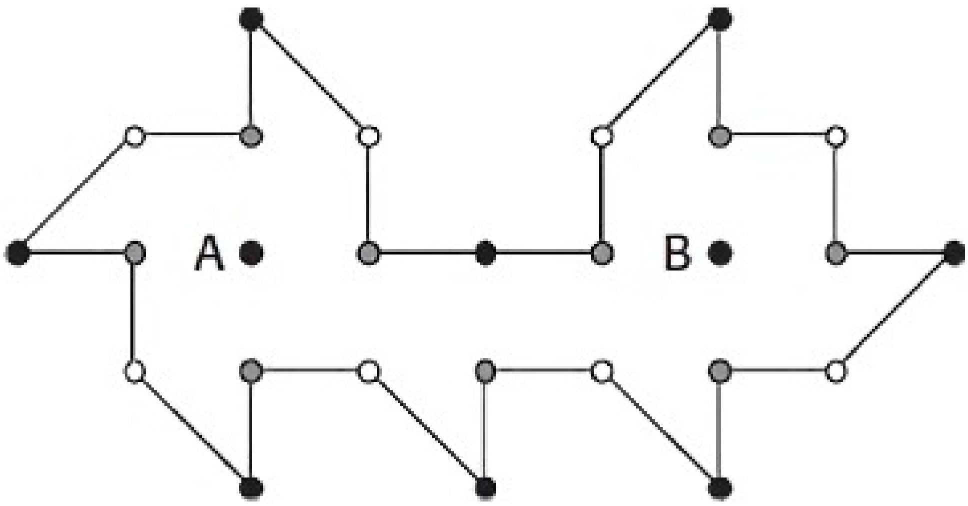


FIGURA 75. Habitación no iluminable con 24 lados.

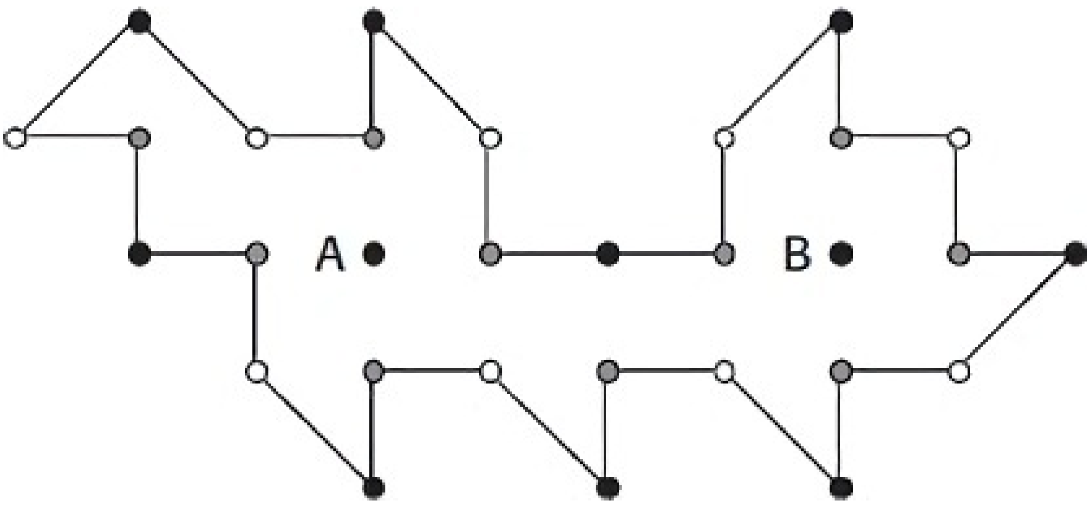
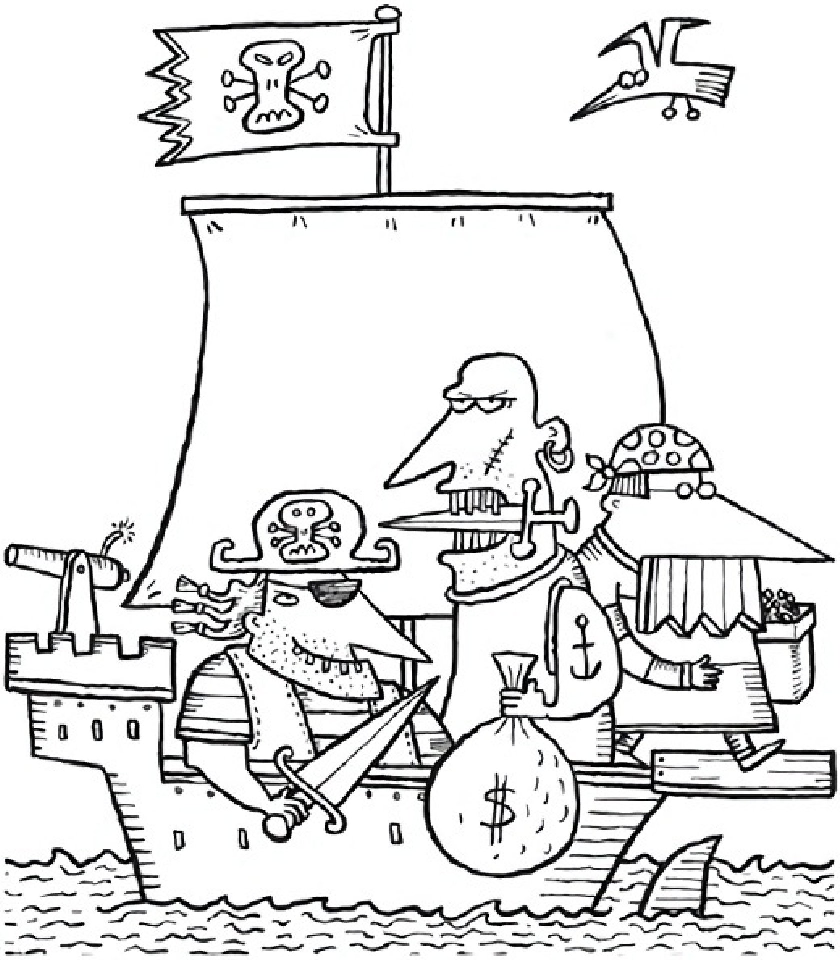


FIGURA 76. Habitación no iluminable con 27 lados, un número impar.

Existen muchos problemas similares, algunos resueltos, otros no. J. Rauch ha demostrado que existe una habitación curvada, cuyo contorno tiene una tangente en todos los puntos salvo uno, que requiere infinitas cerillas para iluminar todos los puntos. También ha demostrado que para un número finito de cerillas existe una habitación, cuyo contorno tiene una tangente en todos los puntos, que no puede ser iluminada por esas cerillas. Y J. Pach ha planteado la muy elegante cuestión: si usted enciende una cerilla en un bosque de árboles perfectamente reflectantes, ¿debe ser visible la luz desde el exterior? Aquí los árboles pueden modelarse, por ejemplo, como círculos, y el problema se plantea en el plano. No se conoce la respuesta.

19
Apuradas piruetas entre piratas



Los piratas son crueles, pero democráticos. Cuando reparten el botín de su último asalto, el más cruel propone una forma de dividirlo y todos votan. Si pierde la votación, el autor de la propuesta camina por la plancha y el siguiente pirata más cruel hace una nueva propuesta, y así sucesivamente. Con diez piratas y cien piezas de oro ¿qué propuesta da al pirata más cruel su parte más grande? ¿Y qué pasa si hay quinientos piratas pero sigue habiendo sólo cien piezas de oro? Las respuestas son sorprendentes —y todavía más es el hecho de que las haya.

La lógica de las matemáticas lleva a veces a conclusiones aparentemente extrañas. La regla en este caso es que con tal de que la lógica no tenga agujeros, las conclusiones son válidas. Si entran en conflicto con su intuición, entonces o bien su intuición es buena en un contexto diferente (pero no en el que se está considerando) o usted tiene que refinar su intuición.

En septiembre de 1998, Stephen M. Omohundro me envió un acertijo que cae exactamente en esta categoría. El acertijo fue ideado por Steven Landsberg (Universidad de Illinois, Urbana-Champaign), y Omohundro dio con una variante en la que la lógica se hace sorprendentemente retorcida y las conclusiones son extraordinarias.

Primero, la versión original del acertijo.

Diez piratas se han hecho con un tesoro de cien piezas de oro y quieren repartir el botín entre ellos. Son piratas democráticos, a su manera, y tienen la costumbre de hacer los repartos del siguiente modo. El pirata más cruel hace una propuesta de reparto, y todos votan; cada uno tiene un voto, incluido el proponente. Si obtiene un cincuenta por 100 o más de votos a favor, la propuesta se aprueba y es puesta en práctica. De lo contrario, el proponente es arrojado por la borda y se repite el procedimiento con el siguiente pirata más cruel.

Todos los piratas disfrutan arrojando a gente por la borda, pero si se les da a elegir prefieren dinero contante y sonante. No les gusta que sean ellos mismos los arrojados por la borda. Todos los piratas son racionales, saben que los otros piratas son racionales, saben que ellos saben que… y todo eso. A diferencia de otros acertijos de una forma aparentemente similar (véase el capítulo 1), esto no depende de la revelación de algún elemento de «conocimiento común». Cualquier conocimiento común es ya comúnmente conocido. Además, no hay dos piratas igualmente crueles, de modo que hay un «orden de picoteo» preciso, que es conocido por todos ellos. Por último, las piezas de oro son indivisibles y no se permiten arreglos para compartir piezas (puesto que ningún pirata confía en que sus colegas respeten un arreglo de este tipo). Cada uno se vale por sí mismo.

¿Qué propuesta maximizará la ganancia del pirata más cruel?

La aportación de Omohundro consiste en hacer la misma pregunta pero con quinientos piratas en lugar de diez. (Las piezas de oro siguen siendo cien). Por conveniencia numeramos los piratas de 1 hacia arriba en orden de menor a mayor agresividad, de modo que el pirata más pacífico es el número 1, el siguiente más pacífico es el número 2, y así sucesivamente. El pirata más cruel tiene así el número más alto y las propuestas proceden en orden numérico inverso de arriba a abajo.

Siguiendo a Omohundro, voy a tratar de convencerle de que la respuesta a la versión del problema con diez piratas es ésta: el pirata 10 propone quedarse con 96 piezas, dar una pieza a cada uno de los piratas 8, 6, 4 y 2, y ninguna a los piratas con número impar. Por el contrario, la respuesta a la versión con quinientos piratas implica que los primeros 44 piratas son arrojados por la borda, después de lo cual el pirata número 456… pero corro el riesgo de revelar demasiado, así que usted tendrá que esperar para el resto.

Como vimos en el capítulo 17, el secreto para analizar todos estos juegos de estrategia consiste en trabajar hacia atrás desde el final. Cuando está en el final, usted sabe qué decisiones son buenas y cuáles son malas. Habiendo establecido esto, usted puede transferir dicho conocimiento a la penúltima decisión, luego a la antepenúltima, y así sucesivamente. Partiendo desde delante, en el orden en que realmente se toman las decisiones, usted no llegará muy lejos. La razón es que todas las decisiones estratégicas son respuestas a preguntas del tipo «¿Qué hará la persona siguiente si yo hago *esto*…?», de modo que las decisiones que siguen a la suya son importantes. Las que vienen antes de la suya no lo son, porque usted no puede hacer nada que las afecte de ninguna manera.

Teniendo esto en cuenta, el lugar donde empezar es cuando (¡y si!). el juego se reduce a sólo dos piratas, P1 y P2. El pirata más cruel es P2, y (si el juego llega alguna vez tan lejos) su decisión óptima es obvia: proponer cien piezas para sí mismo y ninguna para P1. Su propio voto es el cincuenta por 100 del total, de modo que gana. Añadamos ahora al pirata P3. El pirata P1 sabe —y P3 sabe que él sabe— que si la propuesta de P3 es rechazada, entonces él, P1, no obtendrá nada. De modo que P1 votará a favor de cualquier cosa que proponga P3, con tal de que le dé más que nada. Por lo tanto, P3 utiliza la mínima cantidad de oro posible para sobornar a P1, lo que lleva a la siguiente propuesta: 99 para P3, 0 para P2 y,1 para P1. Escribámoslo de esta forma:

P1	P2	P3
1	0	99

Los procesos mentales de P4 son similares. Él necesita el cincuenta por 100 de los votos, de modo que de nuevo necesita ganarse exactamente un pirata. El soborno mínimo que utiliza es una pieza de oro, y puede ofrecérsela a P2, puesto que P2 no obtendrá nada si la propuesta de P4 fracasa y la de P3 sale adelante. De modo que el reparto aquí propuesto se convierte en:

P1	P2	P3	P4
0	1	0	99

Los procesos mentales de P5 son ligeramente más sutiles. Necesita sobornar a dos piratas. El mínimo soborno que puede utilizar son dos piezas de oro, y la única manera de que pueda tener éxito con este número es proponer el siguiente reparto:

P1	P2	P3	P4	P5
1	0	1	0	98

El análisis procede de la misma manera: hay una receta unívoca para cada propuesta que consiste en dar al proponente el máximo número de piezas posible, sujeto a la condición de asegurarse un voto favorable. Finalmente llegamos al décimo pirata y encontramos el reparto:

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
0	1	0	1	0	1	0	1	0	96

Ésta es la propuesta que indiqué antes, y resuelve el acertijo de diez piratas.

Ahora viene la variante de Omohundro: ¿Qué pasa si hay (muchos) más piratas? Evidentemente persiste la misma pauta… durante un rato. De hecho persiste hasta el pirata doscientos. P200 no ofrecerá nada a los piratas con número impar P1-P199, y ofrecerá una pieza de oro a cada uno de los piratas con número par P2-P198, quedándose una para sí mismo.

No obstante, estamos tratando de encontrar la estrategia para P500. A primera vista, el argumento se viene abajo en P200, porque P201 ya no puede sobornar a nadie más. Sin embargo, él aún tiene un interés personal en no ser arrojado por la borda, de modo que puede proponer no quedarse con nada:

P1	P2	P3	P4	…	P197	P198	P199	P200	P201
1	0	1	0	…	1	0	1	0	0

Esto abre una nueva fase de la estrategia, porque el pirata 202 sabe que P201 tiene que aceptar quedarse sin nada, o será arrojado por la borda. De modo que puede contar con el voto de P201. Sin embargo, P202 también está obligado a aceptar quedarse sin nada. Él debe utilizar las cien piezas de oro para sobornar a cien piratas, y éstos deben estar entre aquellos que obtendrían cero según la propuesta de P201. Puesto que hay 101 de estos piratas, la propuesta de P202 ya no es única. Utilicemos una estrella para marcar a los piratas que *podrían* obtener algo de la propuesta de P202:

P1	P2	P3	P4	…	P197	P198	P199	P200	P201	P202
0	*	0	*	…	0	*	0	*	*	0

En este punto entra en acción una consideración adicional. Los piratas tienen que pensar en cómo reaccionará un pirata que tiene alguna *oportunidad* de recibir una pieza de oro si efectivamente se le ofrece una pieza de oro. Esto depende de cuánto dinero, en promedio, está dispuesto a sacrificar por el gusto de arrojar a alguien por la borda. El acertijo no especifica esto, de modo que es razonable suponer que los piratas no lo saben. Esto significa que el soborno *podría* tener éxito, de modo que es racional ofrecer decididamente una pieza a un pirata que sólo tiene una oportunidad de obtener una más adelante.

Resulta que las cosas son más satisfactorias: hay suficientes ceros definitivos en cada ronda para que en adelante los piratas ofrezcan los sobornos sólo a *ellos*. De hecho, como Peter Norvig señaló, siempre habrá cien repartos de cero entre los piratas P1-P200, de modo que podemos describir una solución en la que los sobornos se ofrecen sólo a (algunos de) ellos. Quizá usted se pregunta por qué me estoy molestando en todo esto, puesto que claramente el pirata 203 no tiene bastante dinero disponible para sobornar a suficientes piratas para que voten por su propuesta, cualquiera que sea. Esto es cierto, y P203 será lanzado por la borda proponga lo que proponga —un resultado que simbolizamos por una cruz «×»—. Escribimos «?» para mostrar que su elecciones son irrelevantes, lo que da la situación

P1	P2	P3	P4	…	P197	P198	P199	P200	P201	P202	P203
?	?	?	?	…	?	?	?	?	?	?	×

Incluso si P203 está destinado a pasar por la tabla, esto no quiere decir que él no tenga ningún papel en los procedimientos. Por el contrario, P204 sabe ahora que el único objetivo de P203 en la vida es evitar el tener que proponer un reparto del botín. Ahora, P204 simplemente se escabulle: él puede contar con su propio voto, el voto de P203, y otros cien de sobornos de una moneda de oro: 102 votos en total, el cincuenta por 100 necesario. De modo que P204 propondrá:

P1	P2	P3	P4	…	P197	P198	P199	P200	P201	P202	P203	P204
*	0	*	0	…	*	0	*	0	*	*	0	0

¿Qué pasa con P205? ¡Él no tiene tanta suerte! No puede contar con los votos de P203 y P204: si ellos votan contra él se dan el gusto de arrojarle por la borda y todavía pueden salvarse. De modo que P205 tiene una ×. Lo mismo pasa con P206: él puede estar seguro del voto de P205, pero eso no basta. De la misma manera, P207 necesita 104 votos: tres, más el suyo propio y cien de sobornos. Puede obtener los votos de P205 y P206, pero necesita uno más y no está disponible. De modo que P207 también tiene una ×. P208 es más afortunado. Él también necesita 104 votos, ¡pero P205, P206 y P207 votarán por él! Sumemos a esto su propio voto y los cien sobornos y él está a salvo. Debe ofrecer sobornos a aquellos piratas que obtendrían cero según la propuesta de P204:

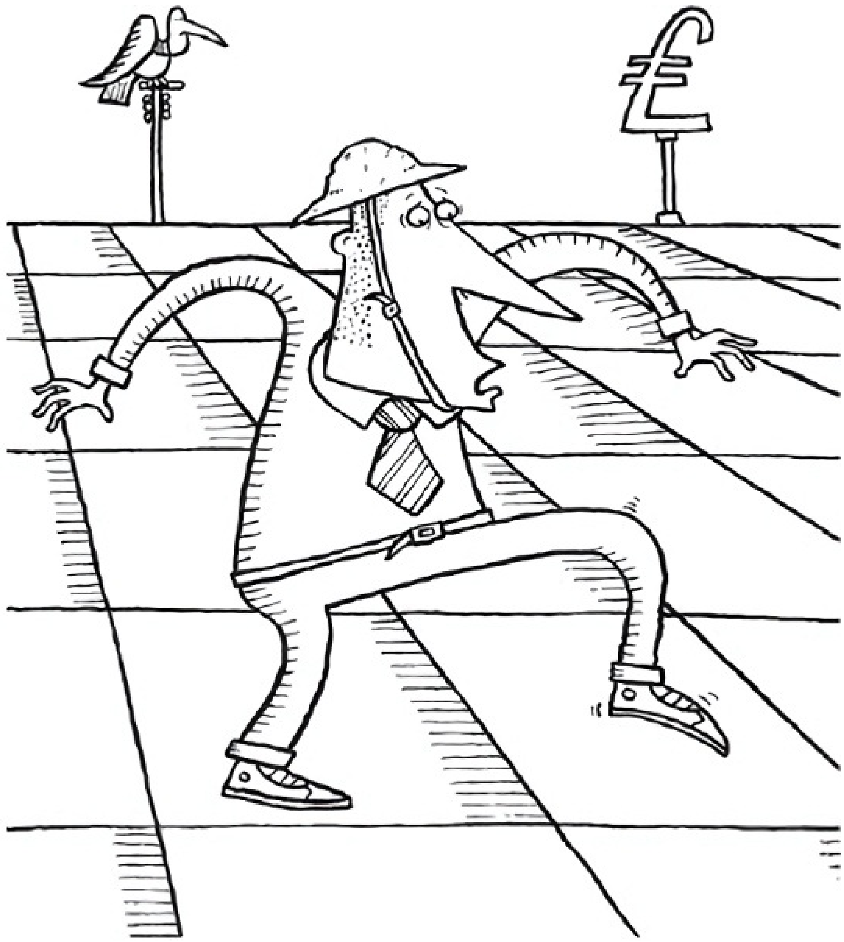
P1	P2	P3	P4	…	P198	P199	P200	P201	P202	P203	P204	P205	P206	P207	P208
0	*	0	*	…	*	0	*	0	0	*	*	0	0	0	0

Ahora ha empezado una nueva pauta que continúa indefinidamente. Los piratas que hacen propuestas (siempre para no quedarse ellos mismos con nada y sobornar a cien de los doscientos primeros piratas) están separados de los demás por secuencias de piratas cada vez mayores que serán arrojados por la borda cualquiera que sea la propuesta que hagan —y cuyo voto está por consiguiente asegurado para la propuesta de cualquier pirata más cruel—. Los piratas que evitan este destino son los números P201, P202, P204, P208, P216, P232, P264, P328, P456,… y así sucesivamente: doscientos más una potencia de dos.

Queda por calcular quienes son los afortunados receptores de los sobornos, sólo para asegurarnos de que los aceptarán. Como dije, la solución no es única, pero una forma de hacerlo es que P201 ofrezca sobornos a los piratas con número impar P1P199, que P202 ofrezca sobornos a los piratas con número par P2-P200, luego P204 a los de número impar, P208 a los pares, y así sucesivamente, alternando de impar a par y vuelta. En cualquier caso, concluimos que con quinientos piratas y estrategia óptima, los 44 primeros piratas son arrojados por la borda y luego, P456 ofrece una pieza de oro a cada uno de los P1, P3, P5,…, P199.

Gracias a su sistema democrático, los piratas han arreglado sus asuntos de modo que los muy crueles son mayoritariamente arrojados por la borda y, en el mejor de los casos, pueden considerarse afortunados de escapar sin nada del botín. Sólo los doscientos piratas menos agresivos pueden esperar algo, y sólo la mitad de ellos. En verdad, los mansos heredarán la tierra.

20
Un millón de dólares por el Buscaminas



No sucede a menudo que uno pueda ganar un millón de dólares analizando un juego de ordenador, pero, por una curiosa conjunción del destino, usted podría tener una oportunidad. No obstante, sólo se llevaría el botín si todos los expertos están equivocados y un problema que ellos consideran extraordinariamente difícil resulta ser fácil. Así que no encargue el Ferrari todavía.

El premio es uno de los siete que ahora ofrece el recientemente creado Instituto Clay de Matemáticas en Cambridge MA (fundado por el hombre de negocios Landon T. Clay para promocionar el crecimiento y la difusión del conocimiento matemático); cada uno de ellos tiene una dotación de un millón de dólares. El juego de ordenador es el Buscaminas, que está incluido en el sistema operativo Windows™ de Microsoft, y consiste en localizar minas ocultas en una cuadrícula haciendo conjeturas sobre su localización y utilizando las claves que proporciona el ordenador. Y el problema es una de las cuestiones abiertas más famosas en matemáticas que se recrea con el nombre de «¿P = NP?».

La conexión entre el juego y el problema del premio fue explicada por Richard Kaye de la Universidad de Birmingham, Inglaterra (véase Lecturas adicionales). Y antes de que se excite demasiado, debe saber que usted no ganará el premio sólo por ganar el juego. Para ganarlo tendrá que encontrar un método realmente preciso para responder preguntas sobre Buscaminas cuando se juega en cuadrículas gigantescas, y toda la evidencia sugiere que no hay un método preciso. De hecho, usted también puede ganar el premio si puede demostrar que no existe tal método.

Empecemos con Buscaminas. El ordenador empieza el juego mostrándole una cuadrícula de casillas en blanco. Algunas cuadrículas esconden minas; el resto son seguras. Su tarea consiste en descubrir dónde están las minas sin que explote ninguna de ellas. Para ello, usted elige una casilla. Si hay una mina bajo ella, la mina explota y el juego termina —usted pierde, por supuesto—. Sin embargo, si no hay mina, el ordenador escribe un número en dicha casilla que le indica cuántas minas hay en las ocho casillas inmediatamente adyacentes (en horizontal, vertical y diagonal).

Si su primera conjetura da con una mina, usted no tiene suerte: no obtiene información, salvo la de que ha perdido. Si, por el contrario, no da con una mina, entonces obtiene información parcial sobre la localización de las minas vecinas. Usted utiliza esta información para hacer su siguiente elección de casilla; de nuevo, o explota una mina y pierde, o gana información sobre las posiciones de las minas vecinas. Si lo desea, puede elegir marcar una casilla como si contuviera una mina: si está equivocado, pierde. Procediendo de esta manera puede ganar el juego localizando y marcando todas las minas.

F	D	2	1	2	1
A	A	3	*	4	B
2	2	3	*	5	B
0	0	1	1	4	B
0	1	1	1	2	B
0	1	C	E	E	E

FIGURA 77. Posición de Buscaminas típica.

Por ejemplo, tras algunas jugadas usted podría alcanzar la posición mostrada en la figura 77. Aquí, una estrella muestra una mina conocida (es decir, cuya posición ya ha sido deducida), los números son la información que usted ha obtenido del ordenador, y las letras marcan casillas cuyo estatus no está todavía comprobado. Con un poco de reflexión, usted puede deducir que las casillas marcadas A deben contener minas, debido a los 2 que hay exactamente debajo de ellas. Las casillas marcadas B también deben contener minas, debido a los 4 y 5 vecinos. Del mismo modo, C debe contener una mina; y entonces se sigue que D y E no lo hacen. El estatus de F puede deducirse entonces, tras unas pocas jugadas, destapando D y viendo qué número aparece.

Ahora, el problema ¿P = NP? Recordemos que un algoritmo es un procedimiento para resolver un problema que puede ser ejecutado por un computador: cada paso está especificado por un programa. Una cuestión fundamental en las matemáticas de la computación es: ¿con qué eficiencia puede un algoritmo resolver un problema dado? ¿Cómo depende el tiempo de ejecución —el número de computaciones necesarias para obtener la respuesta— de los datos iniciales? Para fines teóricos la distinción principal es entre problemas que son de tipo P —tiempo polinómico—y los que no lo son. Un problema es de tipo P si puede resolverse utilizando un algoritmo cuyo tiempo de ejecución crece no más rápidamente que (un múltiplo constante de) cierta potencia fija del número de símbolos necesarios para especificar los datos iniciales. De lo contrario, el problema es no-P. Intuitivamente, los problemas en P pueden resolverse eficientemente, mientras que los problemas no-P no pueden resolverse algorítmicamente de ningún modo práctico porque cualquier algoritmo necesitará un tiempo escandalosamente largo para obtener una respuesta. Los problemas de tipo P son fáciles, los problemas no-P son difíciles. Por supuesto, no es tan simple como eso, pero es una buena regla empírica.

Usted puede probar que un problema es de tipo P mostrando un algoritmo que lo resuelve en tiempo polinómico. Por ejemplo, ordenar una lista de números en orden numérico es un problema tipo P, que es la razón por la que las bases de datos comerciales pueden ordenar datos; y buscar una cadena con cierta secuencia de símbolos es también un problema tipo P, que es la razón de que los procesadores de textos comerciales puedan realizar operaciones de buscar-y-reemplazar. En 2003, para sorpresa de muchos matemáticos, se demostró que comprobar si un número es primo es un problema tipo P, que requiere una computación que crece no más rápidamente que la duodécima potencia del número de dígitos (véase Agrawal *et al.* y Bornemann, Lecturas adicionales).

Por el contrario, es creencia general que el Problema del Viajante —encontrar la ruta más corta que puede seguir un viajante para visitar todas las ciudades de un itinerario dado— es un problema no-P, pero esto no ha sido demostrado hasta ahora. También se cree que encontrar los factores primos de un número entero es no-P, pero esto tampoco ha sido demostrado. La seguridad de ciertos sistemas criptográficos, algunos de los cuales se utilizan para enviar por Internet datos personales tales como los números de tarjetas de crédito, dependen de que esta creencia sea correcta.

¿Por qué es tan difícil demostrar que un problema es no-P? Porque no puede hacerse analizando cualquier algoritmo concreto. Hay que contemplar todos los algoritmos posibles y demostrar que ninguno de ellos puede resolver el problema en tiempo polinómico. Ésta es una tarea alucinante. Lo mejor que se ha hecho hasta la fecha es demostrar que una amplia clase de candidatos a problemas no-P están en pie de igualdad: si cualquiera de ellos puede resolverse en tiempo polinómico, entonces todos pueden resolverse. Se dice que los problemas incluidos en esta clase tienen tiempo de ejecución «no determinístico polinómico»: tipo NP.

NP no es lo mismo que no-P. Un problema es NP si es posible comprobar en tiempo polinómico si una solución propuesta es realmente una solución. Ésta es, o al menos parece ser, una condición mucho menos restrictiva que la de ser capaz de encontrar esa solución en tiempo polinómico. Mi ejemplo favorito es un rompecabezas de piezas. Resolver el rompecabezas puede ser muy difícil, pero si alguien afirma que lo ha resuelto, normalmente no se necesita más que una rápida ojeada para comprobar si está en lo cierto. Para obtener una estimación cuantitativa del tiempo de ejecución, simplemente miramos las piezas una por una y nos aseguramos de que encaja con el número limitado de piezas vecinas a las que se une. El número de cálculos necesario para hacer esto es aproximadamente proporcional al número de piezas, de modo que la comprobación se hace en tiempo polinómico. Pero no se puede resolver el rompecabezas de esa manera. Ni se puede ensayar una por una cada solución potencial y comprobarla, porque el número de soluciones potenciales crece mucho más rápidamente que cualquier potencia fija del número de piezas.

Resulta que un montón de problemas NP tienen tiempos de ejecución «equivalentes». En concreto, se dice que un problema NP es NP-completo si la existencia de una solución en tiempo polinómico para dicho problema implica que todos los problemas NP tienen una solución en tiempo polinómico. Resuelva uno en tiempo polinómico y habrá resuelto todos ellos en tiempo polinómico. Se conoce un enorme abanico de problemas que son NP-completos. El problema ¿P = NP? pregunta si los tipos P y NP son (a pesar de todas las apariencias en contra) el mismo. La respuesta esperada es «no». Sin embargo, si algún problema NP-completo resulta ser de tipo P (es decir, tiene una solución en tiempo polinómico) entonces NP debe ser igual a P. Por lo tanto, esperamos que todos los problemas NP-completos sean no-P, pero nadie puede probar esto todavía.

Uno de los problemas NP-completos más simple conocido es SAT, la satisfacibilidad lógica de una condición booleana. Los circuitos booleanos se construyen a partir de puertas lógicas con nombres como AND, OR y NOT. Los inputs para estos circuitos son V (verdadero) o F (falso). Cada puerta acepta un número de inputs, y da como salida el valor lógico de dicha combinación. Por ejemplo, una puerta AND toma inputs p, q y da p AND q, que es V siempre que *p* y *q* sean ambos V, y es F en caso contrario. Una puerta NOT convierte el input V en una salida F y el input F en una salida V. El problema SAT pregunta, para un circuito booleano dado, si existen elecciones de inputs que dan lugar a la salida V. Aunque esto suene fácil, no olvide que un circuito puede contener un número enorme de puertas y tener un número enorme de inputs.

La conexión con el juego de ordenador llega cuando introducimos el Problema de Consistencia del Buscaminas. Éste no consiste en encontrar las minas, sino en determinar si un estado dado de lo que pretende ser un juego Buscaminas es o no es lógicamente consistente. Por ejemplo, si durante el estado del juego encontró la figura 78, usted sabría que el programador había cometido un error: no hay colocación de las minas compatible con la información mostrada. Kaye demuestra que Buscaminas es equivalente a SAT en el sentido siguiente. El problema SAT para un circuito booleano dado puede ser «codificado» como un Problema de Consistencia de Buscaminas para cierta posición en el juego, utilizando un procedimiento de codificación que corre en tiempo polinómico. Por lo tanto, si usted pudiera resolver el Problema de Consistencia del Buscaminas en tiempo polinómico, usted habría resuelto el problema SAT para dicho circuito en tiempo polinómico. En otras palabras, Buscaminas es NP-completo. Así, si algún listillo encuentra una solución en tiempo polinómico para Buscaminas, o alternativamente demuestra que no existe tal solución, entonces el problema ¿P = NP? está resuelto (en un sentido o en el otro).

*	2	*			
*	*	*			
				0	0
6				0	1

FIGURA 78. Posición de Buscaminas imposible.

La demostración de Kaye incluye un procedimiento sistemático para convertir circuitos booleanos en posiciones de Buscaminas. Aquí, una casilla de la cuadrícula tiene un estado V si contiene una mina, y F si no la contiene. El primer paso no implica puertas, sino los cables que las conectan. La figura 79 muestra un cable Buscaminas. Todas las casillas marcadas *x* contienen una mina (V) o no contienen una mina (F), pero nosotros no sabemos cuáles. Todas las casillas marcadas *x*′ hacen lo contrario de *x*. Usted debería comprobar que todos los números mostrados son correctos ya *x* sea V o F. El efecto del cable es «propagar» la señal V o F a lo largo de su longitud, listo para ser input en una puerta.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x	x'	x	x'	x	x'	x	x'	x'	x'	x	x'	x	x'
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURA 79. Un cable.

La figura 80 muestra una puerta NOT. Los números marcados en el bloque del centro obligan a un intercambio de *x* y *x*′ en el cable de salida, comparado con el cable de entrada. La puerta AND (figura 81) es más complicada. Tiene dos cables de entrada *U*, *V*, y una salida *W*. Para establecer que ésta es una puerta AND suponemos que la salida es V y demostramos que ambos inputs tienen que ser también V. Puesto que la salida es V, cada símbolo *t* debe indicar una mina y cada *t*′ una nomina. Ahora, el 3 encima y debajo de a^3 implica que a_2 y a_3 son minas, de modo que a_1 no es una mina y, por lo tanto, *s* es una mina. Análogamente, *r* es una mina. Entonces el 4 central tiene ya cuatro minas como vecinos, lo que implica que *u*′ y *v*′ son no-minas, de modo que *u* y *v* son minas —y esto significa que *U* y *V* tienen valor de verdad V—. Recíprocamente, si *U* y *V* tienen valor V, entonces así lo tiene W. En resumen, tenemos una puerta AND como se afirmaba.

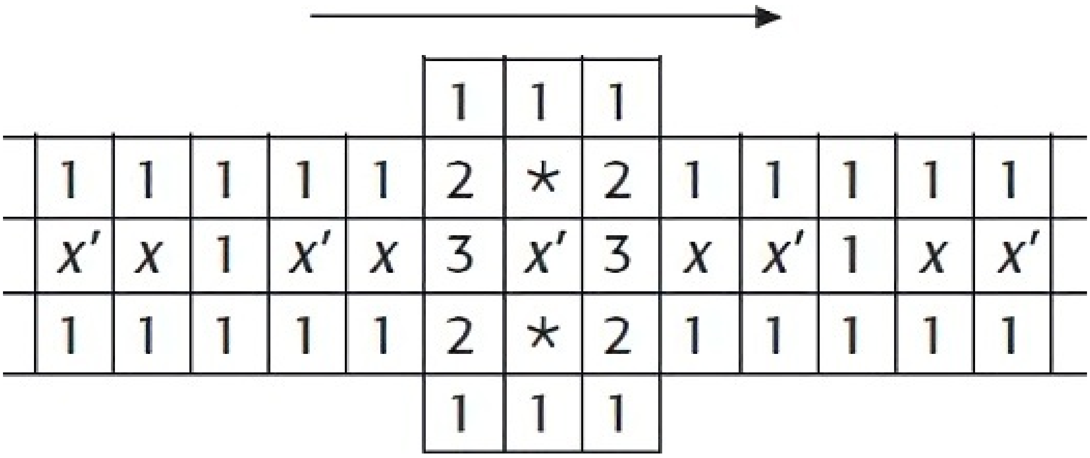


FIGURA 80. Una puerta NOT.

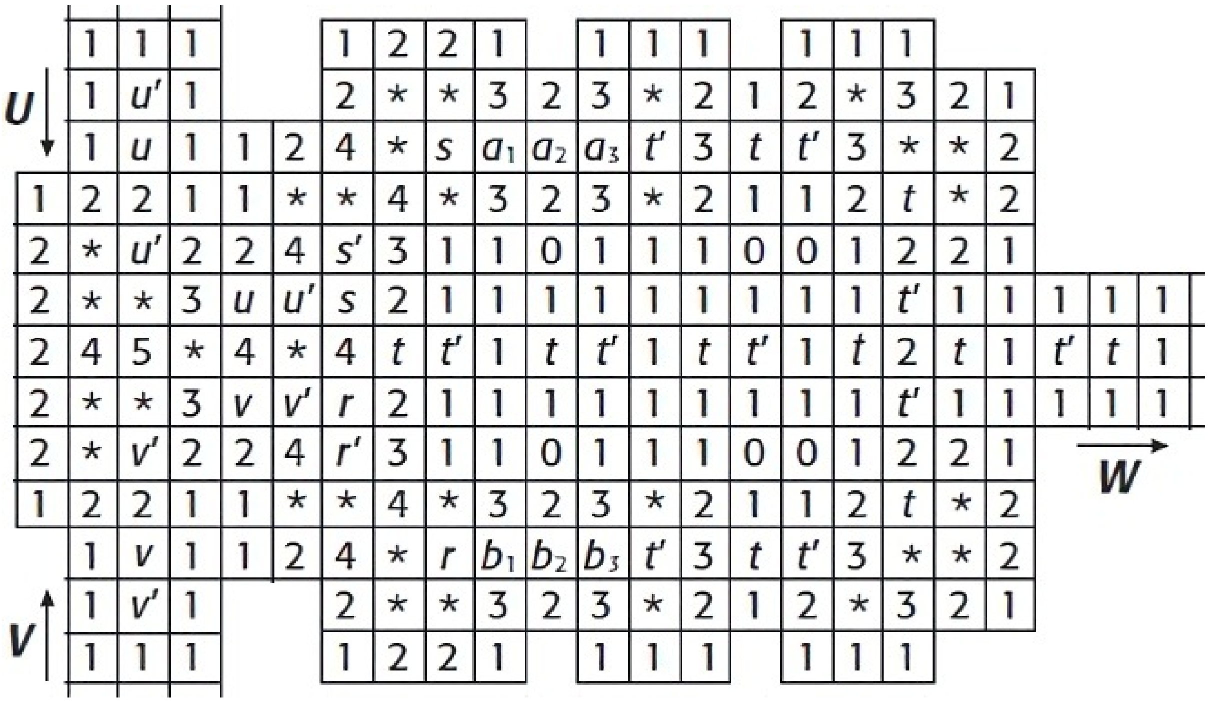


FIGURA 81. Una puerta AND.

Hay más que esto en la electrónica del Buscaminas; por ejemplo, tenemos que ser capaces de doblar cables, dividirlos, unirlos o hacer que se crucen sin conectarse. Kaye resuelve todos estos problemas, y otros más sutiles, en su artículo. El resultado es que resolver el Problema de Consistencia de Buscaminas es algorítmicamente equivalente al problema SAT, y es así NP-completo. Para prácticamente todos los matemáticos y científicos de la computación esto significa que el Problema de Consistencia del Buscaminas debe ser intrínsecamente difícil. Es sorprendente que un juego tan simple tenga tales consecuencias intratables, pero los juegos matemáticos son así.

Si usted está interesado en esos premios de un millón de dólares, una palabra de advertencia. El Instituto Clay impone reglas estrictas antes de aceptar una solución como válida. En particular, debe estar publicada por una revista importante en donde la aceptación de los artículos esté sujeta al proceso de «revisión por los pares», y debe haber sido «generalmente aceptada» por la comunidad matemática en menos de dos años tras su publicación. Pero incluso si usted no va a abordar nada tan abrumador como eso, puede divertirse mucho jugando con Buscaminas, con la certeza de que encierra uno de los grandes problemas no resueltos de nuestra época.

Lecturas adicionales

CAPÍTULO 1

Gale, David, «More Paradoxes: Knowledge Games», *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n.º 4, 1994, pp. 38-44.

Lasry, J. M., J. M. Morel y S. Solimin, «On knowledge games», *Revista Matemática de la Universidad de Madrid*, vol. 2, 1989.

CAPÍTULO 2

Gardner, Martin, *Mathematical Puzzles and Diversions from Scientific American*, Bell, Londres, 1961.

Honsberger, Russ, *Mathematical Gems I*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1973.

Kraitchik, Maurice, *Mathematical Recreations*, Allen y Unwin, Londres, 1943.

CAPÍTULO 3

Berlekamp, Elwyn R., John H. Conway y K. Richard Guy, *Winning Ways*, vol. 2, Academic Press, Nueva York, 1982.

CAPÍTULO 4

Matthews, Robert, «Tumbling toast, Murphy's Law, and the fundamental constants», *European Journal of Physics*, vol. 18, 1995, pp. 172-176.

—, «The science of Murphy's law», *Scientific American*, abril de 1997, pp. 72-75.

CAPÍTULO 5

Beiler, Albert H., *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, Nueva York, 1964.

Fowler, David, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, 1987.
Nelson, Harry L., «A solution to Archimedes' Cattle Problem», *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13, 1981, pp. 162-176.
Ogilvy, Stanley C., *Tomorrow's Math* (2.ª ed.), Oxford University Press, Nueva York, 1972.
Vardi, Ilan, «Archimedes' Cattle Problem», *American Mathematical Monthly*, vol. 105 n.º 4, abril de 1998, pp. 305-319.

CAPÍTULO 6

Croft, Hallard T., Kenneth J. Falconer y Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1995.
Joris, H., «Le chasseur perdu dans la forêt», *Elementa Mathematicae*, vol. 35, 1980, pp. 1-14.

CAPÍTULO 7

Frederickson, Greg N., *Dissections: Plane and Fancy*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
Lindgren, Harry, *Geometric Dissections*, Van Nostrand, Princeton, 1964.
Stewart, Ian, *From Here to Infinity*, Oxford University Press, Oxford, 1996 (hay traducción española: *De aquí al infinito*, Crítica, Barcelona, 1999).
Wagon, Stan, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

CAPÍTULO 8

Livio, Mario, *The Golden Ratio*, Broadway, Nueva York, 2002.
De Weger Benjamin M. M., «Padua and Pisa are exponentially far apart», *Publications Matemàtiques*, vol. 41, 1997, pp. 631-651.

CAPÍTULO 11

Dershowitz, Nachum y Edward M. Reingold, *Calendric Calculations: the Millennium Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

CAPÍTULO 12

Brams, Steven J. y Alan D. Taylor, «An envy-free cake division protocol», *The American Mathematical Monthly*, vol. 102, enero, 1995, pp. 9-18.
Gale, David, «Mathematical entertainments», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 15, n.º 1, 1993, pp. 50-52.

CAPÍTULO 13

Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone y W. T. Tutte, «The dissection of rectangles into squares», *Duke Mathematical Journal*, vol. 7, 1940, pp. 312-340.
Croft, Hallard T., Kenneth J. Falconer y Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, Nueva York, 1991, p. 81.
Gale, David, «Mathematical entertainments», *The Mathematical Intelligences*, vol. 15, n.° 1, 1993, pp. 48-50.
Gardner, Martin, *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Bell, Londres, 1963.

CAPÍTULO 14

Ball, W. W. Rouse, *Mathematical Recreations and Essays*, MacMillan, Londres, 1939.

CAPÍTULO 15

Wier, Sruart Kirkland, «Insight from geometry and physics into the construction of Egyptian Old Kingdom pyramids», *Cambridge Archeological Journal*, vol. 6, 1996, pp. 150-163.

CAPÍTULO 16

Berlekamp, Elwyn, R. *The Dots and Boxes Game*, A. K. Peters, Natick MA, 2000.

CAPÍTULO 17

Berlekamp, Elwyn R., John H. Conway y Richard K. Guy, *Winning Ways*, Academic Press, Nueva York, 1982.
Gale, David, *Tracking the Automatic Ant*, Springer, Nueva York, 1998.

CAPÍTULO 18

Tokarsky, George, «Polygonal rooms not illuminable from every point», *American Mathematical Monthly*, vol. 102, n.º 10, 1995, pp. 867-879.

Croft, Hallard T., Kenneth J. Falconer y Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, Nueva York, 1991.

Klee, Victor y Stan Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1991.

CAPÍTULO 20

Agrawal, Manindra, Neeraj Kayal y Nittin Saxena, *PRIMES is in P*, IIT Kanpur preprint, 8 de agosto de 2002; www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/algebra/primality_v6.pdf

Bornemann, Folkmar, «PRIMES is in P: a breakthrough for "Everyman"», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 50, n.º 5, pp. 545-552.

Kaye, Richard, «Minesweeper is NP-complete», *Mathematical Intelligencer*, vol. 22, n.º 2, 2000, pp. 9-15.

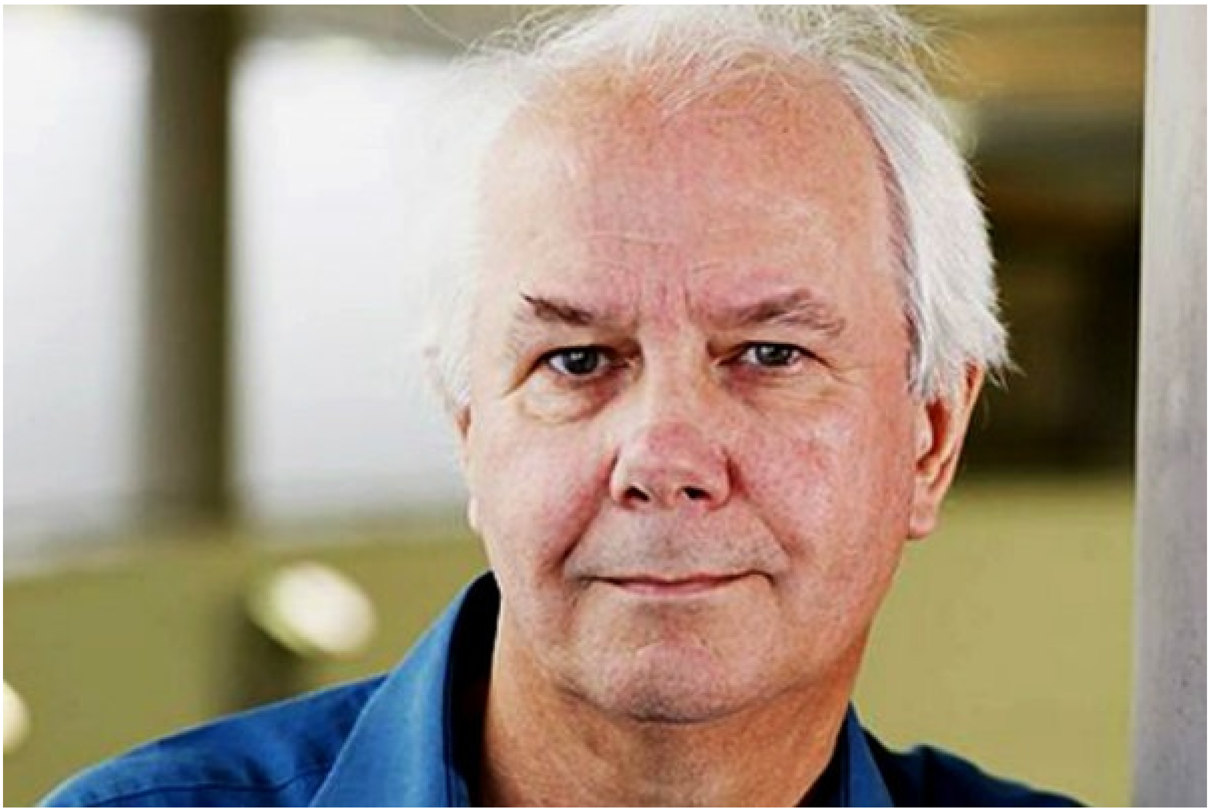
Agradecimientos por las figuras

Figura 30: *American Mathematical Monthly*, reimpreso con permiso del autor y el editor.

Figuras 22a, 23b, 23c, 25, 26, 27a, 27b, 27c, 29, 30, 31 y 32: *Dissections: Plane and Fancy*, 1997, Cambridge University Press, Greg N. Frederickson, 1997, reimpreso con permiso del autor y el editor.

Figuras 23a, 24 y 31b: *Journal of Recreational Mathematics*, reimpreso con permiso del autor y el editor.

Figura 27d: *Recreational Mathematics Magazine*, reimpreso con permiso del autor y el editor.



Ian Nicholas Stewart (24 de septiembre de 1945, Inglaterra) es profesor de matemática de la Universidad de Warwick, más conocido como escritor de ciencia ficción y de divulgación científica. Fue el primero en recibir, en 2008, la Medalla Christopher Zeeman, por sus numerosas actividades relacionadas con la divulgación matemática.

Ha publicado más de 140 *papers* científicos, entre ellos una serie de trabajos muy influyentes junto a Jim Collins sobre Osciladores acoplados y Sincronización biológica. Entre sus numerosos y reconocidos libros de divulgación matemática se encuentran *¿Juega Dios a los dados?*, *Historia de las Matemáticas* y *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos*.

Notas

[1] El pasaje une dos juegos de palabras intraducibles: el término inglés *bridge*, «puente», y el verbo *check*, que significa tanto «ajedrezado» como «comprobar». (*N. del t.*) <<

[2] Pnerd «anticipa» el poema «Temible Simetría» de William Blake, con un conejo en lugar de un tigre. (*N. del t.*) **<<**

[3] «Big Blue» es el nombre informal de la compañía IBM, de la que Ralph Gomory, un matemático norteamericano, fue vicepresidente durante muchos años. El resultado matemático que se presenta en esta sección se conoce como «teorema de Gomory». (*N. del t.*) <<

[4] *The Cat in the Hat*, de Theodore Seuss, es una historia en verso, con rimas simples, compuesta a partir de un vocabulario de poco más de doscientas palabras y dirigida a lectores principiantes. Tuvo gran influencia en la enseñanza primaria en Estados Unidos a partir de su publicación en 1957. (*N. del t.*) <<

[5] *I’ve never had a piece of toast* / *Particularly long and wide* / *But fell upon the sanded floor* / *And always on the buttered side.* (*N. del t.*) **<<**

[6] Juego de palabras con «resonancia módica», el extravagante concepto debido a Rupert Sheldrake. (*N. del t.*) <<

[7] Éstas son las transcripciones de los términos del inglés antiguo Holy Cross (Sagrada Cruz) y Almighty (Todopoderoso) tal como aparecen en las crónicas normandas de la época. (*N. del t.*) <<

[8] *The Great Drain Robbery* en el original, juego de palabras con *The Great Train Robbery* (*El Gran Robo al Tren*) (*N. del t.*) **<<**